

## DinModBiol 17/4/25: újra a ZH feladatok, most kis segítséggel

1.) Az  $\dot{x} = x(1 - 2x - y)$ ,  $\dot{y} = y(3 - 2y - x)$  ökoszisztéma  $Q = (0, \frac{3}{2})$  egyensúlyi helyzete a pozitív ortánsra (magyarul: az első síknegyed belsejére) nézve globálisan stabil. Igazolja ezt a kijelentést! *Segítség:* Rajzolja meg a két egyenes grafikonját (az egyensúlyi helyzetekkel együtt), majd a pozitív ortáns belsejében tegye rá az egyenesekre a függőleges illetve a vízszintes vektormezőt! Mivel a végtelen távoli pont taszít (miből is látszik ez?), ez már elegendő dinamikai kényszer a trajektóriák viselkedésére.

2.) Az  $\dot{x} = x(4 - 2x + y)$ ,  $\dot{y} = y(5 - y + x)$  és az  $\dot{x} = x(5 - x + y)$ ,  $\dot{y} = y(4 - y + 2x)$  Lotka–Volterra típusú differenciálegyenlet–rendszerek közül melyik modellez tartósan fennálló szimbióta ökoszisztémát? *Segítség:* Ehhez aszimptotikusan stabil belső egyensúlyi helyzet létezése szükséges. Segít, ha a kérdéses szakaszokra rárajzolja a függőleges illetve a vízszintes vektormezőt.

3.) A  $\dot{x} = x(1 - \frac{x}{K} - \gamma y)$ ,  $\dot{y} = y(3 - 2y - x)$  rendszerben a  $K$  és a  $\gamma$  paraméterek mely értékei mellett "kényszeríti ki" az első faj a második faj teljes kipusztulását? *Segítség:* Belső egyensúlyi helyzet híján csak az számít, hogy a két egyenes pozitív síknegyedbe eső részei közül melyik van a másik felett. Az 1.) feladat módszere most is működik: de a függőleges és a vízszintes vektormezők valamint az  $x$  és az  $y$  tengelyek szerepe ellentétessé vált.

4.) A.) Eldönthető-e az  $\dot{x} = y - x^3$ ,  $\dot{y} = -x + 2x^2y - y^3$  egyenletrendszer origójának stabilitása linearizálással? B.) És a  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  segédfüggvény rendszer szerinti deriváltjának előjele révén?<sup>1</sup> Kell-e valami másra is hivatkozni ehhez? C.) Globálisan aszimptotikusan stabil-e az origó? *Segítség:* Az A kérdésre nemleges a válasz: a linearizált rendszer az  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -x$  centrum. A  $V$  függvény (E) rendszer szerinti deriváltja  $\dot{V}_{(E)}(x) = x\dot{x} + y\dot{y} = x(y - x^3) + y(-x + 2x^2y - y^3) = -(x^2 - y^2)^2 \leq 0$ . Ez jónak tűnik, de mit is jelent? Azt jelenti, hogy a trajektóriák a  $V$  függvény szintvonalait, tehát az origó középpontú  $r > 0$  sugarú körvonalakat az adott körvonalon lévő  $x = y$  és az  $x = -y$  négy pontpár kivételével mindenütt transzverzálisan befelé metszik. A befelé haladás a körvonal többi pontjára is igaz, leszámítva az eredeti differenciálegyenlet–rendszer egyensúlyi helyzetét, amelyek a  $-x + 2x^5 - x^9 = 0$  egyenlet megoldásából jönnek: az  $(1, 1)$  és a  $(-1, -1)$  pontokat, amelyek az  $r = \sqrt{2}$  szintvonalhoz tartoznak.

<sup>1</sup>A  $V$  függvény (E) differenciálegyenlet szerinti deriváltját Ljapunov híres  $\dot{V}_{(E)}(x, y) = (\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)))|_{t=0}$  képlete definiálja. Igaz, hogy  $\dot{V}_{(E)}(x) = \langle \text{grad}V(x), f(x) \rangle$  — mik itt a jelölések? Mi itt a differenciálegyenlet? Honnan hová képeznek az egyes függvények?

Az origó aszimptotikus stabilitása tehát semmi esetre sem lehet globális. Az origó annak a két trajektóriának a pontjait sem vonzza, amelyek a végtelen távoli pontból indulva a két "extra" egyensúlyi helyzet egyikéhez tartanak.

5.) A.) Eldönthető-e az  $\dot{x} = x^3 + y^3$ ,  $\dot{y} = -x^3 + y^3$  egyenletrendszer origójának stabilitása linearizálással? B.) És a  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  segédfüggvény révén? (Igazolja, hogy magát az origót leszámítva minden trajektória a végtelen távoli ponthoz tart!) C.) Igazolja, hogy az  $\dot{x} = -x^3 - y^3$ ,  $\dot{y} = x^3 - y^3$  egyenletrendszer origója globálisan aszimptotikusan stabil!  
*Segítség:* Az A kérdésre nemleges a válasz. A B kérdésre igenlő, hiszen  $\dot{V}_{(E)}(x) = x\dot{x} + y\dot{y} = x(x^3 + y^3) + y(-x^3 + y^3) = x^4(1 + c^3 - c + c^4) > 0$ , amint az a  $0 < c = \frac{y}{x} < \infty$  paraméter szerinti  $c \lesseqgtr 1$  esetszétválasztásokkal adódik. A C kérdés megválaszolása a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenségen múlik (arra is figyelve, hogy mikor lesz a számtani és a mértani közép egymással egyenlő).

6.) A.) Eldönthető-e az  $\dot{x} = y - x^3 + xy^2$ ,  $\dot{y} = -x + x^2y - 3y^3 + y^5$  egyenletrendszer origójának stabilitása linearizálással? B.) És a  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  segédfüggvény révén? (Adjon meg olyan origó centrumú körlemez, amely része az origó vonzási tartományának!) C.) Globálisan aszimptotikusan stabil-e az origó? (Adjon meg olyan félsíkot, amelynek pontjaiból indulva a trajektóriák a végtelen távoli ponthoz tartanak!) *Segítség:* Az A kérdésre nemleges a válasz, a B kérdésre igenlő, s a C kérdéshez is elég a Ljapunov féle szintvonalak és a trajektóriák transzverzális metszései gondolni. A C kérdéshez tartozó félsík kiválasztásában a  $\dot{y} = -x + x^2y - 3y^3 + y^5$  egyenlet  $y^5$  vezértagjának jut a főszerep. Hogyan van az, hogy ezt a főszerepet a  $-x + x^2y - 3y^3$  kifejezés tagjai együttesen sem képesek közönbösíteni?

7.) A.) Rajzolja meg a fázisportrét az  $\dot{x} = 2xy$ ,  $\dot{y} = x^2 - 1$  differenciálegyenlet egyensúlyi helyzetei körül! B.) Egészítse ki ezt a két kicsiny ábrát a teljes síkon vett fázisportrévá! Segít, ha a először a szimmetria-viszonyokat tisztázza! *Segítség:* Ahogy lehet alapon, ahogyan a dinamika geometriája sugallja. Az első részfeladat annak igazolása, hogy az  $y$  tengely egyetlen, függőlegesen lefelé haladó trajektória pontjaiból áll. A többihez a két (a szimmetria miatt valójában csak egy) egyensúlyi helyzet körüli linearizálás és az  $\dot{x} \lesseqgtr 0$ ,  $\dot{y} \lesseqgtr 0$  egyenlőtlenségek elegendőek.

8.) A.) Ábrázolja az  $\dot{x} = \mu x - x^3$  differenciálegyenlet fázisportréját a  $\mu \in \mathbb{R}$  bifurkációs paraméter  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\mu > 0$  értékeire! B.) Ha ez megvan, akkor ugyanez a feladat még háromszor egymás után, rendre az  $\dot{x} = -\mu x - x^3$ ,  $\dot{x} = \mu x + x^3$ ,  $\dot{x} = -\mu x + x^3$  egyenletekre. *Segítség:* A Hopf bifurkáció négy, egymással tükrös szimmetriában lévő alapesetéről van szó. A feladat négyszer három ábra elkészítése.

9.) Legyen  $\mu = 1 - \varepsilon$ , ahol  $\varepsilon$  rögzített és nagyon kicsiny pozitív szám<sup>2</sup>. A.) Rajzolja fel az  $\dot{x} = -xy$ ,  $\dot{y} = x^2 - y - 1 + \mu(y - y^3)$  differenciálegyenlet-rendszer fázisportréját — először csak az egyensúlyi helyzetek körül, majd a lehetőség szerinti minél teljesebb fázisportrét! B.) Most legyen  $\mu = 1 + \varepsilon$ , ahol  $0 < \varepsilon \ll 1$  és ebben az esetben is rajzolja fel az  $\dot{x} = -xy$ ,  $\dot{y} = x^2 - y - 1 + \mu(y - y^3)$  differenciálegyenlet-rendszer fázisportréját! C.) Fogalmazza meg a köznyelv szavaival, mi a kapcsolat a két fázisportré között, ha a  $\mu$  paramétert folytonosan növekvő módon, tehát a  $\mu = 1 - \varepsilon$  értéktől a  $\mu = 1 + \varepsilon$  értékig haladva változtatjuk! *Segítség:* Ez kicsit hosszadalmas, de a végén lévő csattanót (mihez is tartanak a separatrix trajektóriák?) leszámítva, csupán a jegyzőkönyvi módszerek alkalmazását igényli, paraméter ide vagy oda.

10.) A.) Az  $a \in \mathbb{R}$  paraméter mely értékeire lesz az (E)  $\dot{x} = ax + y$ ,  $\dot{y} = (2 + 6a)x - 5y$  differenciálegyenlet origója aszimptotikusan stabil? B.) Keressen ezekre az  $a$  értékekre olyan  $V(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$  alakú Ljapunov függvényt, amelyre  $\dot{V}_{(E)}(x, y) = -x^2 - y^2$ ! *Segítség:* A jegyzőkönyvi módszerek — nyom-determináns diagram (az egyetlen egyensúlyi helyzet körüli linearizálásra szerencsére nincs szükség), az együttható összehasonlításból adódó lineáris egyenletrendszer megoldása az  $\alpha, \beta, \gamma$  változókra, az  $a$  paraméter függvényében — elegendőek.

11.) Ismeretes, hogy instabil  $\Leftrightarrow$  "nem stabil". A.) Fogalmazza meg egyensúlyi helyzet instabilitásának definícióját az  $\varepsilon$  és a  $\delta$  segítségével! B.) Ugyanez a feladat az aszimptotikus stabilitás fogalmának tagadására. C.) Mindez inkább logika, mint differenciálegyenletek: de azért rajzolja is le, pontosabban készítsen az absztrakt tartalmat jól szemléltető ábrákat! *Segítség:* Az egyensúlyi helyzet stabilitásának és vonzási tulajdonságának  $\varepsilon, \delta, \eta_0 > 0$  paramétereket tartalmazó szokásos definícióira kell az elsőrendű logika általános tagadási szabályát alkalmazni. Ez rajzban is lehetséges, sőt roppant szemléletes is. A sorrend, ahogyan a rajz egyes részei elkészülnek, alapvető fontosságú (csakúgy, mint a folytonosság definíciójának szemléltetésében). A feladat teljes megoldásához a vonatkozó ábrák is hozzátartoznak.

12.) Tekintse az

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}$$

differenciálegyenlet-rendszert, majd — a  $p$  paraméter szerinti jól-meghatározott egyes esetekben — írja fel az általános megoldást<sup>3</sup> és rajzolja meg a fázis-

<sup>2</sup>azaz legyen  $0 < \varepsilon \ll 1$

<sup>3</sup>ez nem nehéz: természetesen a középső egyenlettel külön kell foglalkozni, majd a maradék két egyenlettel már együtt

portrét is! *Segítség:* A  $3 \times 3$  mátrix szétbomlik egy  $2 \times 2$  és egy  $1 \times 1$ , egymástól független feladatra. Minden további csupán a jegyzőkönyvi mód-szerek alkalmazását igényli. A szokatlanság a feladatban csak annyi, hogy a 3D ábrában az  $x$  és a  $z$  tengelyek által kifeszített altéren kell először min-dent elrendezni, majd az  $y$  tengelyen (a  $p \lesseqgtr 0$  paraméter szerinti hármas esetszétválasztásnak megfelelően) kell az 1D ábrát elkészíteni, s ez után a 3D “szorzat-ábra” már magától adja magát.

13.) Közvetlen visszahelyettesítéssel igazolja, hogy az  $x(t) = 4 \arctan(e^t) - \pi$  (ahol  $t \in \mathbb{R}$ ) függvény megoldása az  $\ddot{x} + \sin(x) = 0$  differenciálegyenlet-nek, majd a  $t \rightarrow \pm\infty$  határátmenet segítségével vázolja a kérdéses megoldás görbét az  $(x, \dot{x})$  síkon! *Segítség:* A feladatban a fizikai inga/hajóhinta egyenletének egy konkrét alakban, elemi függvények segítségével felírható megoldásáról van szó.<sup>4</sup> A  $t \rightarrow \pm\infty$  határátmenet mutatja, hogy egy nagyon karakterisztikus megoldást lehet az  $x(t) = 4 \arctan(e^t) - \pi$  (ahol  $t \in \mathbb{R}$ ) alak-ban felírni. S hogy ez valóban megoldás, az közvetlen visszahelyettesítéssel jön ki. Ezt a megoldást már sokszor láttuk, sokszor rajzoltuk. Akkor járunk el helyesen, ha a konkrét számolásokat “gazdaságosan”, jól szerkesztett és jól szervezett módon végezzük el. Először az  $\ddot{x}(t)$  kétszeres deriváltat szá-moljuk ki. A  $\sin(x(t))$  kiszámítása a nehezebb, mert itt jól kell a felhasznált trigonometrikus azonosságokat kiválasztani, ha azt akarjuk, hogy képletünk ne egyre bonyolultabb, hanem egyre egyszerűbb legyen. A  $\ddot{x}(t)$  előzetes ismerete ehhez orientációs segítséget adhat.

14.) Legyen  $u(t, x) = (1 + e^{(x-ct)d})^{-2}$ , ahol  $c = \frac{5}{\sqrt{6}}$ ,  $d = \frac{1}{\sqrt{6}}$ . Igazolja, hogy a fenti képlettel definiált  $u(t, x)$  (ahol  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ) függvény megoldása az  $u_t = u_{xx} + u(1 - u)$  Fisher-egyenletnek. Igaz, hogy a fenti képlet utazó hullámot definiál?<sup>5</sup> *Segítség:* Ez is “csupán” egy konkrét szá-molás, de amelyet “gazdaságosan”, jól szerkesztett és jól szervezett módon kell elvégeznünk. A  $c$  és a  $d$  jelölések bevezetésével is már ezt készítettük elő. Ami az igazán hatékony, érdemes bevezetnünk egy konkrét jelölést az  $e^{(x-ct)d}$  kifejezésre, lehet ez például az  $X = e^{(x-ct)d}$  formula, amelynek par-ciális deriváltjait is jó külön feljegyeznünk.

‘The more good solutions, the better the mark.’

<sup>4</sup>Az általános megoldás nem írható fel, mint a  $t$  időváltozó elemi függvényeivel paraméterezett görbe. Szerencsére az  $\frac{1}{2} \dot{x}^2 + (1 - \cos(x)) = \text{const}$  (energia)szintvonalak zárt alakban is, kizárólag elemi függvényeket használva is megadhatók.

<sup>5</sup>Érdekes megjegyeznünk, hogy a Fisher-egyenletnek (a természetes szimmetriáktól eltekintve) ez az egyetlen olyan utazó hullám megoldása, amely elemi függvények segít-ségével zárt alakban is felírható — nem titok, mi van emögött: a polinomok gyökeire vonatkozó Galois-elmélet közönséges differenciálegyenletekre történő kiterjesztése.