

$$2) (a_1 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2 \quad a_i > 0$$

$$a) \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

$$b) \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}}$$

a. b

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)}{n^2} \geq \underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}}}_{\sqrt[n]{1}}$$

3) Adott $k > 0$ koníletű téglalapok közül melyik a legnagyobb területű?

$$k = 2(a+b) \rightarrow a = \frac{k}{2} - b$$

$$t = a \cdot b \quad \text{maximalis!}$$

$$T = \left(\frac{k}{2} - b \right) \cdot b = \frac{k \cdot b}{2} - b^2$$

$$T' = \frac{k}{2} - 2b \quad 0 = \frac{k}{2} - 2b \quad 2b = \frac{k}{2}$$

$$2b = a + b$$

$$b = a$$

$$4b = k$$

$$a = \frac{4b}{2} - b = 2b - b$$

$$a = b$$

SZALONTAY MARCELL ZOLTÁN

2013

4). Biz. teljes indukcióval: $2^n > n^2$, ha $n > 4$, $n \in \mathbb{N}$

1. $2^5 > 5^2$ ✓

2. Tfl $2^k > k^2$ $2^n > n^2$

3. $2^{n+1} > (n+1)^2$

$2 \cdot 2^n > n^2 + 2n + 1$

indukció feltétele $2 \cdot n^2 > n^2 + 2n + 1$

$n^2 > 2n + 1$

$1 > \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}$

$1 > \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$

maximumra:

$1 > \frac{2}{5} + \frac{1}{25} =$

$1 > \frac{11}{25}$ | egyenlőre a tétel igaz, mivel ha a nevezőt növeljük a tag egyre kisebb lesz.

5) Biz. ha teljes indukcióval: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

1. $n=1$ -re: $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ✓

2. Tfl l -re igaz: $\sum_{k=1}^l k = \frac{l(l+1)}{2}$

3. $n+1$ -re: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^n k + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

→ indukció feltétele $\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$\frac{n^2+n}{2} + (n+1) = \frac{n^2+3n+2}{2}$

$n^2+n+2n+2 = n^2+3n+2$ ✓

6-9) Döntse el az alábbi sorozatokról, hogy melyik divergens és a konvergenseknek adja meg a határértéket:

$$a) a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{n}{\sqrt[3]{n}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt[6]{n^3}}{\sqrt[6]{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$b) a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n^3 - 7n^2 + 6n - 10}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overset{0}{\frac{n^2}{n^3}} + \overset{0}{\frac{3n}{n^3}} - \overset{0}{\frac{1}{n^3}}}{\underset{1}{\frac{n^3}{n^3}} - \underset{0}{\frac{7n^2}{n^3}} + \underset{0}{\frac{6n}{n^3}} - \underset{0}{\frac{10}{n^3}}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$c) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow{(a-b)(a+b)} \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

11-13) Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$a) a_n = \frac{10^n}{n!}$$

$$\frac{10^{10}}{10!} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{10}{13} \cdot \dots \cdot \frac{10}{n} < \frac{10^{10}}{10!} \cdot \frac{10}{n} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$b) \sqrt[n]{n}$$

$$1 \leq \sqrt[n]{\underbrace{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2 \text{ db}}} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + (n-2)}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} \rightarrow 1$$

c)

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\frac{2n+3}{n}} = e^{\frac{2n+3}{n}} = e^2$$

$$= e^{\frac{2n+3}{n}} = e^2$$

14-19) Írja fel az alábbi sorok n -dik részletösszegét, és ha konvergens, adja meg az összegét!

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

Megjegyz.: mértani sor: $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$\rightarrow$ ha Σ 0-tól kezd, akkor: $\frac{1}{1-q}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{4}\right)^k$

Megjegyz.: mértani sor csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$

$\rightarrow$ tehát ez a sor divergens

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)}$ $\rightarrow$ Parc. részlettelre bontás: $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$

tehát: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = 1$$

$$Ak + A + Bk = 1$$

$$Ak + Bk = 0 \cdot k$$

$$\underline{A=1}$$

$$1 + B = 0$$

$$\underline{B=-1}$$

$$d) \sum_{k=2}^{\infty} 10^{-k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{10^k} = -1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} =$$

$$= -1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{90}$$

20-24) Vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok konvergensak vagy divergensak.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, tehát a sor konvergens.

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{k} \right)^k$$

$$a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^n \rightarrow \text{größen nehmen: } \sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^n} = \frac{3}{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0$$

gesamtte $\swarrow$ gesamtte $\searrow$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A$, Ha $A < 1$ akkor konvergens
 $A > 1$ akkor divergens
 $A = 1$ nem lehet eldönteni

$$c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k \cdot (k+1)}$$

majoriertes mit: $ba \leq bn \leq an$ $\Rightarrow an$ konvergenz,
also bn ist konvergenz.

$$0 \leq \frac{\sin^2 k}{k \cdot (k+1)} \leq \frac{1}{k(k+1)} \rightarrow \text{verges}$$

test a ser convergens.

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)$$

Regel 3: $\sum (a_n)$ also konvergiert, bei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, hier divergiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right) = \frac{\cancel{k}}{\cancel{k}} \left(\frac{1}{2+\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{1}} \right) = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ tehát}$$

a ser divergens.

25-32) Számítsa ki az alábbi határértékek közül azokat, amelyek léteznek.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{1} \right) = -\infty \Rightarrow 1 - \infty = -\infty$$

tehát nem lehetnek négy határolók

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x} = 1$$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1}$$
$$= \frac{\cancel{x^2}^1}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{x}} + \overset{2}{\frac{2}{\cancel{x^2}}}}{1 + \frac{1}{\cancel{x}} + \frac{1}{\cancel{x^2}}} = \frac{3}{3} = \underline{\underline{1}}$$

d) c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$

Hauptsatz: L'Hopital: $\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(u)}{g'(u)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{\cos(ax) \cdot a}{\cos(bx) \cdot b} = \frac{a}{b}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))'}{x'} = \frac{\sin x}{1} = \frac{\sin 0}{1} = 0$$

33-36) Deriválja az alábbi függvényeket

$$a) f(x) = (x^3 + 1)^2 = 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2$$

$$b) f(x) = \sin \sqrt{x+3} = \cos \sqrt{x+3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+3)^{-1/2} \cdot 1$$

37-39) Számolja ki az alábbi határértékeket!

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x - x)'} = \frac{-(\sin x)'}{(\cos x - 1)'} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \operatorname{ctg}(x) \rightarrow 0$$

40-41) Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a függvény grafikonját.

$$a) f(x) = x^3 - 2x \Rightarrow x \cdot (x^2 - 2)$$

gyökei: $\begin{matrix} \rightarrow 0 \\ \rightarrow \sqrt{2} \\ \rightarrow -\sqrt{2} \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x \text{ tengelyt érkező} \\ \text{a helyeken metszi} \end{matrix}$

$$f(x) = 3x^2 - 2 \rightarrow \text{gyökerei: } 3x^2 - 2 = 0$$

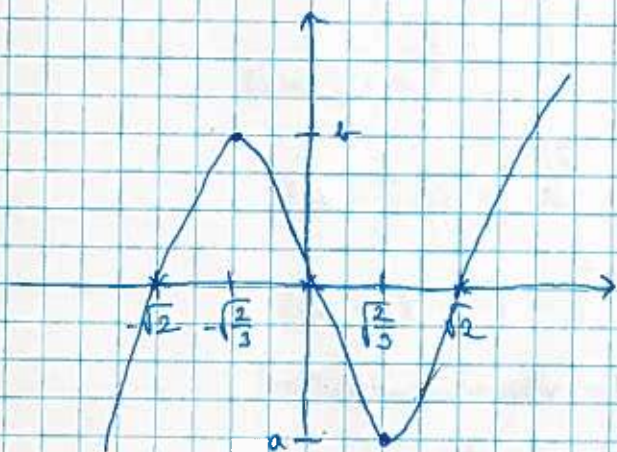
$$3x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \rightarrow \text{itt van a fv.-nek lokális maximum és minimuma.}$$

$$\rightarrow \text{ha } x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot -\frac{4}{3} \Rightarrow \text{lok. min}$$

$$\text{ha } x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \text{lok. max. ~b}$$



$x < -\frac{2}{3}$	$x = -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$	$x = \frac{2}{3}$	$x > \frac{2}{3}$
	lok. max		lok. min	

$$f(x)'' = 6x \rightarrow \text{inflexió's pont.}$$

$$f_g \in \mathbb{R} \rightarrow \text{itt tart} \rightarrow x \text{ tengely}$$

$$D_f \in \mathbb{R} \rightarrow \text{itt kényszer} \rightarrow y \text{ tengely}$$

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
f''	-	0	+
	konkáv	inflex. pont	konvex

$$b) f(x) = x \cdot e^{-x} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(0) = 0$$

$$x \cdot e^{-x} = 0$$

$$x = 0 \rightarrow \text{itt metszi az } x \text{ tengelyt}$$

$$f'(x) = e^{-x} - e^{-x} \cdot x \rightarrow e^{-x} - e^{-x} \cdot x = 0$$

$$1 - x = 0$$

$$x = 1 \rightarrow \text{itt lesz lokális szélsőérték}$$

$$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow + \text{ irány, tehát lok. Max lesz 1-ben.}$$

	$x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
f'	+	0	-
f	↗	lok. max	↘

$$f'(x) = -e^{-x} - (e^{-x} - x \cdot e^{-x})$$

$$-e^{-x} - e^{-x} + x \cdot e^{-x} = 0$$

$$-1 - 1 + x = 0$$

$$x = 2 \rightarrow \text{inflexiós pont}$$

	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
f''	-	0	+
f	∩ konkáv	inflexiós pont	∪ konvex

42-44) Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ -hoz tartozó adott fokú Taylor polinomját!

$$T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

a) $f(x) = e^x$, $T_1(x) = ?$

$$T_1(x) = \frac{f'(0)}{1} \cdot (x - 0)^1 = e^0 \cdot x = x$$

b) $f(x) = \sin x$, $T_5(x) = ?$

$$T_5(x) = \frac{f(0)}{1!} \cdot (x-0)^1 + \frac{f'(0)}{2!} x^2 + \frac{f''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} x^5$$

$$f' = \cos x \Rightarrow 1; f'' = -\sin x \Rightarrow 0; f''' = -\cos x \Rightarrow -1$$

$$f^{(4)} = \sin x \Rightarrow 0, f^{(5)} = \cos x \Rightarrow 1$$

$$T_5(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{6} x^3 + 0 + \frac{1}{120} x^5 = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5$$

45-47) Számítsa ki az alábbi függvény hordozói értékeit
az adott x_0 pontban a megadott fokú Taylor polinom
segítségével és vizsgálja meg a hibát.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 10$, $T_1(x) = ?$

$$T_1(x) = \sqrt[3]{10} + \frac{\frac{1}{3} \cdot 10^{-\frac{2}{3}}}{1} \cdot (x-10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$|f(x) - T_1(x)| = \left| \frac{f''(\xi)}{2} \cdot (x-10)^2 \right| = -\frac{2}{18} \cdot \frac{1}{5} \cdot (x-10)^2 <$$

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \quad \downarrow \quad 10 < \xi < x$$

minden csőbe pontosan esik az intervall első elemeit helyettesítjük.

$$< -\frac{2}{18} \cdot \frac{1}{5} \cdot (x-10)^2$$

b) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1,3$, $T_4(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}; \quad f''(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = -1 \cdot -2 \cdot x^{-3} = 2 \cdot \frac{1}{x^3}; \quad f^{(4)}(x) = -1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot x^{-4} = -6 \cdot \frac{1}{x^4}$$

$$f^{(5)}(x) = 24 \cdot \frac{1}{x^5}$$

$$T_4(x) = \ln(1,3) + \frac{\frac{1}{1,3}}{1} \cdot (x-1,3) + \frac{-\frac{1}{1,3^2}}{2} \cdot (x-1,3)^2 +$$

$$+ \frac{\frac{2}{1,3^3}}{6} \cdot (x-1,3)^3 + \frac{-\frac{6}{1,3^4}}{24} \cdot (x-1,3)^4$$

$$|f(x) - T_4(x)| = \left| \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot (x-1,3)^5 \right| = \frac{\frac{24}{\xi^5}}{120} \cdot (x-1,3)^5 <$$

$$< \frac{\frac{24}{1,3^5}}{120} \cdot (x-1,3)^5 \quad 1,3 < \xi < x$$

48-54) Határozza meg az alábbi függvények primitív függvényeit

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $F(x) = ?$

$$f(x) = F'(x) \rightarrow F(x) = \int f(x) = \int \frac{x+1}{x-1} dx =$$

$$= \int 1 dx + \int \frac{2}{x-1} dx = x + 2 \ln(x-1) + C$$

b) $f(x) = \frac{\ln^5 x}{x}$

$$F(x) = \int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'} \cdot \underbrace{\ln^5 x}_g = \frac{\ln^6 x}{6} + C$$

c) $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}$

$$F(x) = \int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx = \int \underbrace{e^{3x}}_{g'} + \frac{1}{\underbrace{e^{3x} + 5}_f} dx = \frac{\ln(e^{3x} + 5)}{3}$$

d) $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$

$$F(x) = \int \underbrace{x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x^2)}_f = \frac{-\cos x^2}{2}$$

e) $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 12x + 23}$ Helyettes. $(\arctg y)' = \frac{1}{y^2 + 1}$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 - 6x + 11,5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-3)^2 + 2,5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2,5}}{\frac{(x-3)^2}{2,5} + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2,5}}{\left(\frac{x-3}{\sqrt{2,5}}\right)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x-3}{\sqrt{2,5}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{5} \cdot \arctg\left(\frac{x-3}{\sqrt{2,5}}\right) \cdot \sqrt{2,5} + C$$

55-59) Számítsa ki az alábbi függvények határozott integrálját a megadott intervallumon.

$$a) \int_1^e x \cdot \ln(x) dx = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx =$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 g f
 $g: \frac{x^2}{2}$ $f': \frac{1}{x}$

Megjegyzés: $f'g - \int f'g$

$$= \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x^2}{x} dx = \left(\ln e \cdot \frac{e^2}{2} - \ln 1 \cdot \frac{1}{2} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + C$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \sin x dx = \left[x \cdot (-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\cos x dx =$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 f g'
 $f' = 1$ $g = -\cos x$

$$= \left[\frac{\pi}{4} \cdot (-\cos \frac{\pi}{4}) - 0 \right] + \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \sin x - \cos^2 x \cdot \sin x dx = \left[-\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} \cdot (-1) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 3} + 1 - \frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 6} - \frac{1}{3}$$

60-62) Döntse el, hogy konvergens-e az alábbi improprius integrálok, és indokolja!

$$a) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2x-1)^2} dx = \int_{-\infty}^0 (2x-1)^{-2} = \left[\frac{(2x-1)^{-1}}{-1} \cdot \frac{1}{2} \right]_{-\infty}^0$$

$$\rightarrow \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{(2x-1)^{-1}}{-1} \cdot \frac{1}{2} \right]_a^0 = \left(\frac{0-1}{-1} \cdot \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{(2a-1)^{-1}}{-1} \cdot \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{(2a-1)^{-1}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a-1} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2a-1}}_{\rightarrow 0} = \frac{1}{2}$$

$$b) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

$$c) \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

63-65) Írja fel az alábbi differenciál egyenlet megoldását

$$a) y' = -2xy \quad y(0) = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -2x dx$$

$$\ln y = \frac{-2x^2}{2}$$

$$-x^2 + C$$

$$y = e$$

$$-x^2 + C$$

$$2y = e$$

$$C = \ln 2 \rightarrow y = e^{-x^2 + \ln 2} = 2 \cdot e^{-x^2}$$

$$b) \quad y' = \frac{y}{x} \quad y(1) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln y = \ln x + c$$

$$e^{\ln y} = e^{\ln x + c} = e^{\ln x} \cdot e^c$$

$$y = x \cdot e^c$$

$$1 = 1 \cdot e^c$$

$$c = \ln 1 \rightarrow y = x \cdot e^{\ln 1} \rightarrow \underline{y = x}$$

$$c) \quad y' = -2y \quad y(2) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -2 dx$$

$$\ln y = -2x + c$$

$$y = e^{-2x+c}$$

$$1 = e^{-4+c}$$

$$\ln 1 + 4 = c$$

$$y = e^{-2x + \ln(1) + 4} = e^{-2x+4}$$

$$y = e$$

66-67) Írjuk fel az alábbi függvények Fourier-sorát

a) $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Megjegyzés: Fourier-sor: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

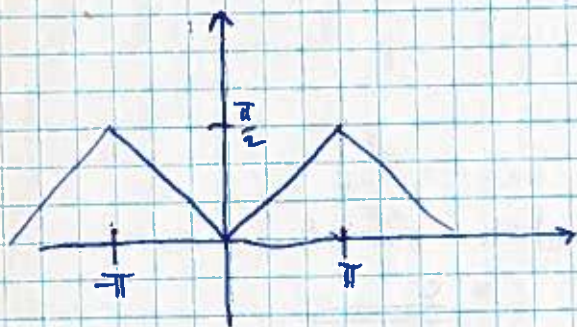
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

ha a függvény páros, akkor a b_k egyenlő haték 0-k, ha páratlan, akkor $a_k = 0$

→ ez a függvény páros, tehát $b_k = 0$

a továbbiakban a_k -k is 0-ra jöttek ki ami nem lehetetlen.

b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{ha } -\pi < x < 0 \\ x & \text{ha } 0 < x < \pi \\ \frac{\pi}{2} & x = \pi \end{cases}$



páros, tehát b_k -k 0-k.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos kx \, dx =$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 f g
 $f' = 1$ $g' = \frac{\sin kx}{k}$

$$= x \cdot \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{k} \, dx = \left(\pi \cdot \frac{\sin k\pi}{k} - 0 \right) - \left[-\frac{\cos kx}{k^2} \right]_0^{\pi}$$

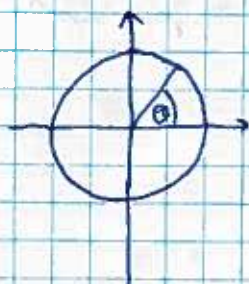
$$= 0 - \left(-\frac{\cos k\pi}{k^2} - \frac{-\cos k0}{k^2} \right) = \frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{1}{k^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{1}{k^2} \right) \cdot \cos kx$$

68-69) Adja meg paraméteresen az alábbi, $\mathbb{R}^2$ -beli görvéket:

a) origó középpontú, $r > 0$ sugarú kör.



$$t = \theta$$

$$x(t) = r \cdot \cos t$$

$$y(t) = r \cdot \sin t$$

b) az origót és az $(1,1)$ pontot összekötő szakasz.

$$x(t) = t$$

$$0 < t < 1$$

$$y(t) = t$$

70) Adja meg polárkoordinátákkal a $P_1(2, 2\sqrt{3})$ és a $P_2(2, -2\sqrt{3})$ pontokat

a) $P_1(2, 2\sqrt{3})$

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \arctg(\sqrt{3}) = \arctg\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \arctg\left(\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\right) = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

b) $P_2(2, -2\sqrt{3})$

$$r = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

71-73) Írd fel meg derleknögn (Descartes) ill. polar koordinátákkal az alábbi (síkheli) tartományokat.

a) az origó középpontú, $a > 0$ sugarú zárt körlemez.

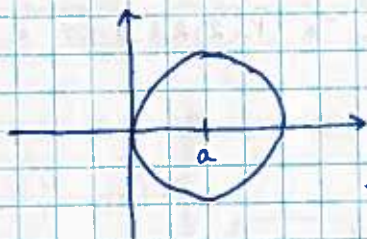
polar koordináták:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

descartes koordináták:

$$\begin{aligned} -R &\leq x \leq R \\ -\sqrt{R^2 - x^2} &\leq y \leq +\sqrt{R^2 - x^2} \end{aligned}$$

b) $(a, 0)$ középpontú, $a > 0$ sugarú zárt körlemez.



descartes:

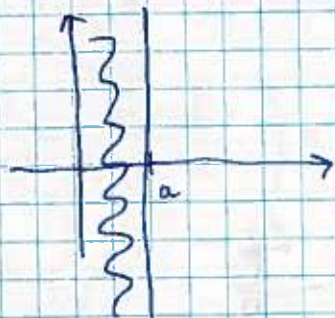
$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2a \\ -\sqrt{a^2 - (x-a)^2} &\leq y \leq \sqrt{a^2 - (x-a)^2} \end{aligned}$$

polar:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq r \leq 2a \cos \theta$$

c) y-tengellyel párhuzamos, tőle $a > 0$ távolságra haladó egyenes és az y-tengely közel eső zárt tartományok.



descartes: $0 \leq x \leq a$

$$-\infty \leq y \leq \infty$$

polar: $0 \leq r \leq \frac{a}{\cos \theta}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

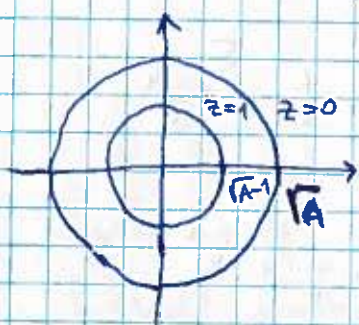
74) Legyen $A \in \mathbb{R}$ rögzített szám. "Ábrátoljuk" a köv. függvényt (grafikon vázlat, megnevezése, mintaszerű).
 $f(x, y) = A - x^2 - y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$z = A - x^2 - y^2$$

$$z = 0 \quad A - x^2 - y^2 = 0$$

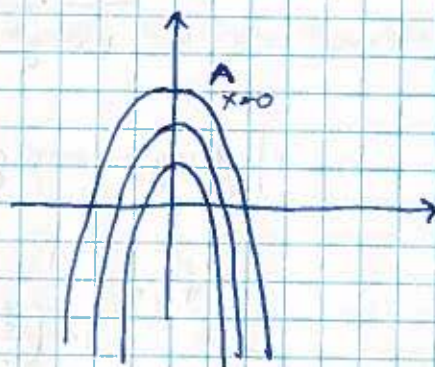
$$z = 1 \quad A - x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = (A-1)^2$$

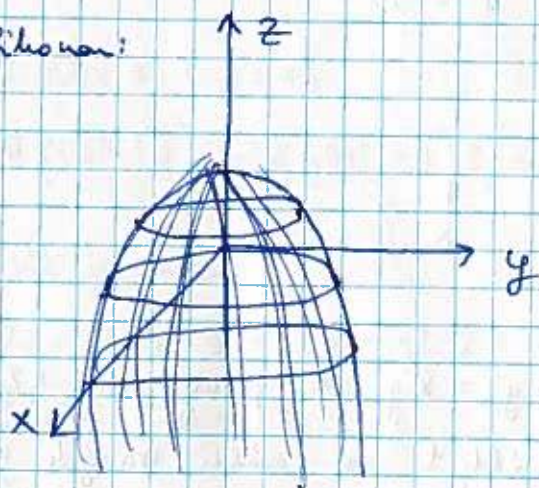


$$x = 0 \quad z = A - y^2$$

$$x = 1 \quad z = A - 1 - y^2$$



grafikonon:



75-77) Számítsuk ki az alábbi függvények
parciális deriváltjait.

a) $f(x,y) = \operatorname{tg}(3x - 5y)$

$$f'_x = \frac{1}{\cos^2(3x - 5y)} \cdot 3$$

$$f'_y = \frac{1}{\cos^2(3x - 5y)} \cdot (-5)$$

b) $f(x,y) = \ln \sqrt{x^7 y^4}$

$$f'_x = \frac{1}{\sqrt{x^7 y^4}} \cdot \frac{7}{2} \cdot x^{\frac{5}{2}} y^4$$

$$f'_y = \frac{1}{\sqrt{x^7 y^4}} \cdot \frac{4}{2} \cdot y \cdot x^{\frac{7}{2}}$$

c) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$f'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot y \cdot (-1) \cdot x^{-2}$$

$$f'_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

78-80) Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3 y^2$ függvény $P(-1,2)$

pontbeli iránymenti deriváltját az alábbi irányok mentén.

a) $v = (4, -3)$

$$v_0 = \frac{(4, -3)}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5} \cdot (4, -3)$$

$$\nabla f(x,y) = (f'_x, f'_y) = (3x^2 y^2, 2x^3 y) = (3(-1)^2 \cdot 2^2, 2(-1)^3 \cdot 2^2) = (12, -4)$$

$$D_v f(-1,2) = \langle (12, -4), \frac{1}{5}(4, -3) \rangle = \frac{48}{5} + \frac{12}{5} = 12$$

$$\langle \nabla f, v_0 \rangle$$

$$b) \alpha = 120^\circ$$

$$r = (\cos 120, \sin 120) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$D_v f(-1, 2) = \langle (12, -4), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rangle = -6 - 2\sqrt{3}$$

c) Az $A(1, 2)$ pontból a $B(2, 5)$ pontba mutató vektor

$$v = (1, 3) \rightarrow \text{vektor - kezdőpont}$$

$$\frac{(1, 3)}{\sqrt{1^2 + 3^2}}$$

81) Írjuk fel az $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ függvénynek ~~értékét~~ grafikonján a $P_0 = (1, 2)$ pontban húzott érintőnek egyenletét.

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 \quad P_0 = (1, 2)$$

$$f'_x = 2x \quad ; \quad f'_y = 6y$$

$$f(P_0) = 1 + 3 \cdot 4 = 13$$

$$\nabla f(P_0) = (f'_x(P_0), f'_y(P_0), -1) = (2, 12, -1)$$

a sík egyenlete:

$$2x + 12y - z = 2 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + (-1) \cdot 13$$

$$2x + 12y - z = 13$$

82-83) Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékét.

a) $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$

$$f'_x = 2x - 4y \rightarrow 2x - 4y = 0$$

$$f'_y = -4x + 3y^2 + 4$$

$$\begin{aligned} 2x &= 4y \\ x &= \frac{4y}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$-4 \cdot \left(\frac{4y}{2}\right) + 3y^2 + 4 = 0$$

$$\frac{+8 \pm \sqrt{8^2 - 48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} 2 = y_1 \\ \frac{2}{3} = y_2 \end{cases}$$

$$-8y + 3y^2 + 4 = 0$$

$$f''_{xx} = 2$$

$$f''_{xy} = -4$$

$$f''_{yy} = 6y$$

$$f''_{yx} = -4$$

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y_1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(H) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8 > 0$$

mivel a $\det \rightarrow 0$ ezért van szélső érték.

és mivel a $\det$ határozó elme pozitív ezért lok. min.

Vegyük észre: ha a $\det = 0$ akkor nem lehet eldönteni

ha a $\det < 0$ akkor nyereség pont van $\rightarrow$ nincs szélső érték.

ha a $\det > 0$ van szélső érték $\rightarrow$ határozó elme $\rightarrow$ lok. min

határozó elme $\rightarrow$ lok. max

$$H_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y_2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(H_2) = 8 - 16 < 0$$

$\rightarrow$ nyereség pont, nincs szélső érték.

$$f) f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$$

$$f'_x = 3x^2 + 3y$$

$$\rightarrow x^2 + y = 0$$

$$f'_y = 3y^2 + 3x$$

$$(-y^2)^2 y = 0$$

$$x + y^2 = 0$$

$$y^4 + y = 0$$

$$x = -y^2$$

$$y(y^3 + 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -1$$

$$y_1 = 0$$

$$y^3 + 1 = 0$$

$$y^3 = -1$$

$$y_2 = -1$$

$$f''_{xx} = 6x$$

$$f''_{xy} = 3$$

$$f''_{yy} = 6y$$

$$f''_{yx} = 3$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{bmatrix} \rightarrow \det(H_1) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \det < 0$$

vezetési pont

$$H_2 = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \det(H_2) = 27 > 0$$

lok. szélsőérték van.

mind a lok. szélső elem negatív ezért lok. max.

84-85) Deriválja az alábbi ~~eseteket~~ $y = f(x)$ implicit függvényeket.

$$a) xy^2 + 3x^2y - 5x = 0$$

$$y^2 + x \cdot 2y \cdot y' + 3 \cdot 2x \cdot y + 3x^2 \cdot y' - 5 = 0$$

$$y^2 + y'(2xy + 3x^2) + 6xy - 5 = 0$$

$$y'(2xy + 3x^2) = 5 - 6xy - y^2$$

$$y' = \frac{5 - 6xy - y^2}{2xy + 3x^2}$$

$$b) (y+1) \sin(xy^2) = 0$$

$$y \cdot \sin(xy^2) + (y+1) \cdot \cos(xy^2) \cdot (y^2 + x \cdot 2y \cdot y)$$

$$y(\sin(xy^2) + (y+1) \cdot \cos(xy^2) \cdot (x \cdot 2y)) + (y+1) \cdot \cos(xy^2) \cdot (y^2) = 0$$

$$y(\sin(xy^2) + (y+1) \cdot \cos(xy^2) \cdot (x \cdot 2y)) = -(y+1) \cdot \cos(xy^2) \cdot y^2$$

$$y = \frac{-(y+1) \cdot \cos(xy^2) \cdot y^2}{(\sin(xy^2) + (y+1) \cdot \cos(xy^2) \cdot (x \cdot 2y))}$$

86) Írja fel a gömbi polárkoordináták segítségével

az origó középpontú egységgömb felső felületének és felét.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$x = r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

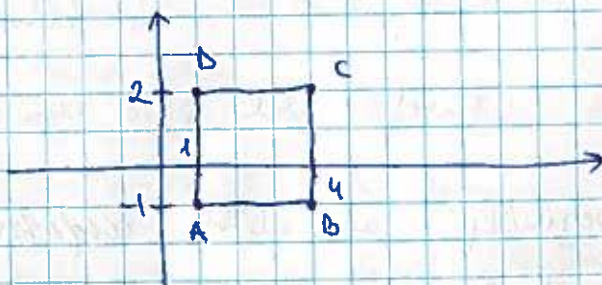
$$\varphi = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$z = \cos \varphi \cdot r$$

87) Egy R négyzet tartomány csúcsai: $A(1; -1)$, $B(4; 1)$, $C(4; 2)$, $D(1; 2)$

Határozza meg az alábbi integrált:

$$\iint_R xy^2 + 3x^2y \, d(x,y) = ?$$



$$\int_1^4 \int_{-1}^2 xy^2 + 3x^2y \, dy \, dx = \int_1^4 \left[\frac{xy^3}{3} + \frac{3x^2y^2}{2} \right]_{-1}^2 dx = \int_1^4 \left[\left(\frac{x \cdot 2^3}{3} + \frac{3x^2 \cdot 2^2}{2} \right) - \left(\frac{x \cdot (-1)^3}{3} + \frac{3x^2 \cdot (-1)^2}{2} \right) \right] dx$$

$$= \int_1^4 \left(3x + \frac{9}{2}x^2 \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \left[\left(\frac{3 \cdot 4^2}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{4^3}{3} \right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \right] = 117$$

88) Legyen S az origó köréppontú egyrészgömb.

$$\iiint_S 1 \, d(x, y, z) = ?$$

$$0 < r < 1$$

$$0 < \theta < 2\pi$$

$$0 < \varphi < \pi$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr = \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \cdot \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot [-\cos \varphi]_0^\pi = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi}{3}$$

89) Legyen $f(x)$ az egyrészgömbön fv, azaz, Mennyi a Laplace transzformáltja?

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$e^0 = 1; e^\infty = \infty; e^{-\infty} = 0$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} \, dt$$

$$F(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} \, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s}$$

90. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \text{Mennyi a Laplace transzformáltja?}$$

$$\int_0^\infty t \cdot e^{-st} \, dt = t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} \, dt = 0 - \left[\frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

$$f' = 1 \quad g = \frac{e^{-st}}{-s}$$

91) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ Mennyi a Laplace transzformált?

$$\int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{t(-s+a)} dt = \int_0^{\infty} e^{t(-s+a)} dt =$$

$$= \left[\frac{e^{t(-s+a)}}{-s+a} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{(-s+a)} = \frac{1}{s+a}$$

92) Írja fel az $y'' + y = 0$ differenciál egyenlet által megoldható

homogén polinom:

$$s^2 + 1 = 0$$

$$s = \pm \sqrt{-1} = \pm i$$

$$y = A_1 \cdot e^{ix} + A_2 \cdot e^{-ix}$$

93) Írja fel az $y'' + y = 0$ differenciálegyenletnek az

$y(0) = 1, y'(0) = 2$ kezdeti értékek

ha $y(0) = 1$

$$y = A_1 e^{i \cdot 0} + A_2 e^{-i \cdot 0} = 1$$

$$A_1 + A_2 = 1$$

$$A_1 = 1 - A_2$$

$$y' = A_1 \cdot e^{i \cdot 0} \cdot i + A_2 \cdot e^{-i \cdot 0} \cdot (-i) = 2$$

$$A_1 i + A_2 (-i) = 2$$

$$(1 - A_2) \cdot i + A_2 \cdot (-i) = 2$$

$$-2A_2 i = 2 - i$$

$$A_2 = \frac{2-i}{-2i} = \frac{2+i}{2i}$$

94-95) Írja fel az $y'' - y = 0$ differenciálegyenletnek az ált. megoldását,
ill. az $y(0) = 1$, $y(\pi) = 2$ paraméterekhez tartozó megoldását.

a) homogén polinom: $\lambda^2 - 1 = 0$
 $\lambda = \pm 1$

ált. mo: $y = A_1 e^x + A_2 e^{-x}$

b) $y(0) = 1$; $y(\pi) = 2 \rightarrow A_1 e^0 + A_2 e^{-0} = 2$

$\downarrow$
 $y = A_1 + A_2 = 2$

$(1 - A_2) e^{\pi} + A_2 e^{-\pi} = 2$

$e^{\pi} - A_2 e^{\pi} + A_2 e^{-\pi} = 2$

$A_2 (-e^{\pi} + e^{-\pi}) = 2 - e^{\pi}$

$A_1 = 1 - A_2$

$A_2 = \frac{2 - e^{\pi}}{-e^{\pi} + e^{-\pi}}$

$A_1 = 1 - \frac{2 - e^{\pi}}{-e^{\pi} + e^{-\pi}} = \frac{-2 + e^{-\pi}}{-e^{\pi} + e^{-\pi}}$

96-97) Írja fel a következő függvények komplex
kanonikus alakját.

a) $f(z) = \frac{1}{z}$

$f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} - i \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$

b) $f(z) = z^2$

$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + i^2 y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 + 2xyi =$

$= \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \underbrace{2xy}_{v(x,y)}$

98) Határozza meg az $u(x,y) = e^x \cos y$ függvény harmonikus társát.

$$u'_x = v'_y$$

$$u'_y = -v'_x$$

$$u'_x = e^x \cdot \cos y \rightarrow \int e^x \cos y \, dy = e^x \cdot \sin y = v(x,y)$$

$$f(z) = e^x \cdot \cos y + i \cdot e^x \cdot \sin y$$

99) Legyen L a komplex síkban az $a \in \mathbb{C}$ körüli r sugarú kör. Tekintjük az $f(z) = (z-a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$ komplex fv.-t. Határozza meg az

$$\oint_L (z-a)^n \, dz$$

vonalintegrál értékét.

$$z(t) = a + r \cdot e^{it} \quad z'(t) = r \cdot i \cdot e^{it}$$

$$\int_0^{2\pi} (a + r \cdot e^{it} - a)^n \cdot r \cdot i \cdot e^{it} \, dt = \int_0^{2\pi} (r \cdot e^{it})^n \cdot r \cdot i \cdot e^{it} \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} r^{n+1} \cdot i \cdot e^{i(n+1)t} \, dt$$

ha $n \neq -1$ (akkor e^0)

$$\int_0^{2\pi} ~~r^{n+1}~~ \cdot i \, dt = ~~r^{n+1}~~ \cdot \underline{\underline{-i \cdot 2\pi}}$$

ha $n \neq -1$

$$\int_0^{2\pi} r^{n+1} \cdot i \cdot e^{i(n+1)t} \, dt = r^{n+1} \cdot i \left(\int_0^{2\pi} \cos((n+1)t) \, dt + i \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t) \, dt \right) = 0$$

$$\oint (z-a)^n \, dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{ha } n = -1 \\ 0, & \text{ha } n \neq -1 \end{cases}$$