

1.) *Egy-faj mátrix-modellek*

Biológia és mögöttes matematika: Fibonacci, Leslie, korfa, utódok átlagos száma, az $R \leq 1 \Leftrightarrow r \leq 1$ tulajdonság, bolyongási játékpélda valószínűségi egérrel, pozitív mátrixok Perron–Frobenius tulajdonságai

2.) *Az $u_t = u_{xx}$ diffúziós egyenlet és általánosításai*

Fizikai modell és mögöttes matematika: az egyenlet levezetése mikroszkopikus (Brown-mozgás, bolyongás 1D-ben, skálázás) illetve makroszkopikus (hővezetés, hőenergia-mérleg adott térrészben — diffúzió, anyagmérleg adott térrészben) megfontolások segítségével, diffúzió–advekció–reakció egyenlet, diffúzió–kemotaxis–reakció egyenletrendszer, kezdeti- és peremfeltételek¹, kapcsolat Gauss-görbék egy családjával, maximum-elv, numerikus megfontolások

3.) *Analitikus módszerek közönséges differenciálegyenletek vizsgálatára*

Linearizálás és lokális fázisportré egyensúlyi helyzetek körül. Elemi következtetések a vektormező valamint Ljapunov függvények alapján. A fázisportré változása a paraméterek változtatásának tükrében: jellegzetes $\mu \leq 0$ bifurkációs ($\dot{x} = \mu - x^2$, $\dot{y} = -y$ nyereg-csomó), ($\dot{r} = \mu r - r^3$, $\dot{\varphi} = -1$ Hopf) ábrák. Stabilitás és vonzás, egyensúlyi helyzet és periodikus pályák. Numerikus megfontolások. A 2D eset specialitásai, omega-határhalmazok a síkon. Lotka és Volterra két-faj modelljei

4.) *Példák hálózatokon értelmezett dinamikára*

a.) az évenkénti adóbevallások $x_{i,t+1} = F(\bar{x}_{i,t})$ átlagolós modellje, elégséges feltétel globálisan aszimptotikusan stabil homogén fixpont létezésére, matematikai részletekkel

b.) a véletlen gráfok Erdős–Rényi, Strogatz–Watts, Barabási–Albert féle típusai², néhány mondat a járványterjedésről

c.) további modellek, négyzetrácsokon is³

5.) *Adott gén térbeli terjedése*

Biológia és matematika együtt: a Fischer féle $u_t = u(1 - u) + u_{xx}$ parciális egyenlet levezetése. Utazó hullám mint speciális alakú megoldás differenciálegyenlete és annak $U(-\infty) = 1$, $U(\infty) = V(-\infty) = V(\infty) = 0$ megoldásai a hullámsebesség $c \geq 2$ értékeire. Az itt és most szükséges fázisportré analízis. A $c = 2$ sebességhez tartozó stabil utazó hullám

¹aki jelest szeretne, az nézze át az $u_t = u_{xx}$ egyenletre vonatkozó 1D kezdetiérték-probléma megoldását a $[0, \pi]$ intervallumon is, ez utóbbi esetben az $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ illetve az $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$ peremfeltétel mellett (azaz a segédlet negyedik oldalának alján kezdődő és az ötödik oldalának tetején végződő *Megjegyzés*-t — ez tulajdonképpen a változók szétválasztása más néven Fourier módszer, ami vektoros alakban a mintázatképződés Turing-féle modelljében is megjelenik)

²a jeles osztályzatért a segédlet harmincharmadik oldalának alján szereplő függvényegyenletet is kérem

³amelyeket a gyakorlatokról vagy, a jeles osztályzatért, más tantárgyakból ismer, informatív jelleggel, a finomabb részletek nélkül

6.) *A mintázatképződés Turing-féle modellje*

A Turing által alkalmazott biológiai-kémiai heurisztika. A Turing féle parciális egyenletrendszer matematikai kezelése és az azt megalapozó Fourier módszer az $u_t = u_{xx}$, $u(0, x) = g(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ kezdetiérték-probléma megoldására az $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$, $t \geq 0$ homogén Neumann peremfeltétel mellett

7.) *Idegi ingerületvezetés: Hodgkin-Huxley alapmodell*

Biológia: Hodgkin és Huxley (1952) kísérletei a tintahal óriás-idegrostjával. Ionáramlás az idegrost-sejthártyán át és ami hajtja. Biológia és matematika együtt: az ekvivalens áramköri modell és egyenletrendszer. Ingerküszöb és regenerációs időküszöb. Az akciós potenciál mint ingerületre adott válasz és a hozzátartozó "V", "Na-pumpa, K-pumpa", "h, m, n" ábrák. Utazó hullám az idegrostban és a teljes (egy parciális és három közönséges differenciálegyenletet tartalmazó) Hodgkin-Huxley egyenletrendszerben

8.) *Relaxációs oszcillációk és a Nagumo-Fitzhugh egyenletrendszer*

Az ingerküszöb és az akciós potenciál mint valóságos viselkedés megjelenése az

$$\dot{x} = c(y + x - \frac{x^3}{3} + I) \quad , \quad \dot{y} = \frac{1}{c}(a - x - by)$$

($b < 1$, $1 \ll c$) Nagumo-Fitzhugh egyenletrendszerben. A periodikus pálya keletkezésének kétféle mechanizmusa, "kicsiben = lokálisan" és "nem-lokálisan = nagyban". Az itt és most szükséges fázisportré analízis.

Mindenki két tételt húz a vizsgán: az egyiket szabad előadás, a másikat párbeszéd formában kérem. Általában véve nagyon örülök annak, ha a vizsgázó arra is utal, amit a gyakorlatokon látott, valamint az egyes témákról a többi tantárgyban tanult. A tételes vizsgaanyag az, ami az előadáson szerepelt. A vizsgába a félévközi házi feladatok valamint a zárthelyi eredménye is beszámít. A 6-os és a 8-as tételt csak kicsit elnagyolva tudtam elmondani, a jelenleg 41 oldalas segédletet tovább fogom írni illetve rajzolni ezekbe az irányokba.

KONZULTÁCIÓ A VIZSGÁK ELŐTT, IDŐPONTOK MEGADÁSA KÉSŐBB.

A két hivatalos vizsgaidőpont június 2 és 16, mindkét alkalommal pénteki nap. A vizsga helye a 333-as szoba (a NEPTUN rendszer még mindig a régi szobám helyét tünteti fel).

Jó tanulást és jó kedvet is hozzá!

Garay Barna