Nem lineáris dinamikai modellek a biológiában

1. tétel – Egy-faj mátrix-modellek

- Fibonacci
- Leslie
- korfa

- utódok átlagos száma
- $R \lessgtr 1 \Leftrightarrow r \lessgtr 1$ tulajdonság
- bolyongás
- pozitív mátrixok Perron-Frobenius tulajdonságai

Nemnegatív mátrixok hatványozásra vezető feladatok:

PERRON–FROBENIUS TÉTEL: Legyen $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ nemnegatív, primitív mátrix. (*Azaz ha az* $\mathbf{A}$ *mátrixnak alkalmas* k_0*–adik hatványa csupa pozitív elemet tartalmaz — vagy ami ezzel ekvivalens, ha az irányított átmenetgráf összefüggő és körei hosszának* LNKO*–ja egy. Konvenció:* $(\{i\} \to \{j\}) \in E(\mathcal{G}) \Leftrightarrow a_{ji} > 0$.) Ekkor $\lambda_1 = r > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Az $r > 0$ domináns sajátértékhez tartozó domináns sajátvektor jobbról $\mathbf{v} > \mathbf{0}$, balról $\mathbf{w}^T > \mathbf{0}^T$, a $\mathbf{w}^T\mathbf{v} = 1$ normálással. Továbbá

$$\frac{1}{r^k}\mathbf{A}^k \to \mathbf{v}\mathbf{w}^T \quad \text{ha} \quad k \to \infty \qquad \text{és a konvergencia rendje lényegében} \quad \frac{1}{r^k}\,|\lambda_2|^k\,.$$

Tanulságos gyakorló feladat: Legyen $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ 0–1 mátrix. A.) Igazolja, hogy $(A^k)_{i,j}$ az átmenetgráf j–edik csúcsából az i–edik csúcsba vezető k hosszúságú irányított utak száma. B.) Határozza meg a k_0 értékét 1.) az $\mathbf{A}$ mátrix első néhány hatványa révén illetve 2.) az $\mathbf{A}$ mátrixhoz rendelt átmenetgráf közvetlen vizsgálatával — ha $n = 4$ és $a_{11} = a_{14} = a_{21} = a_{32} = a_{43} = 1$ és a többi a_{ij} nulla.

λ_1 – legnagyobb sajátérték

$(i \to j) \in E(G) \Leftrightarrow a_{ij} > 0$

$r > 0$ – domináns sajátérték

FIBONACCI

PÉLDA 1. – FIBONACCI REKURZIÓ: Az $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ (n =1,2,...) másodrendű lineáris rekurziót felbontva az n–edik év ifjú és öreg nyúlpárjainak száma szerinti két elsőrendű, egymáshoz csatolt $i_{n+1} = o_n$, $o_{n+1} = i_n + o_n$ lineáris rekurzióra, amelyek együtt mátrixos alakban is felírhatók:

$$\begin{pmatrix} i_{n+1} \\ o_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{F}\begin{pmatrix} i_n \\ o_n \end{pmatrix}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} i_0 \\ o_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{kezdeti felt.}} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} i_k \\ o_k \end{pmatrix} = \mathbf{F}^k \begin{pmatrix} i_0 \\ o_0 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad f_k = i_k + o_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}\right), \quad \text{ahol} \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{az} \quad \mathbf{F} \quad \text{mátrix sajátértékei}.$$

PÉLDA 2. – STABIL KORFA AZ $\mathbf{L}$ LESLIE–MÁTRIXBÓL *négy korosztály esetén*, a $b_1, b_2, b_3 > 0$ születési/birth és az $s_1, s_2, s_3 > 0$ túlélési/survival rátákkal (amikor szintén teljesülnek a Perron–Frobenius tétel feltételei)

Tfh: megoldás $\lambda^n \cdot \underline{v}$ alakú

$\lambda^{n+1} \cdot \underline{v} = \underline{\underline{F}} \cdot \lambda^n \cdot \underline{v} \longrightarrow \lambda \cdot \underline{v} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{v}$

$\det(\underline{\underline{F}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$r = \lambda_1 > \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

alap mo.: $\lambda_1^n \cdot \underline{x}_1$, $\lambda_2^n \cdot \underline{x}_2$

↓

áll. mo.:

$c_1 \lambda_1^n \cdot \underline{x}_1 + c_2 \lambda_2^n \underline{x}_2$

kezdeti felt:

$\underline{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Példa 2. – stabil korfa az $\mathbf{L}$ Leslie–mátrixból *négy korosztály esetén*, a $b_1, b_2, b_3 > 0$ születési/birth és az $s_1, s_2, s_3 > 0$ túlélési/survival rátákkal (amikor szintén teljesülnek a Perron–Frobenius tétel feltételei)

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^k} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{pmatrix} = \frac{1}{r^k}\mathbf{L}^k\mathbf{x}^0 \to (\mathbf{v}\mathbf{w}^T)\mathbf{x}^0 = (\mathbf{w}^T\mathbf{x}^0)\mathbf{v} \quad \text{ha} \quad k \to \infty\,.$$

1 2 3 4 év

Korosztályos lineáris modell egy populáció időbeli mérésére

L^k — k. korosztályban mi lesz

r - legnagyobb sajátérték = λ_1

R - átlagos utódszám/egyed

$R>1 \Leftrightarrow r>1$ ⟶ népesség robbanás

$R=1 \Leftrightarrow r=1$ ⟶ stabil népesség

$R<1 \Leftrightarrow r<1$ ⟶ csökkenő népesség

$R = s_1 b_1 + s_1 s_2 b_2 + s_1 s_2 s_3 b_3$

korfa

piramis

harang

mikkas

urna

kopasó

A karakterisztikus polinom $p_4(\lambda) = \lambda^4 - b_1 s_1 \lambda^2 - b_2 s_1 s_2 \lambda - b_3 s_1 s_2 s_3$. Mivel $1 < r$ és $1 < R$ (ahol is $R = b_1 s_1 + b_2 s_1 s_2 + b_3 s_1 s_2 s_3$ az egyedenkénti utódok átlagos száma) jelentése egyarant a végtelenhez tartó túlnépesedés, pusztán a biológiai tartalom alapján $1 < r \Leftrightarrow 1 < R$. Hasonlóképpen, mivel mind az $r < 1$, mind az $R < 1$ egyenlőtlenség az aszimptotikus kihalás biológiai tényét fogalmazza meg: $r < 1 \Leftrightarrow R < 1$. Ugye a matematikai bizonyítás — amelyet szintén csak a 4×4 Leslie mátrixokra mutatunk be[4] — is mennyire szép? (És legalább utólag: mennyire egyszerű?)

Példa 3. – Amikor kevesebb igaz: *súlyozott permutáció–mátrix, avagy a cserebogarak/pajorok négy korosztálya*. Itt $b_1 = b_2 = 0$ valamint $b_3 s_1 s_2 s_3 = 1$, és a $p_4(\lambda) = \lambda^4 - 1$ polinom gyökei $\pm 1, \pm i$.

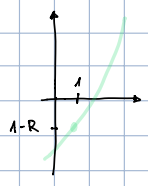
$\frac{L^k \cdot x_0}{r^k} \longrightarrow (v \cdot w^T) x_0 = (w^T x_0) v \qquad k \to \infty$

$r \neq R \rightarrow$ kihalás

$$L_{4\times4} = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_4(\lambda) = \lambda^4 - s_1 b_1 \lambda^2 - s_1 s_2 b_2 \lambda - s_1 s_2 s_3 b_3 \qquad P_4(1) = 1 - R$$

Bizonyítás

tfh. ha $R>1$ $\quad P_4(r)=0$ $\quad r$ a P_4 dominánsa gyöke



tfh $R<1$ $\quad \forall \lambda \geq 1$

$1 > s_1 b_1 + s_1 s_2 b_2 + s_1 s_2 s_3 b_3 \qquad / \cdot \lambda^4$

$\lambda^4 > s_1 b_1 \lambda^4 + s_1 s_2 b_2 \lambda^4 + s_1 s_2 s_3 b_3 \cdot \lambda^4$

$\lambda^4 > b_1 s_1 \lambda^2 + b_2 s_1 s_2 \lambda + b_3 s_1 s_2 s_3 \cdot b_0$ ($\lambda \geq 1$ csökkentjük a bal oldalt)

$P_4(\lambda) > 0$ ha $\lambda \geq 1$

$R < 1 \Rightarrow r < 1$

[4] *Az $r > 1 \Leftrightarrow R > 1$ (és az $r < 1 \Leftrightarrow R < 1$, valamint az $r = 1 \Leftrightarrow R = 1$) összefüggések bizonyítása*: A $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{L}$ mátrix determinánsának az első sor szerinti kifejtésével kapjuk, hogy az $\mathbf{L}$ mátrix p_4 karakterisztikus polinomja

$$p_4(\lambda) = \lambda^4 - b_1 s_1 \lambda^2 - b_2 s_1 s_2 \lambda - b_3 s_1 s_2 s_3$$

alakú, amelyből a $\lambda = 1$ választással $p_4(1) = 1 - R$ adódik.

Ha most $R > 1$, akkor $p_4(1) < 0$. De $p_4(\lambda) \to \infty$ ha $\lambda \to \infty$ miatt $p_4(\Omega) > 0$ ha $\Omega \in \mathbb{R}$ elegendően nagy. Igy a Bolzano tétel alkalmazható az $[1, \Omega]$ intervallumon (vagy ha úgy tetszik, az $[1, \infty)$ félegyenesen). Tehát van olyan $r > 1$ valós szám, hogy $p_4(r) = 0$. Megfordítva, ha $r > 1$, akkor a $p_4(r) = 0$ képletet átrendezve, majd a jobb oldalt okosan növelve, a végén átoszthatunk r^4–el:

$$r^4 = b_1 s_1 r^2 + b_2 s_1 s_2 r + b_3 s_1 s_2 s_3 < b_1 s_1 r^4 + b_2 s_1 s_2 r^4 + b_3 s_1 s_2 s_3 r^4 \quad \Rightarrow \quad 1 < b_1 s_1 + b_2 s_1 s_2 + b_3 s_1 s_2 s_3 = R\,.$$

Tehát $R > 1 \Leftrightarrow r > 1$. A még hiányzó $R < 1 \Leftrightarrow r < 1$ eset kezelése sem nehezebb. (Ha ez sikerül, $r = 1 \Leftrightarrow R = 1$ igazolása már csak formális logika dolga.) Amennyiben tehát $R < 1$, akkor az $1 > b_1 s_1 + b_2 s_1 s_2 + b_3 s_1 s_2 s_3$ egyenlőtlenséget a $\lambda \geq 1$ paraméter negyedik hatványával beszorozva

$P_4(1) = 1 - R$ $\quad P_4(r) = 0$

$$\lambda^4 > b_1 s_1 \lambda^4 + b_2 s_1 s_2 \lambda^4 + b_3 s_1 s_2 s_3 \lambda^4 \geq b_1 s_1 \lambda^2 + b_2 s_1 s_2 \lambda + b_3 s_1 s_2 s_3 \longleftarrow \text{ezt az oldalt csökkentve}$$

adódik. Másképpen fogalmazva azt kaptuk, hogy $p_4(\lambda) > 0$ minden $\lambda \geq 1$ esetén. Ilymódon a p_4 polinom domináns $r > 0$ gyöke a $(0, 1)$ intervallumba kell, hogy essék. Ha pedig $r < 1$, akkor minden $\lambda \in (r, \infty)$ esetén $p_4(\lambda) > 0$, speciálisan a $\lambda = 1$ választással is $p_4(1) > 0$. De $p_4(1) = 1 - R$ és kész.

Vegyük észre, hogy a bizonyítás mind a négy része explicit vagy implicit módon épített a Perron–Frobenius tételre.

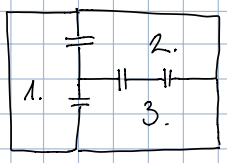
BOLYONGÁSI PL

PÉLDA 6. – MARKOV EGÉR A CELLÁK LABIRINTUSÁBAN *avagy véletlen bolyongás háromosztatú, a kettes és a hármas cella között kétkapus labirintusban.* Jelölje $\xi_n = i$ azt az eseményt, hogy az egér az n–edik időpontban éppen az i–edik cellában van, ahol $n = 0, 1, 2, \ldots$ és $i = 1, 2, 3$. Így a P átmenetmátrix — melynek elemei a $p_{ij} = P(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i)$ valószínűségek[12]:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \pi_k^T = \pi_0^T \mathbf{P}^k \to \pi_0^T(\mathbf{v}\mathbf{w}^T) = \frac{1}{8}(2,3,3) \quad \text{ha} \quad k \to \infty\,,$$

mert $r = 1$, $\mathbf{v} = \mathrm{col}(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{w}^T = \frac{1}{8}(2,3,3)$ (bármely $\pi_0^T \in \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathrm{row}(\mathbb{R}^3) \mid x + y + z = 1\,,\ x, y, z \geq 0\}$ kezdeti eloszlásra). Felismerjük $\mathbf{w}^T$ koordinátáiban az átmenetgráf csúcsainak fokszámát?

[12]Sor–sztochasztikus konvenció, ahol az átmenetgráfban $(\{i\} \to \{j\}) \in E(\mathcal{G}) \Leftrightarrow p_{ij} > 0$: az egér az egymás utáni időpontokban mindig egyforma valószínűséggel választ az aktuális cella kapui között — a cellalabirintusokból származó ilyetén bolyongások $\mathcal{G}$ gráfjai és P Markov mátrixai mind speciális szerkezetűek: tekinthetjük többszörös élekkel rendelkező irányítás (és külön súlyozás) nélküli gráfoknak is őket, a hozzájuk tartozó $P = P_{\mathcal{G}} = D_{\mathcal{G}}^{-1} A_{\mathcal{G}}$ mátrixoknak pedig minden sajátértéke valós. Itt $D_{\mathcal{G}} = \mathrm{diag}(2,3,3)$ az a diagonális mátrix, amelynek elemei az irányítás nélküli $\mathcal{G}$ gráf csúcspontjainak fokszámai, $A_{\mathcal{G}}$ pedig a $\mathcal{G}$ gráf szomszédsági mátrixa (ahol is $a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 1$ és $a_{23} = a_{32} = 2$ [a többi elem pedig nulla]).



$p_{ij} = P(x_{n+1} = j \mid x_n = i)$ → átmenet mátrix

$\pi_t^T = \pi_0^T \cdot P^k$ → $P = \underline{v}\,\underline{w}^T$ $\quad \pi_t^T = \pi_0^T(\underline{v}\,\underline{w}^T)$ ha $t \to \infty$

egyensúlyi állapot

$r = 1$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$w^T = \frac{1}{8}(2,3,3)$

Markov lánc

2. tétel — Diffúziós egyenlet és általánosításai

- Mikroszkópikus
  - ↳ Brown-mozgás
  - ↳ bolyongás 1D-ben
  - ↳ skálázás
- Makroszkópikus
  - ↳ hővezetés
  - ↳ hőenergia mérleg → diffúzió, anyagmérleg

- diffúzió-adverció-reakció egyenletrendszer
- kezdeti és peremi feltételek
- kapcsolat a Gauss görbék egy családjával
- maximum-elv
- numerikus megfontolások

Makroszkópikus levezetés

A diffúzió–egyenlet kétféle levezetése és néhány tulajdonsága:

A MAKROFIZIKAI LEVEZETÉS: EGYENSÚLYI ELVEKBŐL — A HŐVEZETÉSI INTERPRETÁCIÓBAN Jelölje $u(t,x)$ az $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ pont hőmérsékletét a $t \geq 0$ időpontban. A másik alapvető fogalom a hőáramlás időtől és helytől is függő vektormezője, az $\underline{F}(t,x)$. A harmadik a belső hőforrások $f(t,x)$ sűrűségfüggvénye.

$$\text{Egy } G \subset \Omega \text{ térrészen belüli } Q(t) = \int_G c\rho u(t,x)\,dx \text{ hőenergia } \dot{Q}(t) \text{ megváltozása}$$

$$= \text{a } \partial G \text{ peremen átáramló } -\int_{\partial G} \underline{F}\,\underline{ds} \text{ hőenergia } + \text{ a belső hőforrások } \int_G f(t,x)\,dx \text{ munkája},$$

azaz

$$\int_G c\rho u_t(t,x)\,dx = -\int_{\partial G} \underline{F}\,\underline{ds} + \int_G f(t,x)\,dx$$

- $u(t,x)$ – hőmérséklet $t \geq 0$

  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ $d = 1,2,3$ – nyílt tartomány, korlátos, ömefüggő
- $\vec{F}(t,x)$ – hőáramlás vektora → vektormező ami helytől és időtől függ
- $f(t,x)$ – belső hőforrások sűrűség függ

Hőenergia egy $G \in \Omega$ térrészen belül

$$Q(t) = \int_G c \cdot g \cdot u(t,x)\,dx$$

megváltozása:

$$\dot{Q}(t) = -\int_{\partial G} \vec{F}(t,x)\,d\underline{S}$$

F peremén vett integrál → felületre merőleges komponens áramlik át

Hőforrások esetén.

$$\dot{Q}(t) = \int_G c \cdot \varrho \cdot u_t'(t,x)\,dx = -\int_{\partial G} \vec{F}\,d\underline{S} + \int_G f(t,x)\,dx$$

∂G peremén áthaladó hőenergia

G-ben hőforrások belső munkája

c – anyagsűrűség

ϱ – fajhő

azaz

$$\int_G c\rho u_t(t,x)\,dx = -\int_{\partial G} \underline{F}\,\underline{ds} + \int_G f(t,x)\,dx$$

tetszőleges korlátos $G \subset \Omega$ (nyílt) tartományon, ahol ρ az anyagsűrűség és c a fajhő. Az $\int_G \operatorname{div}(\underline{v})\,dx = \int_{\partial G} \underline{v}\,\underline{ds}$ divergenciatétel valamint a diffúzió[1] $\underline{F} = -k\,\underline{\operatorname{grad}}\,u$ törvényének segítségével

$$\int_G c\rho u_t(t,x)\,dx = \int_G \operatorname{div}(k\,\underline{\operatorname{grad}}\,u)\,dx + \int_G f(t,x)\,dx\,,$$

amiből a

$$c\rho u_t(t,x) = \operatorname{div}(k\,\underline{\operatorname{grad}}\,u) + f(t,x) \tag{1}$$

végeredmény már közvetlenül adódik.[2] Amennyiben a k diffúziós együttható állandó (és nem $k = k(x)$ alakú függvény), a k állandó kihozható a divergencia operátora elé, és a végeredmény a $c\rho u_t = k\Delta u + f(t,x)$ alakra egyszerűsödik. Ha nincsenek belső hőforrások — azaz ha $f(t,x) \equiv 0$ —, akkor az $a^2 = \frac{k}{c\rho} > 0$ jelöléssel az (1) egyenlet az $u_t = a^2\Delta u$ alakot ölti, amely egy előre megadott $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1,2,3)$ korlátos tartomány pontjaiban érvényes. A továbbiakban azt is feltesszük, hogy mind a c fajhő, mind a ρ anyagsűrűség, és akkor velük együtt az $a > 0$ paraméter is térben–időben állandók.

divergencia tétel: $\int_{\partial G} \vec{F}\,d\underline{S} = \int_G \operatorname{div}\vec{F}\,dx$

diffúziós törvénye: $\underline{F} = -\varepsilon \cdot \underline{\operatorname{grad}}\,u$

- Fourier – hőtan
- Fick – kémia
- Ohm – elektromosság

$$\dot{Q}(t) = -\int_{\partial G} \vec{F}\,d\underline{S} + \int_G f(t,x)\,dx$$

$$-\int_G \operatorname{div}\vec{F}\,dx$$

$$\dot{Q}(t) = +\int_G \operatorname{div}(\varepsilon \cdot \underline{\operatorname{grad}}\,u)\,dx - \int_G f(t,x)\,dx$$

$$c \cdot \varrho\, u_t' = \operatorname{div}(\varepsilon \cdot \underline{\operatorname{grad}}\,u) - f(t,x)$$

ha $\nexists$ hőforrás $\Rightarrow$ $a = \frac{\varepsilon}{c\cdot\varrho} > 0$ esetén az egyenlet $\rightarrow$ $u_t' = a^2 \cdot \Delta u$ alakú

Δ – Laplace operátor $\rightarrow$ $\Delta u = u_{xx}''$

Peremfeltételek:

DIRICHLET $\longrightarrow$ Δ_D $\qquad u_t = \Delta_D u$ $\qquad$ kihűlés

peremfeltételbe be van építve az operátorba

$\dot{x} = \Delta x$, $x(0) = x_0$ $\qquad$ sajátértékek: $-k^2$, sajátvektorok: $\sin kx$ $\qquad \sin kx \Big|_{\substack{x=0\\x=\pi}} = 0$ $\qquad x(t) = e^{At} \cdot x_0 = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{\Delta}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} \underline{\Delta}_n$

$\dot{u} = \Delta_D u$, $u(0) = g$ $\qquad u(t) = e^{\Delta_D t} \cdot g$

alapmegoldásai a hom. lin. diffegyenleteknek:

$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot u_k(t,x)$ $\qquad c_k \in \mathbb{R}$ kezdeti feltételből

$u(t,x) = \sum c_k e^{-k^2 t} \cdot \sin kx \Big|_{t=0} \longrightarrow u(0,x) = g(x) = \sum c_n \cdot \sin kx$ $\qquad g(x) \in L_2$

MIÉRT?

hővezetési egyenlet megoldása: Fourier sor $\longrightarrow$ ha Ω téglalap akkor lehetséges a Fourier sorfejtés

$$c_k = g_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cdot \sin kx \, dx$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \quad / \sin 5x$$

$$\int_0^{\pi} g(x) \cdot \sin 5x \, dx = c_k \int_0^{\pi} \sin^2 5x \, dx$$

$\frac{\pi}{2}$?

peremfelt.: $u(t,x) \Big|_{\substack{x \in \partial\Omega\\x=0\\x=\pi}} = 0$

Megjegyzés: Az $u_t = u_{xx}$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $u(0,x) = g(x)$ homogén Dirichlet feladat megoldható Fourier–sor alakjában:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \quad \text{ahol} \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx)\, dx\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{2}$$

Maga az egyenlet homogén lineáris, és a peremfeltétel is homogén. Így az $u(t,x)$ ($t \geq 0$, $x \in [0,\pi]$) megoldás az $e^{-n^2 t}\sin(nx)$ alapmegoldások lineáris kombinációja. A lineáris kombináció együtthatóit a $t = 0$ kezdeti állapotot leíró $g \in L_2[0,\pi]$ függvény Fourier sorfejtése szolgáltatja. Hasonlóképpen, az $u_t = u_{xx}$, $u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0$, $u(0,x) = g(x)$ homogén Neumann feladat megoldása

$$u(t,x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \cos(nx) \quad \text{ahol} \quad c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos(nx)\, dx\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{3}$$

Fontos megjegyeznünk, hogy — még akkor is, ha a g függvény folytonos, sőt ha még a $g(0) = g(\pi) = 0$ kompatibilitási feltételek is teljesülnek — a megoldás "döccenve" indul: a $t = 0$ időpontban a Fourier–sorok konvergenciája általában csak az $L_2[0,\pi]$ térben garantált. Szerencsére ha $t > 0$, akkor a sorösszeg végtelenszer deriválható a t és az x hibrid változókban. A $t \to \infty$ határátmenetben a homogén Dirichlet feladat megoldásának képlete egyenletes $u(t,x) \to 0$ kihűlést, a homogén Neumann feladat megoldásának képlete

pedig az integrál–átlaghoz tartó $u(t,x) \to \frac{c_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\, dx$ teljes hőmérséklet–kiegyenlítődést mutat.

(Ha az $x \in [0,L]$ intervallumon maradtunk volna egy általános $a > 0$ paraméter mellett, akkor a homogén Dirichlet feladat megoldása ez lett volna:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \exp\left(-\left(a\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2 t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) \quad \text{ahol a} \quad g_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} g(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

állandók éppen a $g : [0,L] \to \mathbb{R}$ függvény $\{\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,L]$ trigonometrikus rendszer szerinti Fourier sorfejtésének együtthatói.)

NEUMANN $\longrightarrow$ Δ_N $\qquad u_t' = \Delta_N \cdot u$

$u_{xx}'' = \Delta$ $\quad u_x'(t,0) = u_x'(t,T) = 0$

homogenizálódás

$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$ izolálhatósági feltétel (szigetelt)

$u_t' = \Delta u$

$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$ $\qquad Q(t) = \int_\Omega u(t,x)\Big|_t$

↳ irányszerinti derivált $\rightarrow$ $(\operatorname{grad} u)^T \cdot \nu = 0$

$\Delta = \operatorname{div}$

$\dot{Q}(t) = \int_\Omega u_t' \, dx = \int_\Omega \Delta u \, dx = \int_\Omega \operatorname{div} \operatorname{grad} u \, dx = \int_{\partial\Omega} 0 \, dx = 0$

$Q(t)$ – konstans

$\Downarrow$

hőmegmaradás

Megjegyzés: Homogén Neumann peremfeltétel esetén a divergencia–tételt felhasználva

$$\dot{Q}(t) = \int_\Omega \underbrace{c\rho u_t}_{u_t'}(t,x)\,dx = \int_\Omega \underbrace{\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)}_{\Delta u}\,dx = \int_{\partial\Omega} k \operatorname{grad} u \, \underline{d}s = \int_{\partial\Omega} 0 \, ds = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(t) \equiv Q(0)$$

adódik (hiszen $\langle \operatorname{grad} u(t,x), \underline{\nu}(x)\rangle = 0$ minden $t \geq 0$ esetén), ami a hőtani interpretációban hőenergia–megmaradást, a kémiai interpretációban pedig a folyadékban oldott (és a diffúzióval terjedő) anyag mennyiségének/tömegének megmaradását jelenti.

$u_t' = \Delta u$ $\qquad \Delta = \operatorname{div}$

$\dot{Q}(t) = \int_\Omega c \cdot g \, u_t' \, dx = -\int_{\partial\Omega} \underline{F} \, d\underline{s} = \int_{\partial\Omega} k \cdot \operatorname{grad} u \, d\underline{S} \overset{\text{Div}}{=} \int_G \operatorname{div}(\xi \cdot \operatorname{grad} u)\,dx$

$\operatorname{grad} u \perp \nu$ $\quad \forall x \in \partial\Omega$

Skálázás

Megjegyzés: egy dimenzióban lineáris változó–transzformációkkal — "skálázással" — elérhető, hogy $a = 1$ és $x \in [0,\pi]$ legyen. Valóban, ha eredetileg $x \in [0,L]$, akkor

a $\tau = \alpha t$, $y = \beta x$, $u(t,x) = \mathcal{U}(\alpha t, \beta x) = \mathcal{U}(\tau, y)$ lineáris helyettesítésekkel

ez utóbbi formulát (a jobb oldalon mint összetett függvényt) t szerint egyszer, valamint x szerint kétszer deriválva $u_t = \mathcal{U}_\tau \cdot \alpha$, $u_{xx} = \mathcal{U}_{yy} \cdot \beta^2$ adódik, így az α és a β paraméterek optimális megválasztásával

$u_t = a^2 u_{xx}$, $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,L]$ $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_\tau \cdot \alpha = a^2 \mathcal{U}_{yy} \cdot \beta^2$, azaz $\mathcal{U}_\tau = \mathcal{U}_{yy}$ ha $\beta L = \pi$ és $\alpha = a^2\beta^2$.

Magától értetődik, hogy a lineáris helyettesítések a perem– és a kezdeti feltételekre is vonatkoznak.

alapvető matematikai egyenlőtlenség

$u_t' = a^2 u_{xx}''$ $\quad u(t,x)$ $\quad x \in [0,L]$, $t \geq 0$

$u(t,x) = \mathcal{U}(\tau, y) = \mathcal{U}(\alpha t, \beta x)$ lineáris transzformáció

$\tau = \alpha t$ $\quad y = \beta x$

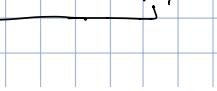
$u_t' = \mathcal{U}_\tau' \cdot \alpha$, $\quad u_{xx}'' = \mathcal{U}_{yy}'' \cdot \beta^2$ $\quad \Rightarrow \quad \alpha \mathcal{U}_\tau' = a^2 \mathcal{U}_{yy}'' \cdot \beta^2$

ha $\mathcal{U}_\tau' = \mathcal{U}_{yy}'$

$\alpha = a^2 \cdot \beta^2$

↳ $\alpha = a^2 \frac{L^2}{\pi^2}$ $\qquad \beta = \frac{L}{\pi}$

$[0,L] \Rightarrow [0,\pi]$ $\qquad a^2 \Rightarrow 1$



$\pi = \beta \cdot L$

Maximum elv

MAXIMUM–ELV AZ $u_t = \Delta u$ EGYENLETRE: Most az eddigiekben tárgyalt diffúzió–egyenlet — amelyben tehát az ismeretlen függvény $u : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ alakú, egydimenziós $t \geq 0$ idő– valamint tetszőleges, d–dimenziós $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ térváltozóval — egy nagyon általános, roppant szemléletes és matematikailag könnyen bizonyítható kvalitatív tulajdonságáról lesz szó. Ez a maximum–elv, amelynek érvényesülését szinte naponta tapasztalhatjuk: Hidegzugok, melegzugok, csakúgy mint a koncentráció összesűrűsödései vagy ritkulásai *egydimenziós lineáris* diffúzió révén nem jöhetnek létre. A maximum–elv alapvetően egyetlen valós függvényre teljesül és már a lineárisan csatolt $u_t = \alpha^2 u_{xx} + au + bv$, $v_t = \beta^2 v_{xx} + cu + dv$ egyenletrendszerre sem érvényes — itt u és v egy–egy oldott anyagfajta téridőbeli koncentrációját jelenti, két olyan anyagét egyazon oldatban, amelynek α^2 és β^2 diffúziós egyethatója egymással nem egyenlő. Ökölszabályként annyit mondhatunk, hogy a diffúzió–egyenlet stabilizál és homogenizál, de a diffúzió–egyenletrendszer már nem rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal.

Következzék a szigorú matematika:

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos (nyílt) tartomány, és legyen $T > 0$ tetszőleges. Vezessük be az

$$\Omega_T = (0,T) \times \Omega \quad , \quad \partial^*\Omega_T = \big(\{0\} \times \overline{\Omega}\big) \cup \big((0,T] \times \partial\Omega$$

jelöléseket[3]. Ekkor

$$\max\{u(t,x) \mid (t,x) \in \overline{\Omega_T}\} = \max\{u(t,x) \mid (t,x) \in \partial^*\Omega_T\}\,. \tag{4}$$

Bizonyítás: A bizonyítás — jóllehet annak két részre bontása ugyancsak szellemes — nem használ fel mást, mint az egyváltozós függvények vizsgálatának szokásos lépéseit.

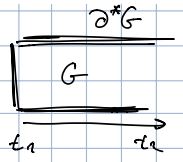
1.) Tegyük fel először, hogy $u_t < u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}$. Megmutatjuk, hogy (4) még ekkor is teljesül. Az indirekt feltevés azt mondja, van olyan $(t^*,x^*) \in (0,T] \times \Omega$ pont, hogy

$$u(t^*,x^*) = \max\{u(t,x) \mid (t,x) \in \overline{\Omega_T}\} > \max\{u(t,x) \mid (t,x) \in \partial^*\Omega_T\}\,.$$

Ekkor $u_{x_1}(t^*,x^*) = 0$ és $u_{x_1x_1}(t^*,x^*) \leq 0$ valamint $u_{x_2}(t^*,x^*) = 0$ és $u_{x_2x_2}(t^*,x^*) \leq 0$. Így

$$u_t(t^*,x^*) < \Delta u(t^*,x^*) = u_{x_1x_1}(t^*,x^*) + u_{x_2x_2}(t^*,x^*) \leq 0\,,$$

[3] A $d = 2$ választás miatt könnyű a szemléltetés. Itt Ω_T egy, az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ téridőben fekvő korlátos nyílt henger, $\partial^*\Omega_T$ az Ω_T henger "csillagos pereme" (azaz kezdőlapjának és palástja lezárásának az uniója — a "tényleges töltényhüvely"). Annak rendje–módja szerint feltesszük, hogy az u függvény folytonos a $[0,\infty) \times \overline{\Omega}$ zárt halmazon, a t időváltozó szerint egyszer, az $x = (x_1,x_2)$ helyváltozó szerint kétszer folytonosan deriválható annak $(0,\infty) \times \Omega$ belsejében, továbbá ugyanott eleget tesz az $u_t = \Delta u (\equiv u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2})$ egyenletnek.



$\overline{G}$ - G lezárja

∂^*G - csillagos perem

Max elv → mindenek zugol → 1D diffúzió során NEM

$\max_{(t,x)\in\partial^*G} u(t,x) = \max_{(t,x)\in\overline{G}} u(t,x)$ egyetlen valós fv-re igaz → lin. csatolt egyenletrendszerre nem

$G \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, nyílt $\quad G_T = (0,T) \times \Omega$

$T > 0$ $\quad \partial^*G_T = (\{0\} \times \overline{G}) \cup ((0,T] \times \partial\Omega)$

- kezdőlap és palást lezárásának uniója

Bizonyítás:

Bizonyítás: A bizonyítás — jóllehet annak két részre bontása ugyancsak szellemes — nem használ fel mást, mint az egyváltozós függvények vizsgálatának szokásos lépéseit.

1.) Tegyük fel először, hogy $u_t < u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}$. Megmutatjuk, hogy (4) még ekkor is teljesül. Az indirekt feltevés azt mondja, van olyan $(t^*, x^*) \in (0, T] \times \Omega$ pont, hogy

$$u(t^*, x^*) = \max\{u(t, x) \mid (t, x) \in \overline{\Omega_T}\} > \max\{u(t, x) \mid (t, x) \in \partial^*\Omega_T\}\,.$$

Ekkor $u_{x_1}(t^*, x^*) = 0$ és $u_{x_1x_1}(t^*, x^*) \le 0$ valamint $u_{x_2}(t^*, x^*) = 0$ és $u_{x_2x_2}(t^*, x^*) \le 0$. Így

$$u_t(t^*, x^*) < \Delta u(t^*, x^*) = u_{x_1x_1}(t^*, x^*) + u_{x_2x_2}(t^*, x^*) \le 0\,,$$

TFH $u_t' < u_{x_1x_1}'' + u_{x_2x_2}'' \longrightarrow u_t' < \Delta u$

indirekt: $\exists\,(t^*, x^*) \in (0, T] \times \Omega$ melyre

$u(t^*, x^*) = \max_{\overline{\Omega_T}}(u(t, x)) > \max_{\partial^*\Omega_T}(u(t, x))$

ekkor: $u_{x_1}'\big|_{(t^*,x^*)} = 0$ $\quad u_{x_1x_1}''\big|_{(t^*,x^*)} \le 0$ $\quad$ & $\quad u_{x_2}'(t^*, x^*) = 0$ $\quad u_{x_2x_2}''(t^*, x^*) \le 0$

$u_t' < \Delta u \le 0 \qquad t = t^* \quad x = x^*$

$u(t^* - \delta, x^*) \qquad 0 < \delta << 1$

$(t^* - \delta, x^*) \in (0, T] \times \Omega$

olyan pontból halmaza melyről u értéke nagyobb mint max ↯

amiből $u(t^* - \delta, x^*) > u(t^*, x^*)$ ha $0 < \delta \ll 1$ (azaz ha $\delta > 0$ elegendően kicsi). Tehát olyan ponto(ka)t sikerült megkonstruálni a $(0, T] \times \Omega$ halmazban, ahol az u függvény értéke nagyobb a maximumnál, ami ellentmondás.

2.) Most visszatérünk az eredeti u függvényhez. Az $\varepsilon > 0$ paraméter segítségével definiáljuk a $v_\varepsilon(t, x) = u(t, x) - \varepsilon t$ segédfüggvényeket. Mivel

$$(v_\varepsilon)_t(t, x) = u_t(t, x) - \varepsilon = \Delta u(t, x) - \varepsilon < \Delta u(t, x) = \Delta v_\varepsilon(t, x)\,,$$

a bizonyítás első része szerint

$$\max\{v_\varepsilon(t, x) \mid (t, x) \in \overline{\Omega_T}\} = \max\{v_\varepsilon(t, x) \mid (t, x) \in \partial^*\Omega_T\}$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén. A kívánt (4) tulajdonság az $\varepsilon \to 0^+$ határátmenettel adódik. □

A maximum–elvet a $-u$ függvényre átfogalmazva a

$$\min\{u(t, x) \mid (t, x) \in \overline{\Omega_T}\} = \min\{u(t, x) \mid (t, x) \in \partial^*\Omega_T\} \tag{5}$$

minimum–elvet kapjuk. A *maximum–elv és a minimum–elv együttes következménye* — ha azokat a két hipotetikus megoldás különbségére alkalmazzuk — az $u_t = \Delta u + f(t, x)$, $u(0, \cdot)\big|_\Omega = g$, $u\big|_{(0,\infty)\times\partial\Omega} = h$ kezdeti– és peremérték–feladat klasszikus (az előző lábjegyzetben felsorolt símasági feltételeket kielégítő) megoldásának unicitása. Ez utóbbi kijelentés független a kérdéses megoldás létezésétől.

Vegyük észre, hogy a bizonyítás lokális jellegű és tetszőleges $(t_1, t_2) \times G \subset (0, \infty) \times \Omega$ nyílt henger "töltényhüvely"-t alkotó "csillagos perem"–ére megismételhető, akkor is ha az x térváltozó nem $d = 2$, hanem $d = 1, 3$ vagy éppen $d \ge 4$ dimenziós. A bizonyítás első része azt is mutatja, hogy maga a maximum–elv igaz az $u_t = \Delta u - u^2$ nemlineáris reakció–diffúzió egyenletre is, ahol a $-u^2$ "forrástag" soha nem lehet pozitív.

$v_\varepsilon(t, x) = u - \varepsilon t \qquad v_\varepsilon' = u_t' - \varepsilon = u_{xx}'' - \varepsilon < \Delta u = \Delta v_\varepsilon$

$\max_{\overline{\Omega}_T}(v_\varepsilon) = \max_{\partial^*\Omega_T}(v_\varepsilon)$ tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $\varepsilon \to 0^+$ határátmenettel

$\max_{\overline{\Omega}}(u) = \max_{\partial^*\Omega}(u)$

$-u$ → minimum elv

$\min_{\overline{\Omega}_T}\{u\} = \min_{\partial^*\Omega_T}\{u\}$

Mikroszkopikus

A MIKROFIZIKAI PONTOSABBAN A STATISZTIKUS FIZIKAI LEVEZETÉS: A DIFFÚZIÓ BROWN–MOZGÁS SZERINTI INTERPRETÁCIÓJÁBAN Egyetlen pontszerű részecske bolyong a számegyenesen. Mozgásáról csak annyit tudunk, hogy adott helyzetből δt idő alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel jobbra, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel balra megy, éspedig δx távolságot.

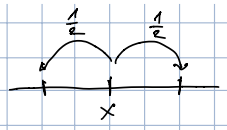
Jelölje $P(t,x)$ annak a valószínűségét, hogy a részecske a t időpillanatban a számegyenes x pontjától balra helyezkedik el. A t és a $t+\delta t$ időpillanat közötti lehetséges elmozdulásokat figyelembe véve, a $P(t+\delta t,x)$ valószínűségét kifejezzük a t időpillanathoz tartozó különböző valószínűségekkel. Az az állapot, hogy a $t+\delta t$ időpontban a részecske az x ponttól balra helyezkedik el, kétféleképpen alakulhat ki: ha a t időpillanatban balra volt az $x-\delta x$ ponttól, vagy ha benne volt az $(x-\delta x, x+\delta x)$ intervalumban. Az előző esetben továbbra is balra marad az x ponttól, az utóbbi esetben pedig a jobbra vagy balra lépések egyikével az x ponttól jobbra, másikával az x ponttól balra kerül. A valószínűségét figyelembe véve azt kapjuk, hogy a kétváltozós P függvény eleget tesz a

$$P(t+\delta t,x) = P(t,x-\delta x) + \frac{1}{2}(P(t,x+\delta x) - P(t,x-\delta x))$$

algebrai összefüggésnek. Ezután mindkét oldalból kivonjuk a $P(t,x)$ valószínűséget és osztunk a δt, a jobb oldalon pedig bővítünk a $(\delta x)^2$ kifejezéssel. Így

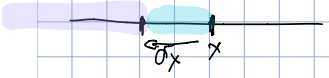
$$\frac{P(t+\delta t,x) - P(t,x)}{\delta t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(t,x-\delta x) - 2P(t,x) + P(t,x+\delta x)}{(\delta x)^2} \cdot \frac{(\delta x)^2}{\delta t},$$

1D bolyongás → számegyenes



$P(t,x)$ — valószínűség, x ponttól balra helyezkedik el t időben

$P(t+\delta t,x) =$



→ $x-\delta x$ ponttól balra → balra marad x-hez

→ $(x-\delta x,\ x+\delta x)$ → jobb/bal

$= P(t,x-\delta x) + \frac{1}{2}(P(t,x+\delta x) - P(t,x-\delta x))$ / $-P(t,x)$

$\frac{1}{2}P(t,x-\delta x) + \frac{1}{2}P(t,x+\delta x)$

$$P(t+\delta t, x) - P(t,x) = \frac{1}{2}\cdot\left(P(t,x-dx) - 2\cdot P(t,x) + P(t,x+dx)\right)$$

$$\frac{P(t+\delta t,x)-P(t,x)}{\delta t} = \frac{1}{2}\,\frac{P(t,x-dx)-2\cdot P(t,x)+P(t,x+dx)}{\delta^2 x}\cdot\frac{\delta x^2}{\delta t}$$

$$P'_t = \frac{1}{2}P''_{xx}\cdot\frac{\delta x^2}{\delta t} \qquad \frac{dx}{dt}\cdot\frac{1}{2} = 1 \text{ e/s} \qquad \frac{\delta t}{dx}\to 0$$

$$P'_t = P''_{xx}$$

majd a $\frac{(\delta x)^2}{2\delta t} = 1$ skálázással és a $\delta t, \delta x \to 0$ határátmenettel a remélt $P_t(t,x) = P_{xx}(t,x)$ parciális differenciálegyenlet adódik.

Ha a $t = 0$ kezdeti időpontban a részecske biztosan az $x = 0$ pontban volt (azaz $P(0,x) = H(x)$ ahol H a Heaviside függvény), akkor a hőmaggal (lásd a 10–ik oldalon) vett konvolúciós integrál a

$$P(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} H(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{4t}}\, dz = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)$$

végeredménnyé egyszerűsödik. Itt $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds$, a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. A fizikusok ezt úgy mondják, hogy a diffúzió a Dirac deltát (vagy más nézőpontból a Heaviside függvény általánosított deriváltját és ha úgy tetszik, Brown vízbe dobott pollen–csomagocskáját) $t > 0$ idő alatt az $\mathcal{N}(0,\sigma) = \mathcal{N}(0,\sqrt{2t})$ normális eloszlás $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ sűrűségfüggvényévé keni szét.

$t=0$ -ban $P(0,x)$ $x=0$ pontban van $\Longrightarrow$ hőmaggal vett konvolúciós integrál

A diffúzió–egyenlet a számegyenesen — Poisson megoldóképlete és a normális eloszlás

Tétel: Tetszőleges $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és korlátos függvény esetén

$$u(t,x) = \begin{cases} g(x) & \text{ha } t = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)d\xi & \text{ha } t > 0 \end{cases} \qquad (11)$$

megoldása, éspedig egyetlen megoldása az $u_t = u_{xx}$, $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}$ egyenletnek, az $u(0,x) = g(x)$ kezdeti feltétel mellett. A konvolúciós integrál magfüggvénye az úgynevezett "hőmag".

Diffúzió - advekció - reakció egyenletek

ÖSSZEFOGLALÁS: Az $u_t = -\operatorname{div}(\underline{F}) + f$ egyenlet változatai alapvetően $\underline{F}$ és f választásától valamint – rendszerek esetében – a csatolásoktól függenek:

- diffúzió: $\underline{F} = \underline{F}_{diff} = -k_1 \operatorname{grad} u$ — diffúziós egyenlet általános alakja
- advekció: $\underline{F} = \underline{F}_{adv} = k_2 u \underline{v}$, ahol $\underline{v}$ az áramló közeg ismert sebessége
- advekció–diffúzió: $\underline{F} = \underline{F}_{adv-diff} = -k_1 \operatorname{grad} u + k_2 u \underline{v}$ — vereltek viselkedéséhez
- reakció–diffúzió: $u_t = \alpha^2 \Delta u + f(u,v)$, $v_t = \beta^2 \Delta v + g(u,v)$ — ahol $\dot{u} = f(u,v)$, $\dot{v} = g(u,v)$ egy, az Ω tartomány minden pontjában azonos módon lejátszódó kémiai reakció egyenletrendszere
- chemotaxis–diffúzió: $\underline{F} = \underline{F}_{chtaxis-diff} = -\ell u \operatorname{grad} c - \beta^2 \operatorname{grad} u$, ahol a szaporodni is képes baktérium (koncentrációja u) menekül egy külső kémiai folyamatban képződő méreg (koncentrációja c) elől — így a csatolt rendszer: $c_t = \alpha^2 \Delta c + f(c)$, $u_t = \beta^2 \Delta u - \ell \operatorname{div}(u \operatorname{grad} c) + g(c,u)$ (mérgek szabály szerint képződnek; (mennek) akaratlagos mozgás; egyszerű diff. mozgás; egyszerű egyenlet; $= -\operatorname{div} \underline{F}$)

Mindezek a parciális differenciálegyenletek perem– és kezdeti feltételekkel együtt értendők.

Az első három példa mindegyike — már amennyiben az f forrástag sem függ az u ismeretlentől — az advekció–diffúzió egyenlettel bezárólag *lineáris feladat*. A k_1 diffúziós együttható a legegyszerűbb esetben valódi, az $x \in \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ térváltozótól független állandó: a $\operatorname{div}(k_1 \operatorname{grad} u) = k_1 \Delta u$ azonosság ekkor érvényes. A diffúziós k_1 és az advekciós k_2 együtthatók helytől és időtől való függetlensége az alkalmazások

---

diffúzió → $u'_t = -\operatorname{div} F$ → minus hőfolyás

$F = -\operatorname{grad} u \cdot k$

$u'_t = \operatorname{div} k_1 \cdot \operatorname{grad} u$

advekció → $F = k_2 \cdot u \cdot \underline{v}$ → v – áramló közeg sebessége

advekció-diffúzió → $F = F_{adv-diff} = -k_1 \cdot \operatorname{grad} u + k_2 u \cdot \underline{v}$

↳ lineáris egyenletek

reakció diffúzió → nem lin. csatolás

$u'_t = \mathcal{L}^2 u''_{xx} + f(u,v)$ csatolás

$v'_t = \beta^2 v''_{xx} + g(u,v)$

tartomány $\forall$ pontjában azonosan lejátszódó kémiai reakció → vereltekre viselkedéshez

chemotaxis diffúzió → $\underline{F} = -\operatorname{grad} u \cdot \beta^2 - \ell \cdot u \operatorname{grad} u$

spontán mozgás; akaratlagos mozgás → méreg elől menekül

csatolt rendszer

↳ mérgek szabály szerint képződnek → $c'_t = \mathcal{L}^2 \Delta c + f(c)$

$u'_t = \beta^2 \Delta u - \ell \cdot \operatorname{div}(u \operatorname{grad} c) + g(c,u)$

Gauss görbéje

Numerikus megfoghatóság

3. tétel — Analitikus módszerek közönséges diffegyenletek vizsgálatára

- Linearizálás
- lokális fázisportré egyensúlyi helyzetek körül
- elmi következtetések → vektormező, Ljapunov függvények alapján
- fázisportré változása paraméterek változásával
  → $\mu \lessgtr 0$ bifurkációs ábrák
  → $\dot{x}=\mu-x^2$, $\dot{y}=-y$
  → $\dot{r}=\mu r-r^3$, $\dot{\varphi}=-1$ Hopf
- stabilitás és vonzás, egyensúlyi helyzet, periodikus pálya
- Numerikus megfontolások
- 2D eset specifikációi, Ω halmazok síkon
- Lotka Volterra két-faj modelljei

Linearizálás

2.7. Linearizálás egyensúlyi helyzetek körül

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a kérdéses egyensúlyi helyzet, ami körül linearizálni szeretnénk, $x_0 = 0$. Legyen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ C^1 függvény. Így

$$f(x) = Ax + a(x)\,, \quad \text{ahol} \quad A = f'(0) \quad \text{és} \quad a(x) = f(x) - Ax\,.$$

Magától értetődik, hogy $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ is C^1 függvény, melyre $a(0) = 0$ és $a'(0) = f'(0) - A = 0$. Itt $a(0) = 0$ természetesen $\mathbb{R}^d$–beli vektor, $a'(0) = 0$ pedig a $d \times d$ méretű, csupa nulla elemből mátrix. Jóllehet a 0 különböző terek — jelesen $\mathbb{R}^d$, $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ (és akkor a $0 \in \mathbb{R}$ kezdeti időpontot még nem is említettük) — nulla–elemét jelenti, a kontextus megakadályozza, hogy azokat bármikor is összekeverjük egymással.

Tekintsük tehát az

$$\text{(N)} \quad \dot{x} = Ax + a(x)$$

nemlineáris egyenletet, és annak origó körüli linearizáltját, az

$$\text{(L)} \quad \dot{x} = Ax$$

lineáris egyenletet. Az (L) lineáris egyenletről lényegében mindent tudunk, ha sajátértékeit és sajátvektorait ismerjük. Tetszőleges $x(0)=x_0$ kezdeti feltételhez tartozó megoldása $x_{0,x_0}(t) = e^{At}x_0$, sőt ezt a megoldást a $t \to e^{At}$ mátrix–függvénnyel együtt ki is tudjuk számolni. Az (N) nemlineáris egyenlet megoldásait nem lehet zárt alakban meghatározni. De nem is kell, hiszen azokat az (L) lineáris egyenlet megoldásai *kvalitatíve és kvantitatíve* jól közelítik. Természetesen csak lokálisan, az origó egy kicsiny környezetében, és csak akkor, ha az A mátrix $\lambda_k = \lambda_k(A)$ sajátértékeire teljesül a

$$Re\,\lambda_k(A) \neq 0\,, \quad k = 1,2,\dots,d \tag{2.16}$$

feltétel. Ekkor a lokális fázisportrék is azonosnak tekinthetők, sőt ez az azonosítás a numerikus fázisportrékra is kiterjeszthető.

1 equilibrium pont körül!

lokális

akkor lehet
ha $Re\,\lambda_k \neq 0$ $k=1,2,3$

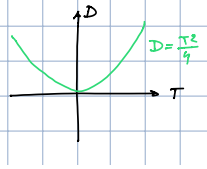
λ_k a linearis egyenlet sajátértéke

$\dot{x} = f(x)$ $\quad x \in \mathbb{R}^2$ $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad C^1$ fv

↳ nem lineáris egyenlet → linearizált $\dot{x} = \underline{A}x$

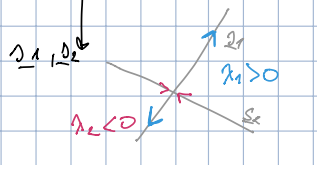
trace $\underline{A} = a+d = T$

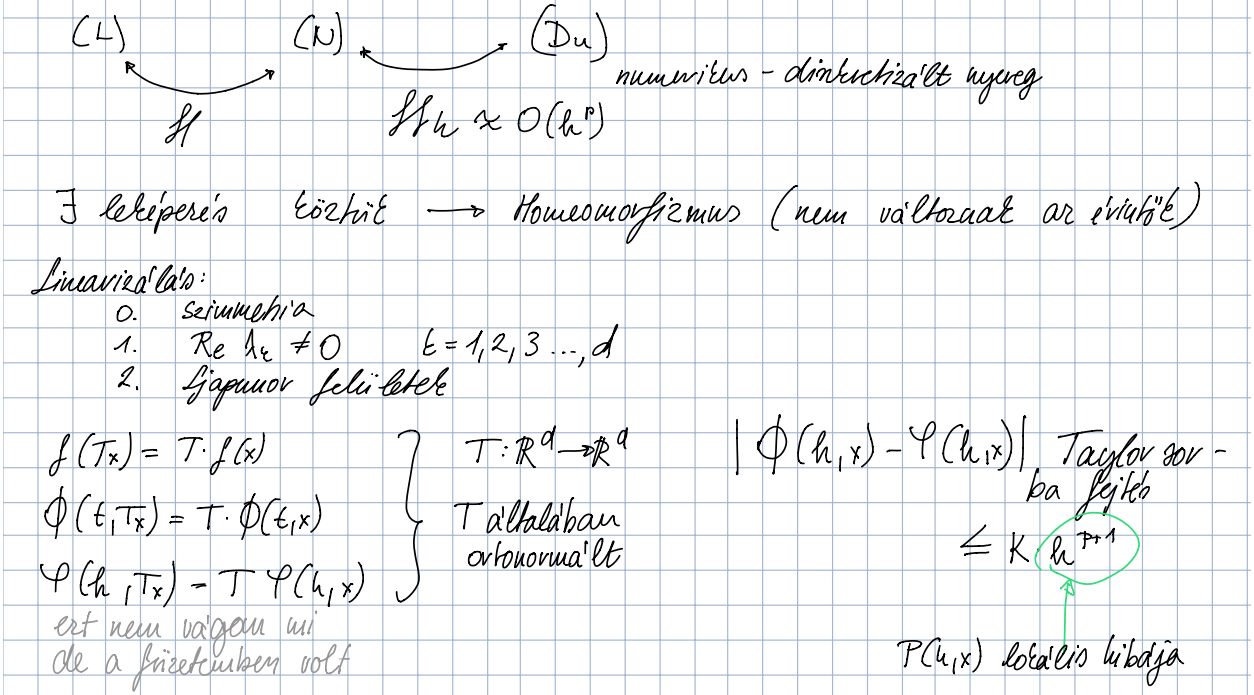
det $\underline{A} = a\cdot d - b\cdot c = D$



$f(0)=0$
$f'(0)=A$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ derivált mátrix

λ_1, λ_2





A TANTÁRGY NEVÉT ADÓ TÁGABB DEFINÍCIÓ: Legyen (X, d) metrikus tér és legyen $\mathbb{T}$ az $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $h\mathbb{Z}$, $h\mathbb{N}$ halmazok bármelyike. A $\Phi : \mathbb{T} \times X \to X$ leképezés *$\mathbb{T}$ idejű dinamikus rendszer X–en*, ha igazak rá az alábbi axiómák:

(i) Φ folytonos,

(ii) $\Phi(0, x) = x \quad \forall\, x \in X$,

(iii) $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x) \quad \forall\, t, s \in \mathbb{T} \quad \forall\, x \in X$.

A hatféle időválasztást párokba csoportosítva

- $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (illetve $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$) esetén Φ *folytonos idejű (semi)dinamikus rendszer*,
- $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ (illetve $\mathbb{T} = \mathbb{N}$) esetén Φ *diszkrét idejű (semi)dinamikus rendszer*,
- $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ (illetve $\mathbb{T} = h\mathbb{N}$) esetén Φ $h > 0$ *lépésközű (semi)dinamikus rendszer*.

DINAMIKUS RENDSZER LINEARITÁSÁNAK DEFINÍCIÓJA: Legyen $(X, \|\cdot\|)$ Banach (azaz teljes normált) tér és legyen $\mathbb{T}$ az $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $h\mathbb{Z}$, $h\mathbb{N}$ halmazok bármelyike. A $\Phi : \mathbb{T} \times X \to X$ dinamikus rendszer *lineáris*, ha az (i)–(ii)–(iii) axiómák mellett az is igaz rá, hogy

- minden rögzített $t \in \mathbb{T}$ esetén $\Phi(t, c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 \Phi(t, x_1) + c_2 \Phi(t, x_2) \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \forall\, x_1, x_2 \in X$.

A (18) nemlineáris $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^d$ alappélda lineáris változata az $d \times d$ méretű, valós számokból felépített A mátrix által meghatározott $\dot{x} = Ax$ közönséges, autonóm lineáris differenciálegyenlet

$$\Phi_L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \quad , \quad (t, x) \to \Phi_L(t, x) = e^{At} x$$

alakú megoldó–operátora.

Ha a (18) képletben szereplő nemlineáris differenciálegyenletben $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ és $f(0) = 0$, akkor az f függvényt a $0 \in \mathbb{R}^d$ *egyensúlyi helyzet körül linearizálva* $f(x) = Ax + a(x)$ adódik, ahol $A = f'(0)$ a 0–ban vett Jacobi mátrix és az $a \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ függvényre $a(0) = 0$ és $a'(0) = 0$ (az azonosan nulla $d \times d$ mátrix).

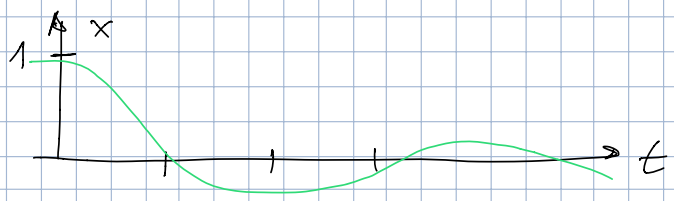
Jelölje $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d$ az A mátrix sajátértékeit. A $0 \in \mathbb{R}^d$ mint az $\dot{x} = Ax$ *differenciálegyenlet egyensúlyi helyzete nem–elfajult*, ha minden $k = 1, 2, \ldots, d$ esetén $\mathrm{Re}\,\lambda_k \neq 0$. A nem–elfajultságnak ez a definíciója az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet bármely más egyensúlyi helyzetére is automatikusan kiterjeszthető.

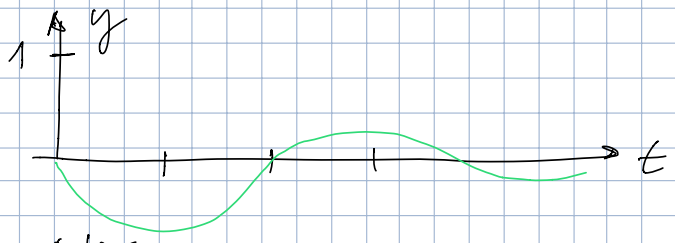
Fázisportré

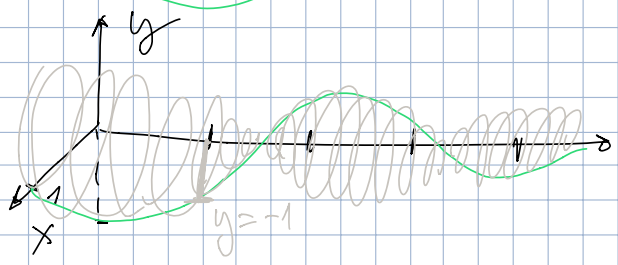
$$\dot{x} = -x+y$$
$$\dot{y} = -x-y$$
$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

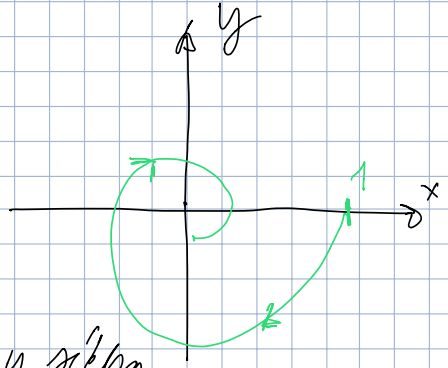
ha $x(0)=1$, $y(0)=0$ $\Longrightarrow$ $c_1=1$, $c_2=0$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$









kijorgatom az x-y síkba

$$\dot{x} = f(x,y)$$
$$\dot{y} = g(x,y)$$

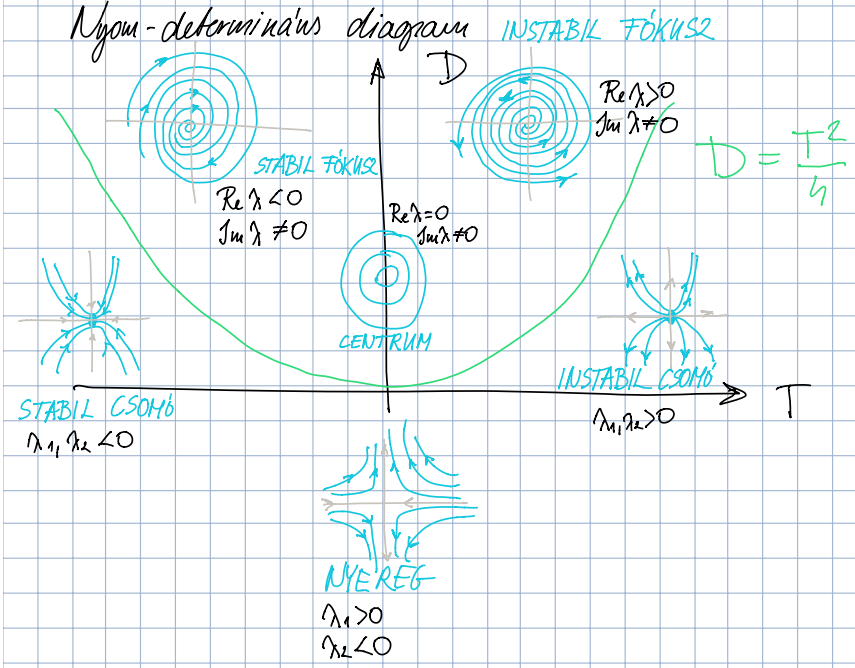
A fázisportré bármely pontjában ismerjük az oda tartó megoldásgörbe érintővektorát.

↳ T-D diagram elfajult és nem elfajult esetei

↳ $\lambda_1, \lambda \in \mathbb{R}$

$c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{s_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{s_2}$

Nyom-determináns diagram



$|\phi(h,x) - \Psi(h,x)|$ Taylor sorba fejtés $\leq K \cdot h^{p+1}$ lokális hiba

$p=1 \iff$ érintők közösek

$p=$ érintkezés rendje $\longrightarrow$ ahol a deriváltat megegyezik

$f(x_0) + J_f(x_0)(x - x_0)$ Linearizálás $\longrightarrow$ lokális

$(x \quad y)\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \longrightarrow$ skaláris szorzat $\langle$ energia-nívófelület ; trajektóriák érintő normál vektora $\rangle$

adott $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ pontban $\longrightarrow$ L: centrum
N: globális vonzás
M: globális taszítás

általában: $E \quad \dot{x} = f(x) \quad \& \quad V: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\dot{V}_{(E)} = \frac{d}{dt} V\left|_{x(t)}\right|_{t=0} = \langle \operatorname{grad} V(\underline{x}(t)), \dot{\underline{x}}(t) \rangle \Big|_{t=0} = \langle \operatorname{grad} V(\underline{x}), \underline{f}(\underline{x}) \rangle \quad < 0$$

V - nívófelület

$\dot{V} = \operatorname{grad} V \rightarrow$ nívófelület normál vektora

Ljapunov fv.:

Szintfelület és normálvektora

A $V:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ függvény $x_0\in\mathbb{R}^d$ ponton áthaladó szintfelülete — egyelőre jobb volna a szinthalmaz kifejezést használni — az $\{x\in\mathbb{R}^d\,|\,V(x)=V(x_0)\}$ halmaz. Ha a V függvény C^1 és $V'(x_0)\neq 0$, akkor ez a szintfelület az x_0 pont egy kis környezetében ténylegesen is felület, amelynek normálvektora az x_0–beli

$$\underline{\mathrm{grad}}V(x_0)=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_0),\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_0),\dots,\frac{\partial V}{\partial x_d}(x_0)\right)$$

gradiens–vektor, amelyet magával az $1\times d$ méretű $V'(x_0)$ deriváltmátrix–szal azonosíthatunk.

Tekinsük most az $\dot{x}=f(x)$ autonóm differenciálegyenletet az x_0 pont egy kis környezetében. Minden további megfontolásunk központjában

$$\text{a}\quad \langle\underline{\mathrm{grad}}V(x_0),f(x_0)\rangle\quad \text{skaláris szorzat előjele áll.}$$

Ha ez a skaláris szorzat pozitív, azaz a $\underline{\mathrm{grad}}V(x_0)$ és az $f(x_0)$ által közrezárt szög hegyesszög, akkor az $\dot{x}=f(x)$ egyenlet x_0 ponton átmenő trajektóriája az x_0–hoz közeli szintvonalakat azok növekvő sorrendjében metszi, ha negatív, akkor a csökkenő sorrendben. Ez az egyszerű észrevétel messzire, nagyon messzire elvezet, ha azt egy szintfelület, vagyis inkább egy szintfelület–család, egy Matrjosa–baba szerűen egymásba skatulyázott szintfelület–család összes pontjára egyszerre alkalmazzuk. A skaláris szorzat nem–nulla előjele azt a geometriai kényszert fejezi ki, hogy a trajektóriák vagy befelé, a Matrjosa–baba közepe felé haladjanak, vagy kifelé, a fordított irányba, az egyes szintfelületeket belülről kifelé metszve.

2.55. Definíció *Legyen $\mathcal{N}\subset\mathbb{R}^d$ nyílt halmaz és tekintsük az*

$$(E)\quad \dot{x}=f(x)\quad,\qquad x\in\mathcal{N}$$

autonóm differenciálegyenletet és a $V:\mathcal{N}\to\mathbb{R}$ C^1 függvényt. A V függvény (E) egyenlet szerinti deriváltja az $x\in\mathcal{N}$ pontban*:*

$$\dot{V}_{(E)}(x)=\frac{d}{dt}V(\Phi(t,x))\Big|_{t=0},$$

ahol $\Phi(t,x)$ az $\dot{x}=f(x)$ differenciálegyenlet lokális megoldó–operátora az $\mathcal{N}$ halmazon.

Az $\dot{x}=f(x)$ differenciálegyenlet megoldásai általában nem az egész számegyenesen vannak értelmezve, hanem csak addig, ameddig el nem érik az $\mathcal{N}$ halmaz $\partial\mathcal{N}$ határát, tehát esetenként csak nagyon rövid időintervallumokon. Ezen időintervallumok mindegyike nyílt intervallum és a kezdeti $t_0=0$ időpillanatot tartalmazza. Tehát a $t=0$ pontban vett idő szerinti parciális derivált minden gond nélkül értelmezett. Ráadásul $\dot{V}_{(E)}(x)$ *kiszámítása az (E) egyenlet megoldása nélkül is lehetséges.* Sőt, kifejezetten könnyű. Mindössze az összetett függvény deriválási szabályát kell alkalmazni, a

$$\frac{d}{dt}V(\Phi(t,x))=[V'(\Phi(t,x))]\left(\frac{d}{dt}\Phi(t,x)\right)=[V'(\Phi(t,x))]\,f(\Phi(t,x))$$

szereposztással. A $t=0$ helyettesítéssel ebből

$$\dot{V}_{(E)}(x)=[V'(x)]\,f(x)\quad,\quad\text{azaz}\quad \dot{V}_{(E)}(x)=\langle\underline{\mathrm{grad}}V(x),f(x)\rangle\ \text{adódik}.\tag{2.22}$$

A V függvény szigorú minimumhelyeinek környezetében a $\dot{V}_{(E)}(x)\leq 0$ és a $\dot{V}_{(E)}(x)<0$ egyenlőtlenségek stabilitáshoz illetve aszimptotikus stabilitáshoz vezetnek.

Ljapunov ⟶ nem-lokális módszer

2.57. Definíció *Az $N \subset \mathbb{R}^d$ halmaz erős Ljapunov felület az $\dot{x} = f(x)$ autonóm differenciálegyenletre nézve, ha van olyan $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ C^1 függvény és olyan $c \in \mathbb{R}$ állandó, hogy*

$$N \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) = c\} \quad \text{és} \quad \langle \underline{grad} V(x), f(x) \rangle < 0 \ \forall\, x \in N\,.$$

Az alternatív szóhasználat szerint a V erős Ljapunov függvény az $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d$ halmazon, ha $\langle \underline{grad} V(x), f(x) \rangle < 0$ minden $x \in \mathcal{N}$ esetén.

N halmaz ⟶ Ljap. felület $\quad \dot{x} = f(x)$ - re?

ha $\exists\, V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ és ↳ autonóm diffegyenlet

$\exists\, c$ melyre

$N \subset \{x \mid V(x) = c\}$ és $\langle \underline{grad}\, V(x), f(x) \rangle < 0 \quad \forall x \in N$

lokálisan stabil, aszimptotikusan stabil

2.56. Tétel *A.) Legyen az $x_0 \in \mathbb{R}^d$ pont egyensúlyi helyzete az (E) egyenletnek, azaz legyen $f(x_0) = 0$. Legyen továbbá az $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d$ halmaz az x_0 pont nyílt környezete, és legyen $V : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ olyan C^1 függvény, amelyre*

$$V(x_0) < V(x) \ \forall\, x \in \mathcal{N} \setminus \{x_0\} \quad \text{és} \quad \dot{V}_{(E)}(x) \le 0 \ \forall\, x \in \mathcal{N}\,. \tag{2.23}$$

x₀-hoz közel csökkenő sorozatban mutat a változatlant

Ekkor az x_0 egyensúlyi helyzet (lokálisan) stabil.

B.) Tegyük fel, hogy a (2.23) feltétel helyett teljesül az alábbi tulajdonság:

$$V(x_0) < V(x) \ \forall\, x \in \mathcal{N} \setminus \{x_0\} \quad \text{és} \quad \dot{V}_{(E)}(x) < 0 \ \forall\, x \in \mathcal{N} \setminus \{x_0\} \tag{2.24}$$

Ekkor az x_0 egyensúlyi helyzet (lokálisan) aszimptotikusan stabil.

Legyen továbbá $c > V(x_0)$ olyan állandó, amelyre

$$\mathcal{N}_{c,\le} = \{x \in \mathcal{N} \mid V(x) \le c\} \quad \text{korlátos és mint } \mathbb{R}^d \text{ részhalmaza, zárt.} \tag{2.25}$$

Ekkor az $\mathcal{N}_{c,\le}$ halmaz része az x_0 egyensúlyi helyzet attraktivitási tartományának,

lokálisan stabil x_0 egyensúlyi helyzet: ↳ $\dot{x} = f(x)$, $f(x_0) = 0$

$\mathcal{N}$ x_0 környezete, $V : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$

$V(x_0) < V(x) \quad \forall x \in \mathcal{N}$ és $\dot{V}_{(\dot{\epsilon})}(x) \le 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}$

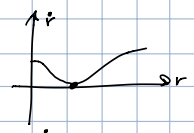
ha $\dot{V} < 0 \Rightarrow$ aszimptotikusan stabil

$\exists\, c > V(x_0)$: $\mathcal{N}_c = \{x \in \mathcal{N} \mid V(x) \le c\}$ korlátos zárt

ekkor $\mathcal{N}_c$-re x_0 egyensúlyi helyzet attraktivitási tartományának

Periodikus pálya stabilitása

polárkoordinátákkal →



megmúlnak magasrendű gyökeret lenni

tanító kör

periodikus pályát nem tudjak előre kizárni → nem tudjak stabil-e

nem nőnek meg magasrendű gyökeret lenni

vonzó kör

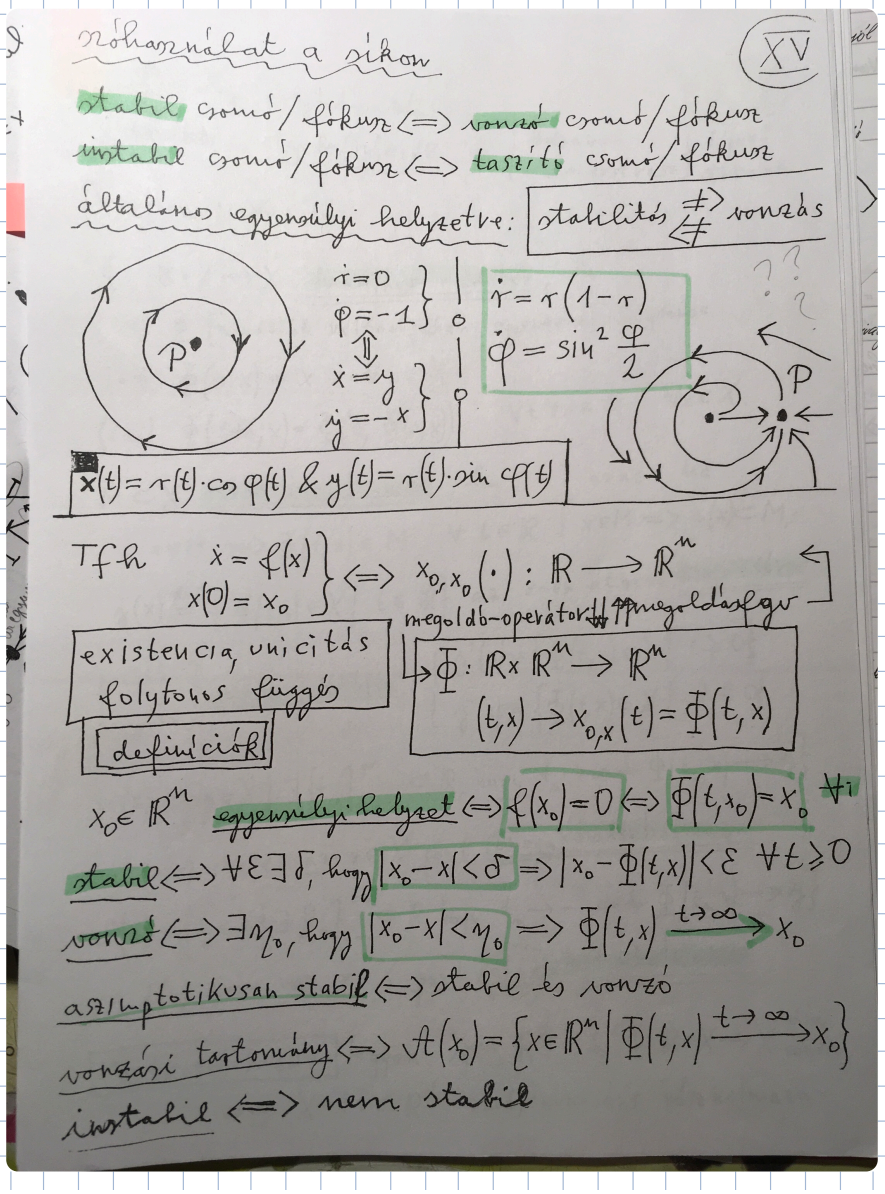
ha N globálisan vonzó $\Rightarrow \exists$ periodikus pálya (Ljapunov)

U_{min}

$\dot{V} < 0 \longrightarrow$ trajektóriák zárt görbét belefelé metszik a niveauvonalat

ha $\exists$ periodikus pálya arra belül lenne egyensúlyi helyzet

távoli pont tanító jellege



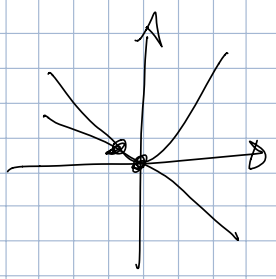
Paraméterek

Bifurkáció

$\dot{x} = \mu - x^2$

$\dot{y} = -y$

$Df \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



$\mu = 0$

egyensúlyi pont $\dot{x} = 0$ ha $x = \pm\sqrt{\mu}$

$\dot{r} = \mu r - r^3$ Hopf bifurkáció

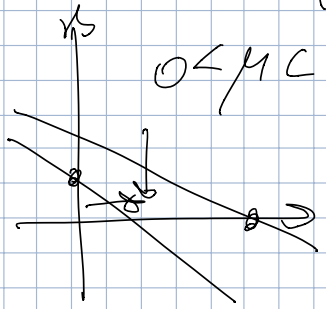
$\dot{\varphi} = -1$

$r(\mu - r^2)$

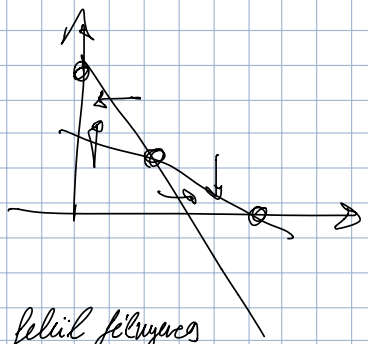
$r = 0$

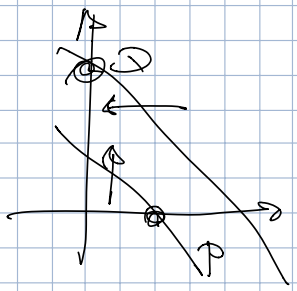
$r = \pm\sqrt{\mu}$

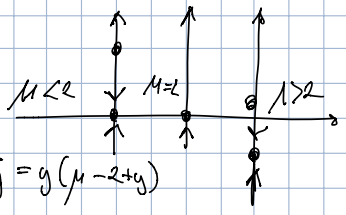
$\varphi = -1$



$0 < \mu < 1$







$\mu < 2$ $\mu = 2$ $\mu > 2$

$\dot{y} = y(\mu - 2 + y)$

felül felvevues alul csomó

↳ transzkritikus bifurkáció

Hopf $\dot{r} = r(\mu - r^2)$

$\dot{\varphi} = -1$

$\dot{r} = \pm r\mu \pm r^3$

$\dot{\varphi} = -1$

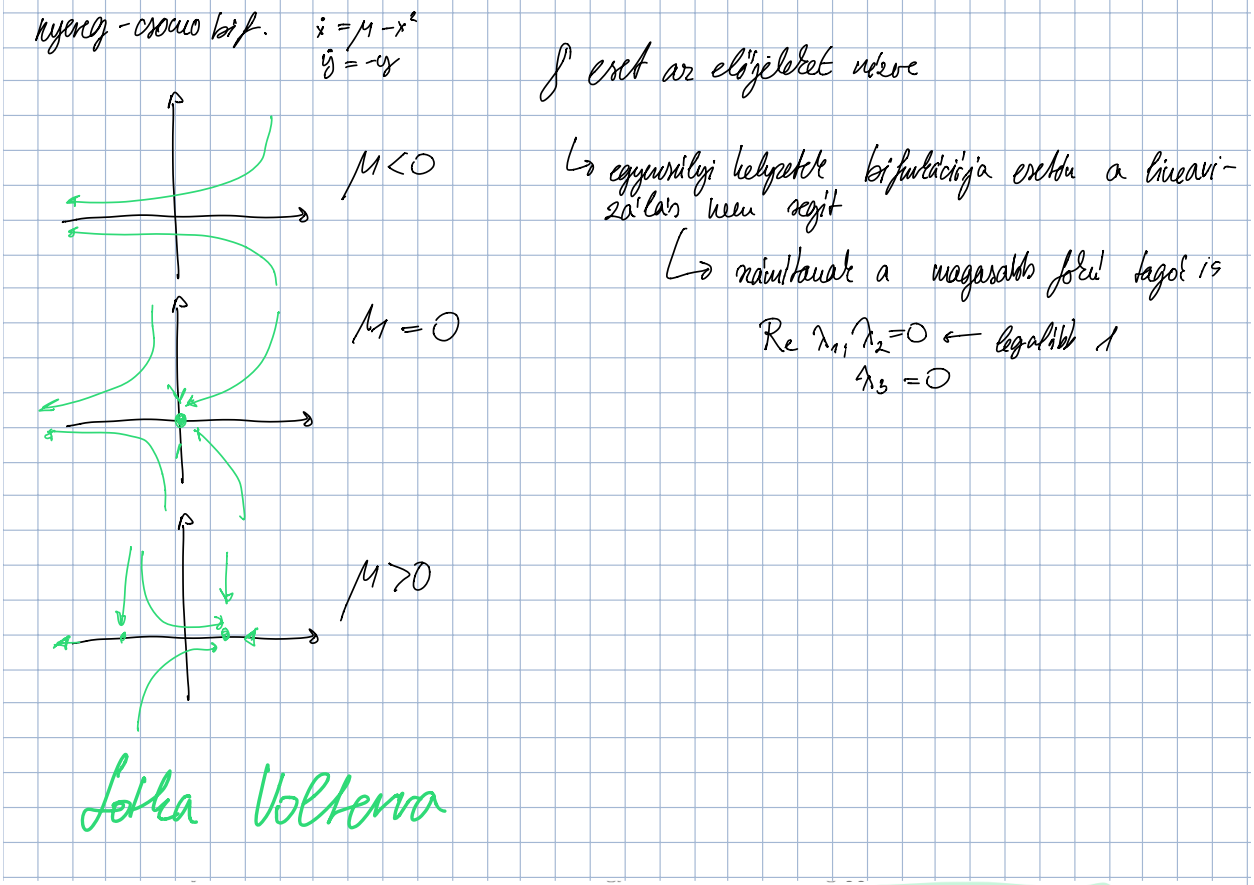
↳ tanítás/lovasok

$\mu \longrightarrow$ irány

$\mu > 0$

$\mu = 0$ tanulóban

$\mu < 0$



Ez eddig elmondottak mind–mind kiterjeszthetők arra az esetre, amikor több, egymás élet–lehetőségeire a legkülönfélébb módokon ható fajokból álló ökoszisztémákat vizsgálunk. Ez a *többfaj–modellek* világa. Két faj együttélésének (közös erőforrásokért) *versengő, szimbiotikus,* avagy éppen *ragadozó–zsákmány* eseteinek szokásos

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x(c_1 + a_1 x + b_1 y) \\ \dot{y} &= y(c_2 + a_2 x + b_2 y) \end{aligned}\right\} \quad \text{ahol } c_1, c_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \text{ adott konstansok és } x, y \geq 0 \tag{16}$$

kvadratikus differenciálegyenlet–modellje Lotka és Volterra nevéhez fűződik. Az esetszétválasztásokat a $c_1, c_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ paraméterek előjelei határozzák meg. A hat paraméter közül három (de nem bármelyik három) lineáris változó–helyettesítésekkel ± 1–re kiskálázható. A Kolmogorov féle általánosítás

$$\dot{x}_k = x_k f_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) \quad \text{ahol } x_k \geq 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, d \tag{17}$$

alakú. Itt $f_k : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, d)$ adott folytonosan differenciálható függvények. A biológiailag releváns fázistér — amint az a (16) és a (17) egyenletrendszerekben is megjelenik — $\mathbb{R}^2$ illetve $\mathbb{R}^d$ nemnegatív (és az indukált dinamikára invariáns) ortánsa. Magától értetődik, hogy az ortánsok végtelen távoli pontja egyetlen trajektóriát sem vonzhat: minden trajektóriának $t \to \infty$ mellett a biológia okán egyenletesen korlátosnak kell maradnia. Ez azt is jelenti, hogy szimbiotikus ökoszisztémákat kvadratikus Lotka–Volterra rendszerekkel csak az $\mathbb{R}^d$ korlátos részhalmazain lehet modellezni.

A *kétdimenziós Lotka–Volterra* (16) *rendszerek* konkrét példákon és általánosításokon át történő — nem minden részletében egyformán olvasmányos, de reményeim szerint mégiscsak jól követhető — bemutatása a Nemlineáris Dinamika jegyzet[22] 3.8 fejezetében található. A dinamika jellege az egyensúlyi helyzetek kis környezetében a linearizálás módszerével, a "nyom–determináns" ábra szerinti esetszétválasztásokkal állapítható meg. Az $x \geq 0$, $y \geq 0$ síknegyeden kívüli pontokkal nem kell törődnünk, mivel azok semmilyen biológiai jelentést sem hordoznak. Az origó mindig egyensúlyi helyzet, a vízszintes $y = 0$, $x \geq 0$ és a függőleges $x = 0$, $y \geq 0$ féltengelyek pedig egyenként is mindig invariánsak: a dinamika rajtuk könnyen megrajzolható.

$$\dot{x} = x(c_1 + a_1 x + b_1 y)$$
$$\dot{y} = y(c_2 + a_2 x + b_2 y)$$

$x, y \geq 0$

szimbiózis

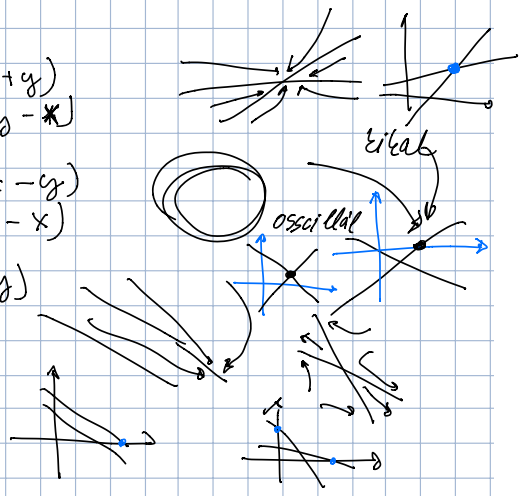
$$\dot{x} = x(1 - x + y)$$
$$\dot{y} = y(1 - 3y - x)$$

versengő

$$\dot{x} = x(2 - x - y)$$
$$\dot{y} = y(1 - y - x)$$

ragadozó–zsákmány

$$\dot{x} = x(2 - x + y)$$
$$\dot{y} = y(1 - y - x)$$



4. tétel — Példák hálózatokon értelmezett dinamikára

- évenkénti adóbevallások $x_{i,t+1} = F(\overline{x}_{i,t})$ átlagolás modellje
  elégséges feltétel globálisan aszimptotikusan stabil homogén fixpont létezésére, matematikai vonatkozások
- véletlen gráfok Erdős-Rényi, Strogatz-Watts, Barabási-Albert típusai + függvényegyenlet
  járványterjedés
- további modellek nézőszögösödés → gyakorlat, más tárgy

Adóbevallások

AZ ADÓCSALÁS EGY ÁGENS–ALAPÚ MODELLJE Adott egy irányítás nélküli $\mathcal{G}$ gráf, amelyben sem hurokélek, sem többszörös élek, sem izolált csúcsok nincsenek. A $\mathcal{G}$ gráf $V(\mathcal{G}) = \{1, 2, \ldots, N\}$ csúcsai egy ország adófizetőit jelentik. Az i–edik csúcs fokszáma $d_i > 0$, az i–edik csúccsal szomszédos csúcsok halmaza $\mathcal{N}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, amely tehát az i–edik adófizető ismerőseit — látni fogjuk, bizalmas ismerőseit — jelenti. Ebben az országban *egykulcsos adó* van, és az adó befizetése évente egyszer, önkentes adóbevállás alapján történik. A matematikai egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy minden adófizető éves jövedelme egyformán egységnyi. Jelölje $0 < \theta < 1$ az *adókulcs* mértékét. A t–edik évben $(t = 0, 1, \ldots)$ az i–edik adófizető által bevallott jövedelem legyen $x_{i,t}$.

Az adófizetők azonban nem tisztelik a törvényt. *Feltéve, de meg nem engedve* a modell szerint nem vallják be teljes jövedelmüket: a feltételezés szerint mindenki úgy csal a rákövetkező évben, hogy a saját ismerősei által bevallott jövedelmek átlagát veszi alapul és az $x_{i,t+1}$ értékét egy kétváltozós *elégedettségi függvény* feltételes maximumhelyeként számolja ki. Az elégedettségi függvényt egyrészt *a nála maradó* $1 - \theta x_{i,t+1}$ *összeg nagysága*, másrészt *a várható büntetéstől való félelem* határozza meg: ez utóbbi egyenesen arányos mind *a bizalmas ismerősök által az előző évben bevallott* $\overline{x_{i,t}}$ *átlagos jövedelem*–mel, mind egy, *az adott országra jellemző* $m > 0$ *moralitási tényező*–vel. Az elégedettségi függvény definíciója — a

---

$\mathcal{G}$ – irányítás nélküli gráf

i – index → csúcsok : adófizetők
(i,j)-élek → bizalmas ismeretség

$0 < \theta < 1$ adókulcs (normált modell → egységes fizetés)

$$x_{i,t+1} = F\left(\frac{1}{\#\mathcal{N}_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} x_{j,t}\right)$$ ← ismerősök által bevallott jövedelmek átlaga

$\forall$ személy jövedelme = 1

elégedettségi fv: nála maradó összeg + valóban büntetéstől való félelem
↳ arányos → ország moralitási tényezőjével $m > 0$
↳ előző évben bevallott átlagos jövedelemmel $\overline{x}_{i,t}$

elégedettségi fv.

közgazdászok szeretik a logaritmus függvényt[53]:

$$\mathcal{U} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1] \quad , \qquad (x, \overline{x}) \to \mathcal{U}(x, \overline{x}) = \ln\big(1 - \theta x\big) + m\overline{x}\big(x - \ln(x)\big) \, .$$

Az i–edik adófizető a $(t+1)$–edik évben bevallott jövedelmét a most már egyedül logikus

$$\overline{x_{i,t}} = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} x_{j,t} \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots, N \, , \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

képlet és a szintén plauzibilis

$$x_{i,t+1} = F(\overline{x_{i,t}}) \quad , \qquad \text{ahol} \quad F(\overline{x}) = \arg\max \mathcal{U}(\cdot, \overline{x}) \tag{30}$$

formula szerint számolja ki. Természetesen bizonyításra szorul, hogy a (30) formula valóban jóldefiniált. Ehhez pedig a magától értetődő $0 \leq x_{i,0} \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ feltétel és az $\mathcal{U}(\cdot, \overline{x})$ függvény konkavitása a $[0,1]$ intervallumon éppen elegendő[54].

A kapott diszkrét idejű dinamikus rendszer állapottere a $[0,1]^N$ egységkocka, a dinamikát definiáló leképezés pedig

$$\mathcal{F} : [0,1]^N \to [0,1]^N \, , \quad \big(\mathcal{F}(\mathbf{x})\big)_i = F\left(\frac{1}{d_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} x_j\right) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, N \, .$$

A dinamika annyiban van csak a $\mathcal{G}$ gráfon definiálva, hogy az i index (amely az egységkocka adott pontjához annak i–edik koordinátáját rendeli) a $\mathcal{G}$ gráf i–edik csúcsára utal.

Az $m > \theta$ feltétel mellett implicit deriválásokkal könnyű igazolni, hogy az $F : [0,1] \to [0,1]$ függvény kielégíti az $F'(0) = \frac{m}{\theta} > 1$, $F' > 0$, $F'' < 0$ egyenlőtlenségeket. Mivel $F(0) = 0$, az F függvénynek egyetlen $x^* > 0$ fixpontja van a $[0,1]$ intervallum belsejében, és az is világos, hogy az $x^{\ell+1} = F(x^\ell)$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ iterációt bármely $0 \neq x^0 \in [0,1]$ pontból indítva az $\ell \to \infty$ határátmenetben $x^\ell \to x^*$.

hasonlósági fv = elégedettségi fv:

$\mathcal{U}(x, \bar{x}) = \ln(1 - \theta x) + m \cdot \bar{x}(\ln x - x)$

$F(x) = \operatorname{argmax} \mathcal{U}(\cdot, \bar{x})$

elégséges felt. glob. aszimpt. stabil homogén fixpont létezésre

Véletlen gráfok

szociológiában, biológiában
gene regulator circuits → DNS és fehérje közti összjáték

Erdős–Rényi gráfok: Adva van n csúcspont és egy $0 < p < 1$ szám. Az n csúcspont között lehetséges $\binom{n}{2}$ él mindegyikét p valószínűséggel behúzzuk. Az így kapott $\mathcal{G}(n,p)$ gráf csúcsainak fokszámeloszlása a

$$P(\deg(v) = k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

binomiális eloszlás, amely nagy n–re jól közelíthető a $\mathcal{N}(\mu, \sigma) = \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ normális eloszlással. Az $np = \lambda > 0$, $n \to \infty$ határátmenetben a

$$P(\deg(v) = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Poisson eloszlás a határérték.

Az Erdős–Rényi gráfokra jellemzőek *a határértékképzés kritikus konstansai*[60]. Ezek a kritikus konstansok a gráf bizonyos vagy–vagy tulajdonságaival függenek össze, amelyek az egyes esetekben aszimptotikusan egy valószínűséggel teljesülnek. Hogy csak a legegyszerűbb példákat vegyük,

$$\begin{array}{lcl} \lim_{n\to\infty} \frac{np}{\ln(n)} < 1 & \Rightarrow & \mathcal{G}(n,p) \text{ nem összefüggő} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{np}{\ln(n)} > 1 & \Rightarrow & \mathcal{G}(n,p) \text{ összefüggő} \end{array}$$

és

$$\begin{array}{lcl} \lim_{n\to\infty} np < 1 & \Rightarrow & \mathcal{G}(n,p) \text{ maximális komponensének nagyságrendje } \text{const} \cdot \ln(n) \\ \lim_{n\to\infty} np > 1 & \Rightarrow & \mathcal{G}(n,p)\text{–ben pontosan egy óriás–komponens van, } \text{const} \cdot n \text{ nagyságrenddel.} \end{array}$$

Strogatz–Watts gráfok[61]: a Watts–Strogatz konstrukció az n csúcsú d–reguláris körgráfból indul ki, amelynek $\frac{nd}{2}$ számú éle van. (Itt $2 \leq d < 2n$ szükségképpen páros szám: a d–reguláris körgráfot a hagyományos körgráfból kiindulva úgy kapjuk meg, hogy minden egyes csúcsot a tőle jobbra és balra $\leq \frac{d}{2}$ hosszúságú úttal elérhető többi csúccsal is közvetlen éllel kötjük össze. A gyakorlatban szokásos paraméter–választás $1 \ll \ln(n) \ll d \ll 2n$.) Körbemenve a $V_1, V_2, \ldots, V_n$ csúcsokon, a V_i csúcstól "hátrafelé" "induló" (V_j, V_i) élek mindegyikét $0 \leq \beta \leq 1$ valószínűséggel kicseréljük egy akkor–éppen–nem–élre, amelynek egyik végpontja a V_i csúcs marad (az akkor–éppen–nem–élek közül az egyenletes eloszlás szerint válogatva). Így az eredeti d–reguláris körgráf minden egyes élére pontosan egyszer kerül sor, és a konstrukció mindvégig kizárja többszörös vagy hurokélek létrejöttét. A $\beta = 0$ esetben az eredeti d–reguláris körgráf változatlan marad, a $\beta = 1$ esetben pedig egy $\mathcal{G}(n,p)$ Erdős–Rényi gráfot kapunk, ahol — hiszen az élek száma nem változott — $p = \frac{nd}{2} / \binom{n}{2}$. A β interpolációs paraméter szokásos választása egyébként $0 < \beta \ll 1$.

Barabási–Albert gráfok: a Barabási–Albert konstrukció kiindulópontja bármely n_0 csúcspontú $\mathcal{G}_{n_0}$ (szokás szerint összefüggő) gráf lehet, amelyhez lépésenként mindig egy új csúcspontot veszünk hozzá. Az új csúcspontot és a már korábban meglévő csúcspontokat rendre $0 < m \leq n_0$ számú éllel kötjük össze, a párhuzamos és a hurokéleket most is kizárva. Az új élek behúzása azonban nem egymástól független véletlenek szerint történik, hanem preferenciákat, a régi csúcspontok tudatos súlyozását követi. Az $n_0 + i + 1$–ik ($i = 0, 1, \ldots$) új csúcspontnak a j–edik ($j = 1, 2, \ldots, n_0 + i$) csúcsponttal való összekötése annál valószínűbb, minél nagyobb a j–edik csúcspont aktuális fokszáma. A Barabási–Albert preferenciaszabály szerint

$$(n_0 + i + 1, j) \in E(\mathcal{G}_{n_0+i+1}) \text{ valószínűsége egyenesen arányos } \frac{\deg(j)}{\sum_{1 \leq k \leq n_0+1} \deg(k)} \text{–val}\,.$$

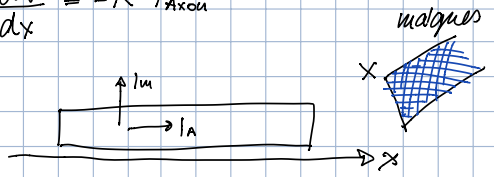
Matematikailag bizonyított eredmény, hogy az $i \to \infty$ határátmenetben az egyre növekvő gráf aszimptotikus fokszámeloszlása a

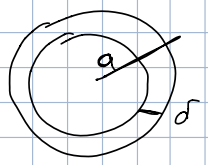
$$P(\deg(v) = k) \approx \frac{\text{const(m)}}{k^3}\,, \qquad k \gg n_0 \tag{32}$$

7. tétel — Idegi ingerületvezetés: Hodgkin-Huxley alapmodell

- kialakulás a tintahal óriás axonon
- ionáramlás az idegrost sejthártyáján át, mi hajtja
- ekvivalens áramköri modell és egyenlet rendszer
- ingerküszöb és regenerációs időküszöb
- AP mint ingerületbe adott válasz és hová tartozó "V", "Na-pumpa", "K-pumpa"
  ↳ "h, m, n" ábrák
- Utazó hullám az idegrostban és H-H egyenletrendszerben

$$\frac{dV}{dx} = -R \cdot I_{Axon}$$





tintahal óriás axon → 10 cm
$\frac{1}{2}$ mm vastag

Kábel egyenlet

(1) $\frac{\partial V}{\partial x} = -R I_{axon}$

(2) $\frac{\partial I_{axon}}{\partial x} = I_{membrán}$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -R \frac{\partial I_{axon}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = I_{membrán} \cdot R$$

Helyettesítő áramkört alkotnak → idő

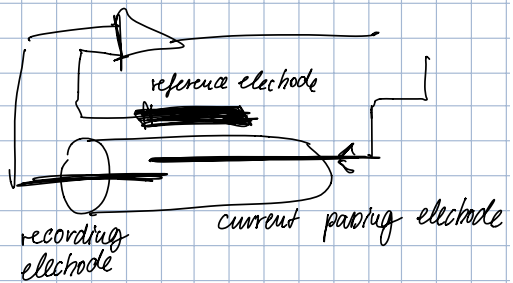
induktív jelenség elhanyagolható $V_L = L \frac{\partial I_R}{\partial t}$

lineáris ellenállás $V_R = I_R \cdot R$

kapacitív tag $V_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} I_C(s)\,ds \rightarrow V_C = \frac{1}{C} I_C$

↳ más egyenleteket is csatolni kell → t valhoz + deriválás

I. PDE + 3 KDE → parabolikus ⟹ utazó hullám



Utard hullam (stabil) sebessége ugyanaz szegpen mint valóságban → 20 m/s

II. HKDE → erüst dirót az axon közepén → x-től nem függ semmi
Erüst dirót jól vezeti az áramot
V től függ

Ionokat külön vezetik Cl^-, K^+, Na^+

KDE paramétereket helyett függvényeket használ → SOK SZÁMOLÁS

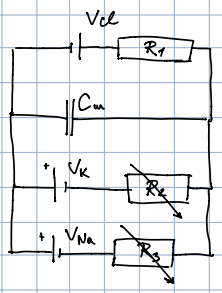
Víz hűlése constansok nélkül → $T(t) = T^* - T(t)$ → exponenciális
Newton féle csillapítási törvény

analógiája:

$\tau_n(V)\ \dot n = n_*(V) - n$ $\qquad n_* = \lim_{V\to\infty} n(V)$

$\dot h = \alpha_h(V)\,h + \beta_h(V)(1-h)$ → kapu nyílik és csukódik

A'vezetői helyettesítő kép:



lineáris ellenállás

nem lineáris ellenállás
↳ feszültség függő

vezetőképesség: $g = \frac{1}{R}$

$\bar g_*$ - konstans

kapuállandók → $g_{ce} = \bar g_{ce}$

$g_K = \bar g_K \cdot h \cdot m^4$

$g_{Na} = \bar g_{Na} \cdot m^4$

h, m, n
$\tau_h(V)$
$\tau_K(V)$ $\frac{1}{V}$ és e^{-V} -vel fejezhető ki

Nernst - törvény

hajtó erő: koncentráció különbség : diffúzió $k \leftarrow K$
feszültség különbség : elektromos erő $+ \longrightarrow -$

Egyensúlyi állapot → 1 ionra $\quad -\alpha c' - \beta c\varphi = 0 \Rightarrow \frac{c'}{c} = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\varphi' \;\Big|\int_{a-\delta}^{a}$ $\quad \ln\frac{c_{out}}{c_{in}} = \frac{\beta}{\alpha}(\varphi_{in} - \varphi_{out})$

1 mennyiségből elég 3-at mérni
1 mennyiségnél validálható a modellt

$V_E = \frac{-RT}{zF}\ln\frac{c_{i,E}}{c_{e,E}}$

Erüst dirót kísérlet

$$C_m \dot V = -g_{ce}(V - V_{ce}) - g_{Na}(V - V_{Na}) - g_K(V - V_K) + \frac{I_{stimulus}}{A\ (felület)}$$

$\tau_m(V)\,\dot m = m_\infty(V) - m$

$\tau_h(V)\,\dot h = h_\infty(V) - h$

$\tau_n(V)\,\dot n = n_\infty(V) - n$

$\sum I_i = g_{Na} m^3 h (u - E_{Na}) + g_K n^4 (u - E_K) + g_L (u - E_L)$

$E_{L,Na,K}$ — reversal potential

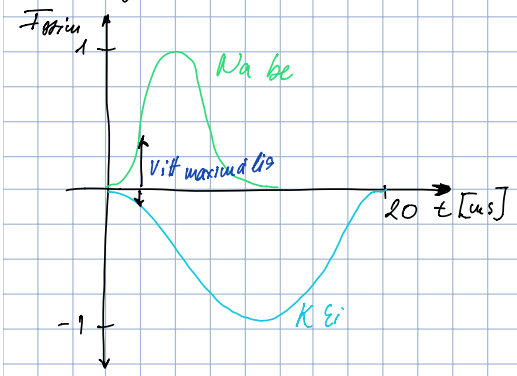
Ion víz molekulákkal együtt megy át a membránok

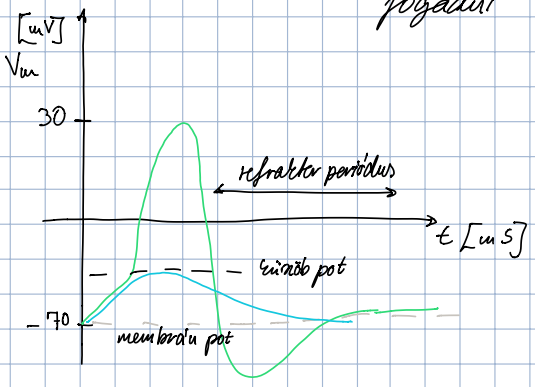
2 féle kapunyitási-zárási mechanizmus

Dugó

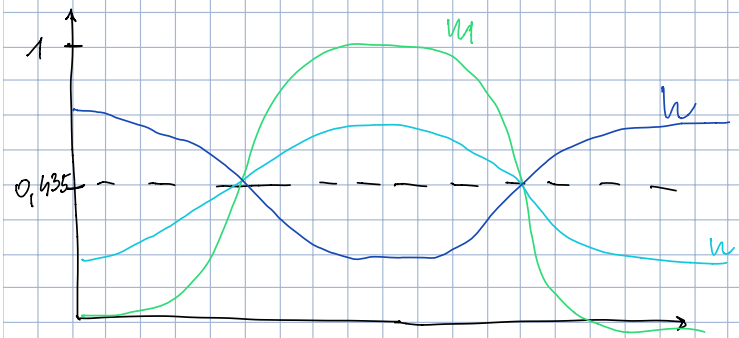
Önmenülődés

1 regenerációs ciklus → refrakter periódus — miért nem tud újabb ingert fogadni





h, m, n



gyors változó: V, m

lassú változó: h, n

$h+n \approx 0{,}87$

$n(t,x) = \bar{g}_{Ka}\, h \cdot m^3 = g_{Na}$, $g_K = \bar{g}_K \cdot n$

$U(x-ct) =$

Utazó hullám PDE-ben $v(t,x) = V(x-ct)$

c = sebesség

$c \cdot t = dt$

H-H DE rendszer

1. $$I = C_m \frac{dV_m}{dt} + \bar{g}_K n^4 (V_m - V_K) + \bar{g}_{Na} m^3 h (V_m - V_{Na}) + \bar{g}_e (V_m - V_L)$$

2. $$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(V_m)(1-n) - \beta_n(V_m) n$$

3. $$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(V_m)(1-m) - \beta_m(V_m) m$$

4. $$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(V_m)(1-h) - \beta_h(V_m) h$$

$$\alpha_p(V_m) = p_\infty(V_m)/\tau_p$$

$$\beta_p(V_m) = (1 - p_\infty(V_m))/\tau_p$$

$$I = C_k \cdot \frac{dV}{dt} - g_{Na}(V_m - V_{Na}) - g_K(V_m - V_K) - g_{Ce}(V_m - V_{Ce})$$

1 $$C_m \dot{V} = -g_{Na}(V_m - V_{Na}) - g_K(V_m - V_K) - g_e(V_m - V_L)$$

2 $$\tau_m \dot{m} = m_\infty(V_m) - m$$

3 $$\tau_n \cdot \dot{n} = n_\infty(V_m) - n$$

4 $$\tau_h \cdot \dot{h} = h_\infty(V_m) - h$$