

Parciális differenciálegyenletek megoldása CNN-en



András Horváth

ODE- Ordinary differential equation

Egy változónk van és egy függvényt keresünk:

$$F(t, y, y', y'', y''', \dots) = 0$$

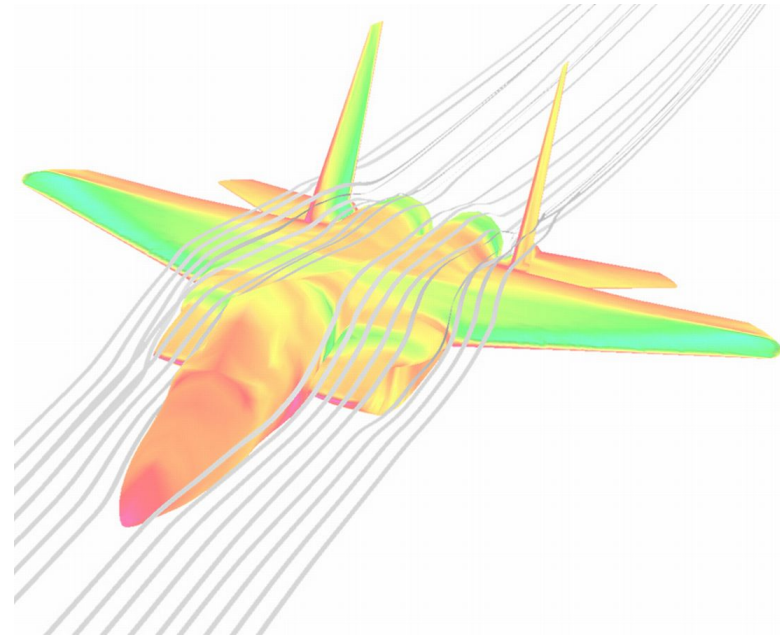
A megoldás $y=y(t)$ függvény

A differenciálegyenlet: $y' = ky$

A megoldása: $y = Ce^{kt}$

A differenciálegyenlet: $y'' - y = 0$

A megoldása: $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$



PDE- Partial differential equation

Többváltozós verziója az ODE-knek:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}, \dots) = 0$$

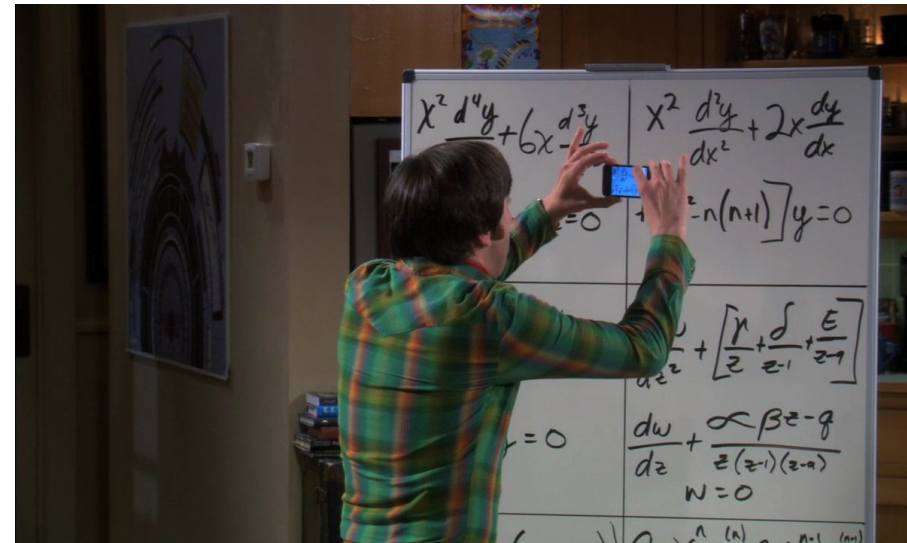
A megoldás $y=y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvény

A diffegyenlet:
$$x \frac{\partial u}{\partial x_1} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

A megoldása:
$$u(x, y) = x^2 + y^2$$

A diffegyenlet:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

A megoldása:
$$u(x, y) = x^2 - y^2$$



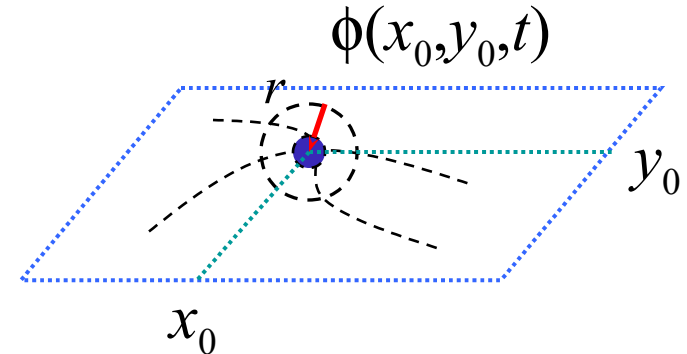
Local and Global PDEs

Local PDE:

- a rendszer dinamikája bármely pontban csak lokális tulajdonságoktól függ

$$\dot{\phi}_r(x, y, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \Gamma(\phi_r(x, y, t))$$

$$\{ \forall (x_0, y_0, t) \mid r \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma = \Gamma(x_0, y_0, t) \}$$

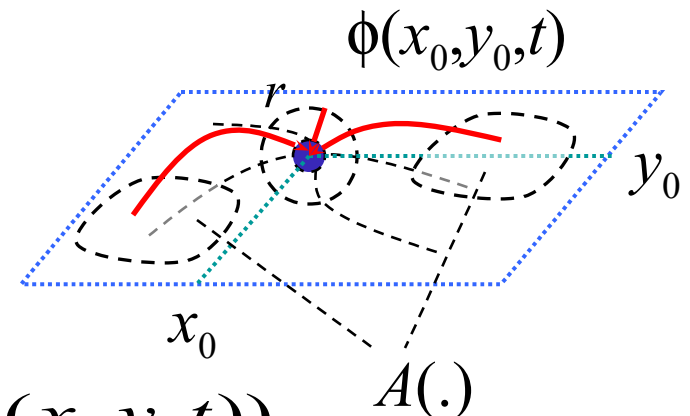


Global PDE (Sapiro et. al):

- Létezik olyan pont, ahol a rendszer dinamikája globális (távoli) tulajdonságoktól függ

$$\dot{\phi}_r(x, y, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \Gamma(\phi_r(x, y, t), A(x, y, t))$$

$$\{ \exists (x_0, y_0, t) \mid r \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma = \Gamma(x_0, y_0, t, A(.)) \wedge A(.) \neq 0 \}$$



Miért fontosak a PDEk?

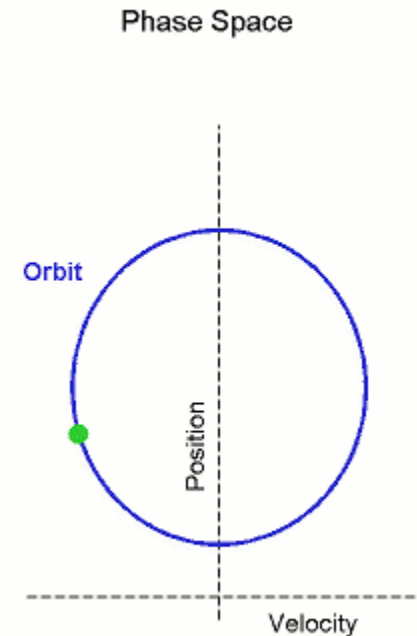
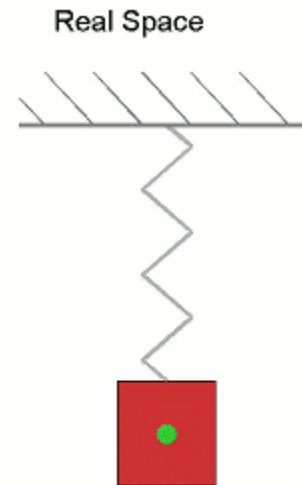
A fizikai világunk nagyon jó és tömör leírói.

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -y$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = x$$



$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

PDE példák

Wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

Heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u$$

Gradient operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \dots$$

Laplacian

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots$$

Wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

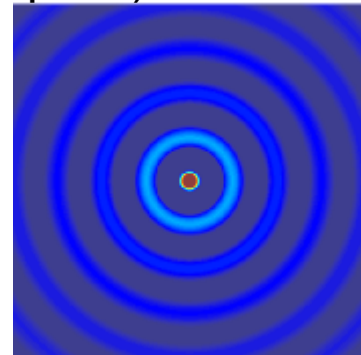
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Wave equation: egy hullám terjedése egy adott közegben (áramlástan, elektromágneses hullámok)

Egydimenziós hullám
konstans amplitudóval



Kétdimenziós hullám
csökkenő amplitudóval
(csillapítás)

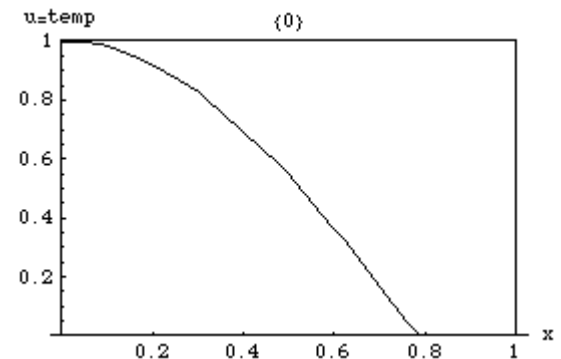


Heat Equation

Heat equation

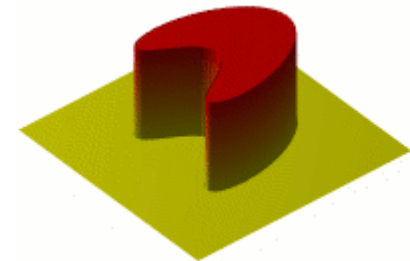
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u$$

Egy idő beli változó és két vagy több térbeli változó.



$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots$$



PDE megoldása

Egy megoldás ellenőrzése könnyű, ugyanúgy mint ODE esetén. Ki tudjuk számolni a függvény és a derivált értékét minden pontban.

A megoldás megkeresése azonban rendkívül bonyolult.
ODE-k esetében több módszer is létezik (próbafüggvény, SÉ SV...).

Nem létezik általános eljárás PDE megoldására
Különböző osztályokra vannak analitikus megoldási módszerek.

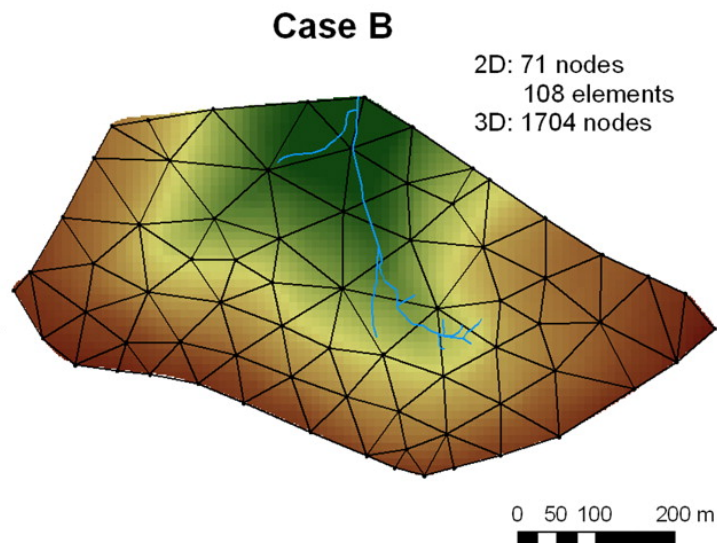
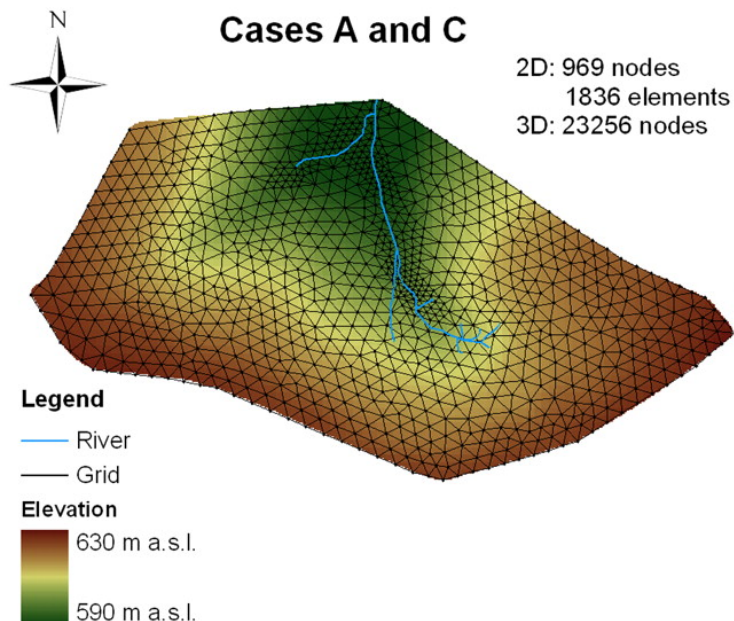
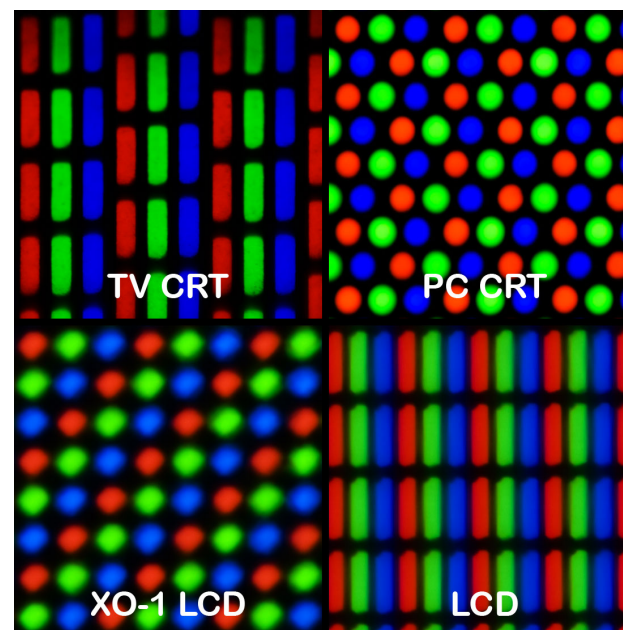
PDE-ket általában hagyományos számítógépen numerikusan közelítjük

Diszkretizáció

Térben és időben folytonos, diszkretizálni kell

Térbeli diszkretizáció:

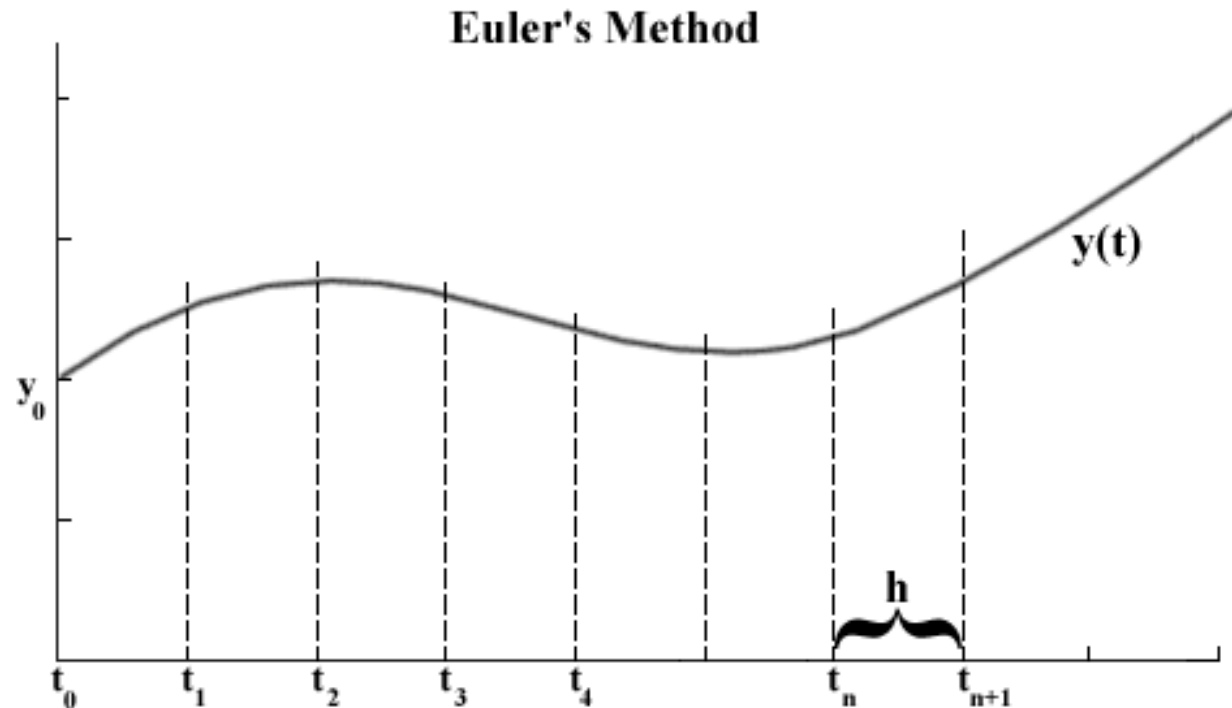
Mintavételezés adott pontokban (pixelek)



Numerikus közelítés

Időbeli diszkretizáció:

Euler módszer



$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

$y(t)$ is the solution of this differential equation

This is Euler's formula to approximate the solutions.

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Numerikus közelítés

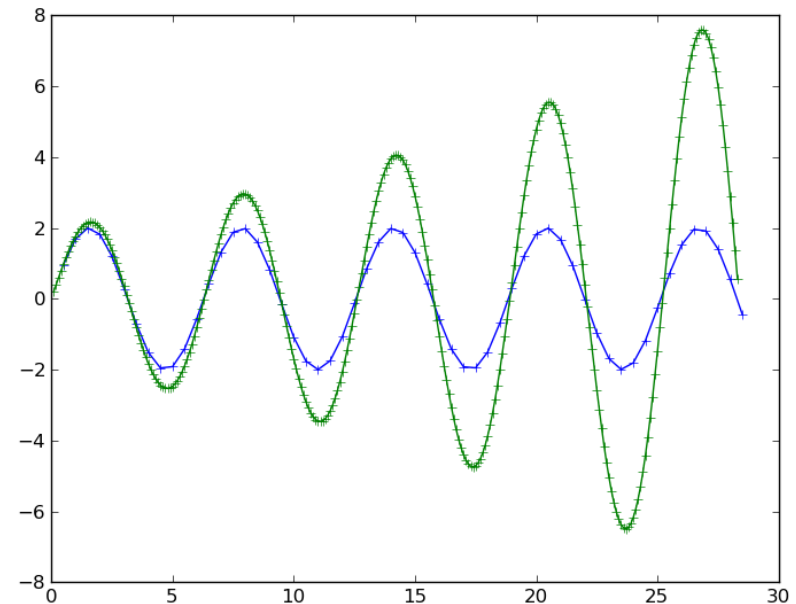
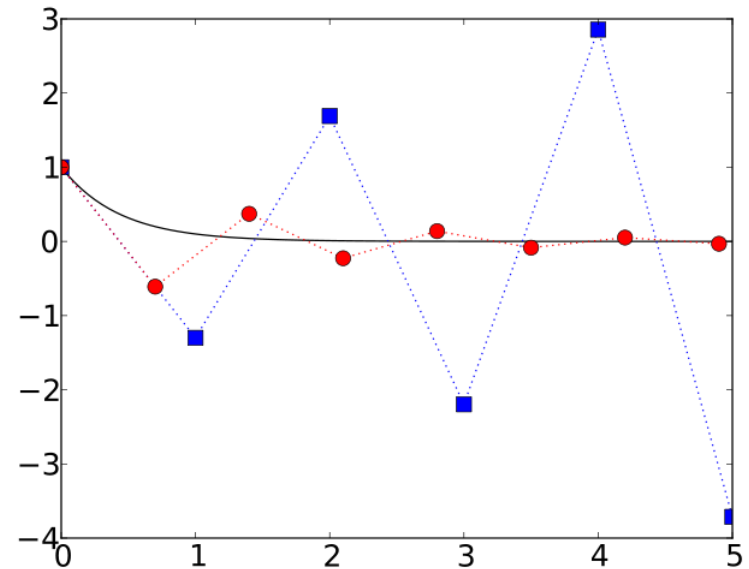
Időbeli diszkretizáció:

Eluer módszer

Sajnos nem stabil, az időbeli diszkretizáció sok gondot okozhat.

Divergál – numerikusan instabil (energiát teremt)

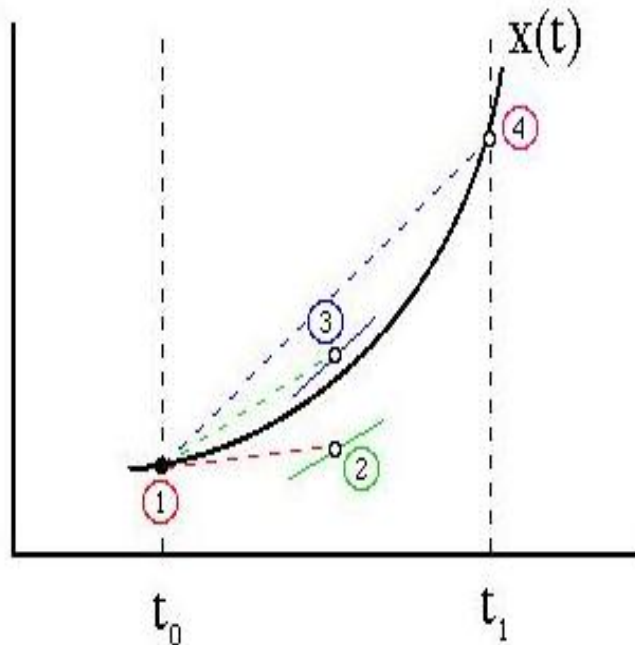
Implicit/explicit Euler módszer,
Backward euler



Numerikus közelítés

Időbeli diszkretizáció:

Runge-kutta



$$\begin{aligned}
 dx_1 &= \Delta t v_{x,n} \\
 dv_{x1} &= \Delta t a_x(x_n, y_n, t) \\
 dx_2 &= \Delta t \left(v_{x,n} + \frac{dv_{x1}}{2} \right) \\
 dv_{x2} &= \Delta t a_x \left(x_n + \frac{dx_1}{2}, y_n + \frac{dy_1}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \\
 dx_3 &= \Delta t \left(v_{x,n} + \frac{dv_{x2}}{2} \right) \\
 dv_{x3} &= \Delta t a_x \left(x_n + \frac{dx_2}{2}, y_n + \frac{dy_2}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right) \\
 dx_4 &= \Delta t \left(v_{x,n} + dv_{x3} \right) \\
 dv_{x4} &= \Delta t a_x \left(x_n + dx_3, y_n + dy_3, t + \Delta t \right) \\
 x_{n+1} &= y_n + \frac{dx_1}{6} + \frac{dx_2}{3} + \frac{dx_3}{3} + \frac{dx_4}{6} \\
 v_{x,n+1} &= v_{x,n} + \frac{dv_{x1}}{6} + \frac{dv_{x2}}{3} + \frac{dv_{x3}}{3} + \frac{dv_{x4}}{4}
 \end{aligned}$$

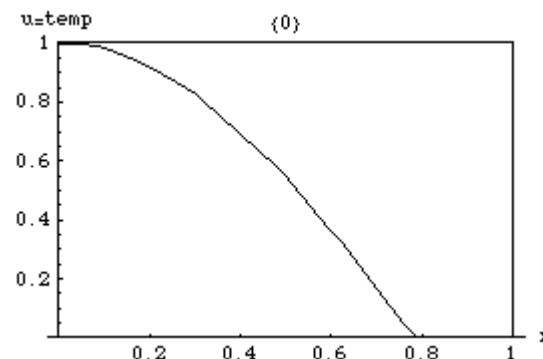
Diszkretizáció CNN-en

Egy diszkretizációt el tudunk kerülni – a CNN folytonos időben működik, így csupán a többi parciális derivált alapján (általában térben) kell diszkretizálnunk.

Közelítenünk kell a második deriváltat:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h}$$



Térben diszkretizálnunk kell

Folytonos időben

Template hőterjedés szimulációjához:?

Kétdimenziós eset

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Egydimenziós eset

$$A = [1 \ -2 \ 1]$$

Természetesen mindkét template-et beszorozhatjuk egy konstans-sal, ami terjedés sebességét határozza meg.

Így a parcdiff-ek egy jelentős csoportját tudjuk közelíteni:

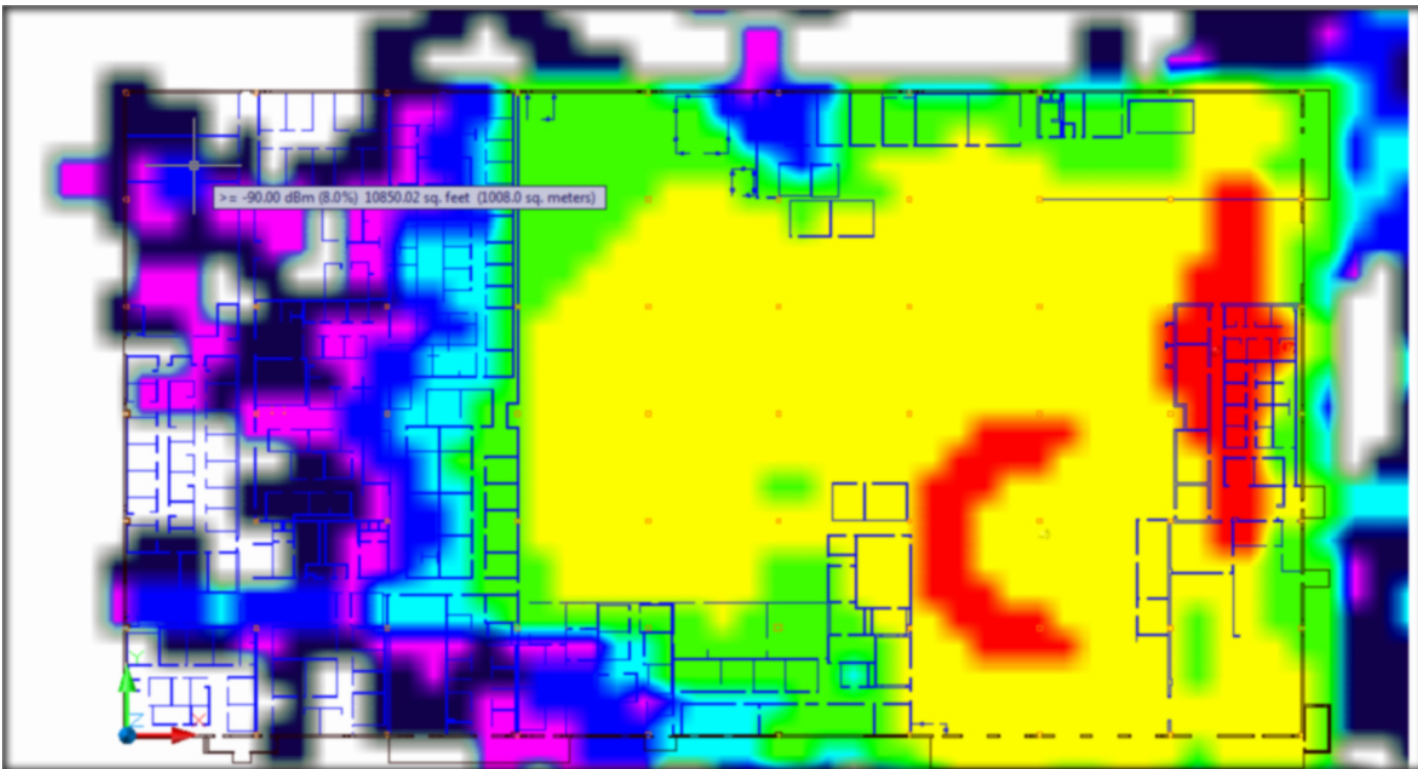
-linear diffusion equation: ahol a derivált a maximum másodrendű deriváltak lineáris kombinációja

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Heat equation - gyakorlati alkalmazás

A B template-et nem használtuk fel, ezáltal időben változó bemenettel akár melegítés során is vizsgálhatjuk a hőterjedést

Nem egyenletes hőterjedés: heterogén CNN, különböző A template-ek különböző pontokban



Nemlinearis diffusion equation?

A PDE-k egy jelentős osztályát egyszerűen szimulálhatjuk, azonban számos olyan egyenlet van, ahol a parciális deriváltak nemlineáris kombinációjára lenne szükség.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_{x_{ij}}(t) = & -v_{x_{ij}}(t) + \sum_{kl \in N_r} A_{ij,kl} v_{y_{kl}}(t) + \sum_{kl \in N_r} B_{ij,kl} v_{u_{kl}}(t) + I_{ij} \\ & + \sum_{kl \in N_r} \hat{D}_{ij,kl}(\Delta v) \end{aligned}$$

Az extra tag esetében D template elemei függvények az argumentuma pedig a bemenet a state és a kimenet

Nemlinearais Diffúzió

A PDE-k egy jelentős osztályát egyszerűen szimulálhatjuk, azonban számos olyan egyenlet van, ahol a parciális deriváltak nemlineáris kombinációjára lenne szükség.

Példa: Gradient

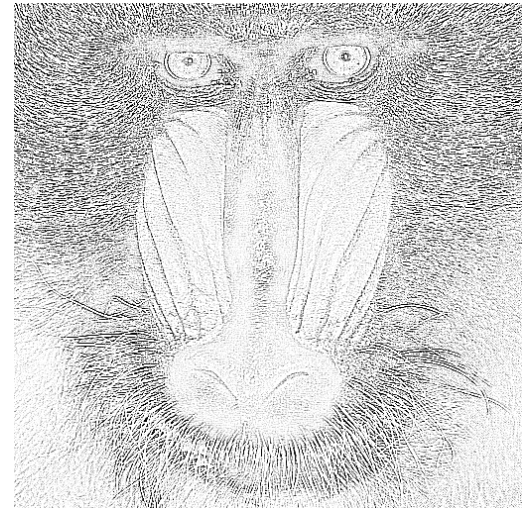
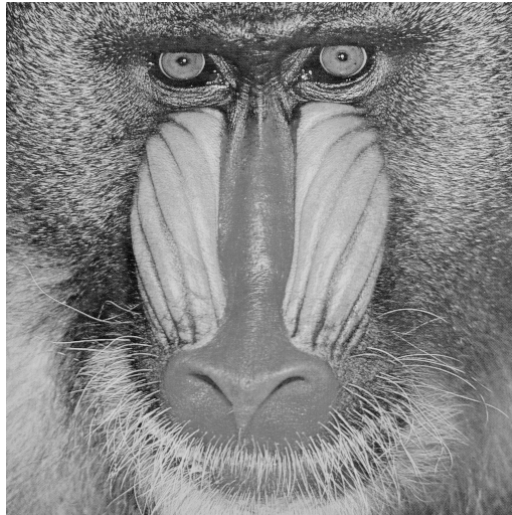
```
%% GRADT %%
```

```
GRADT_A = [0 0 0;  
           0 2 0;  
           0 0 0];
```

```
GRADT_Bb = [1 1 1;  
            1 0 1;  
            1 1 1];
```

```
GRADT_b = [1 3 -3 3 0 0 3 3];
```

```
GRADT_I = -1.8;
```



Nemlinearis Diffúzió

A PDE-k egy jelentős osztályát egyszerűen szimulálhatjuk, azonban számos olyan egyenlet van, ahol a parciális deriváltak nemlineáris kombinációjára lenne szükség.

Példa: Median

%% MEDIAN %%

```
MEDIAN_A = [0 0 0;
             0 1 0;
             0 0 0];
```

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}^M = \begin{bmatrix} d & d & d \\ d & 0 & d \\ d & d & d \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

```
MEDIAN_Dd = 0.5*[1 1 1;
                  1 0 1;
                  1 1 1];
```

```
MEDIAN_d = [0 2 0 -1 2.5 1 12];
```

```
MEDIAN_I = 0;
```



Nemlinearális Diffúzió

A PDE-k egy jelentős osztályát egyszerűen szimulálhatjuk, azonban számos olyan egyenlet van, ahol a parciális deriváltak nemlineáris kombinációjára lenne szükség.

Példa: Gradient, Gradient based diffusion

```
%% MEDIAN %%
```

```
MEDIAN_A = [0 0 0;
             0 1 0;
             0 0 0];
```

```
MEDIAN_Dd = 0.5*[1 1 1;
                  1 0 1;
                  1 1 1];
```

```
MEDIAN_d = [0 2 0 -1 2.5 1 12];
```

```
MEDIAN_I = 0;
```

11	–	$\Delta v = v_{u2kl} - v_{u1ij}$
12	–	$\Delta v = v_{ukl} - v_{xij}$
13	–	$\Delta v = v_{ukl} - v_{yij}$
21	–	$\Delta v = v_{xkl} - v_{u ij}$
22	–	$\Delta v = v_{xkl} - v_{xij}$
23	–	$\Delta v = v_{xkl} - v_{yij}$
31	–	$\Delta v = v_{ykl} - v_{u ij}$
32	–	$\Delta v = v_{ykl} - v_{xij}$
33	–	$\Delta v = v_{ykl} - v_{yij}$

Nemlinearis Diffúzió

A PDE-k egy jelentős osztályát egyszerűen szimulálhatjuk, azonban számos olyan egyenlet van, ahol a parciális deriváltak nemlineáris kombinációjára lenne szükség.

Példa: Gradient

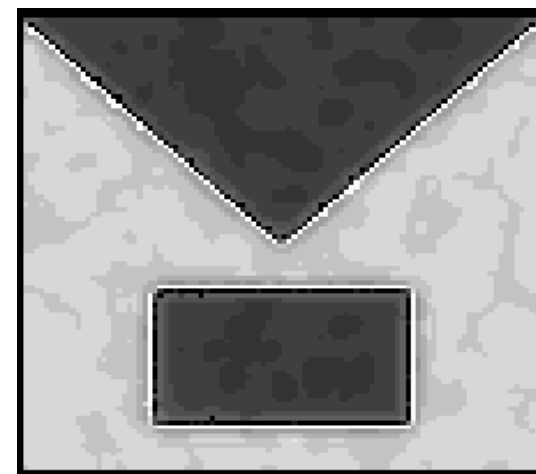
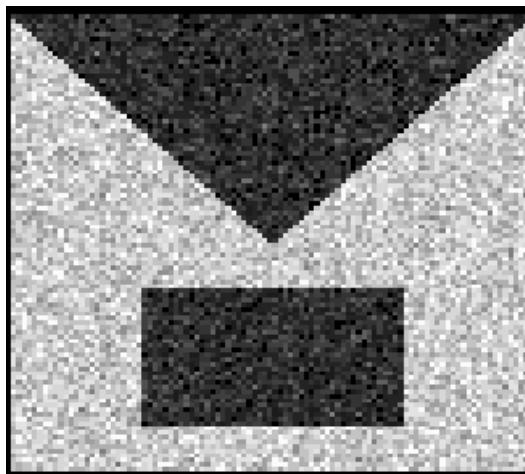
$$\frac{\partial I}{\partial t} = \Delta \left[I(x, y, t) \cdot \left(1 - k \cdot \left| \text{grad} \left(G(s) * I(x, y, t) \right) \right| \right) \right]$$

%% ANISO %%

```
ANISO_A = [0 0 0;
            0 1 0;
            0 0 0];
```

```
ANISO_Dd = [0.5 1.0 0.5;
             1.0 0.0 1.0;
             0.5 1.0 0.5];
```

```
ANISO_d = [1 5 -2 0 -0.3 0 0 1 0.3 0 2 0 122];
```



Nemlineáris diffusion equation

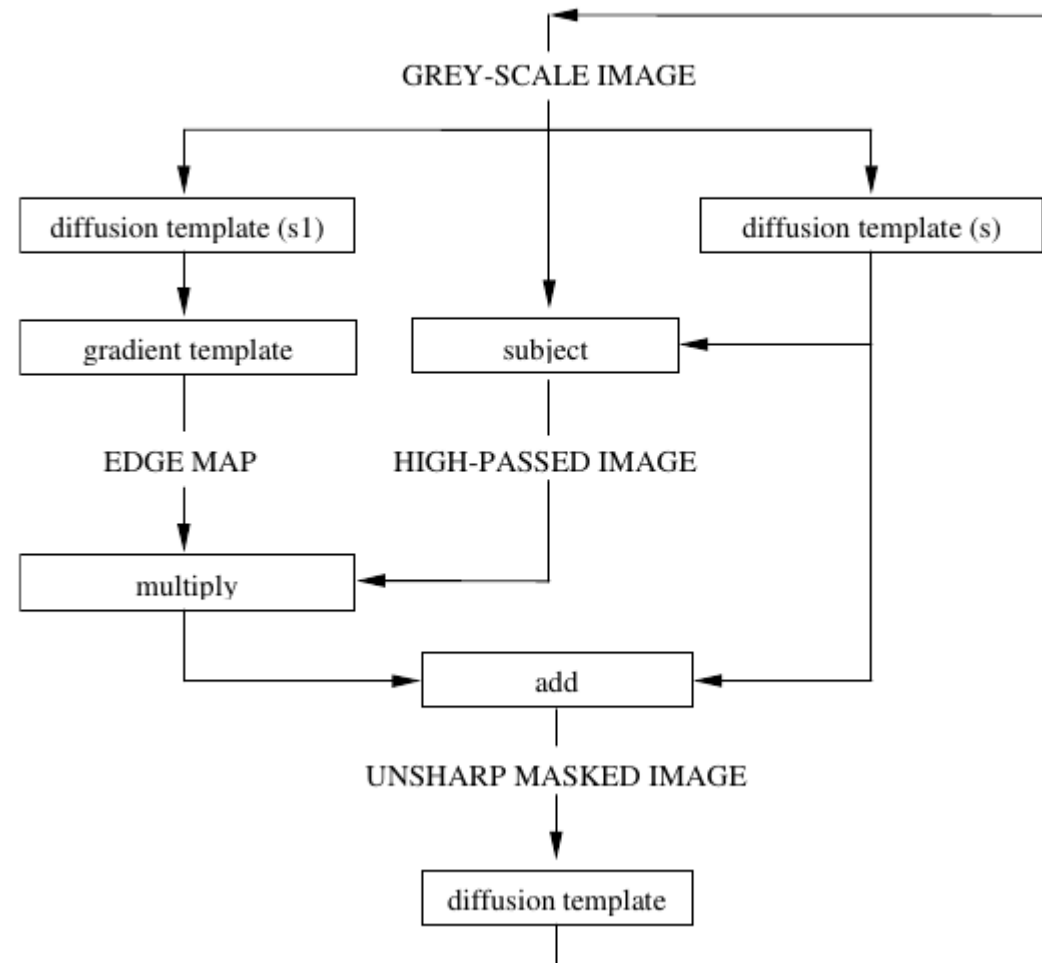
A PDE-k egy jelentős osztályát egyszerűen szimulálhatjuk.

Minden nemlineáris template megvalósítható lineáris template-ek sorozataként

A nemlineáris template-ek használatával azonban az algoritmus A template-ek tervezése is egyszerűbb

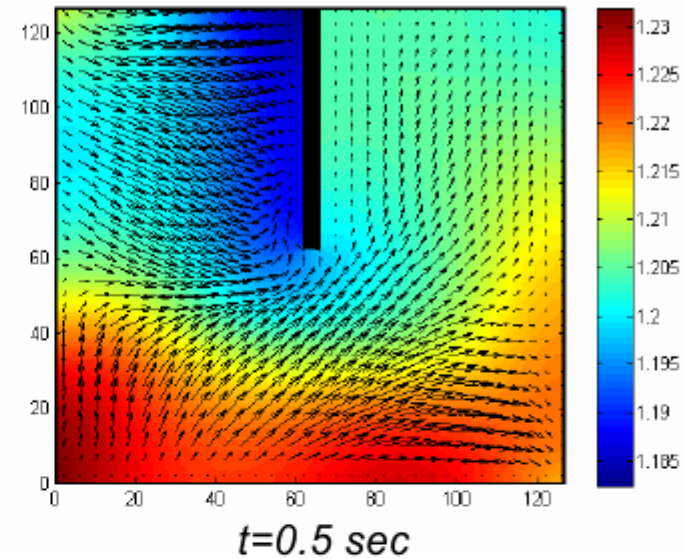
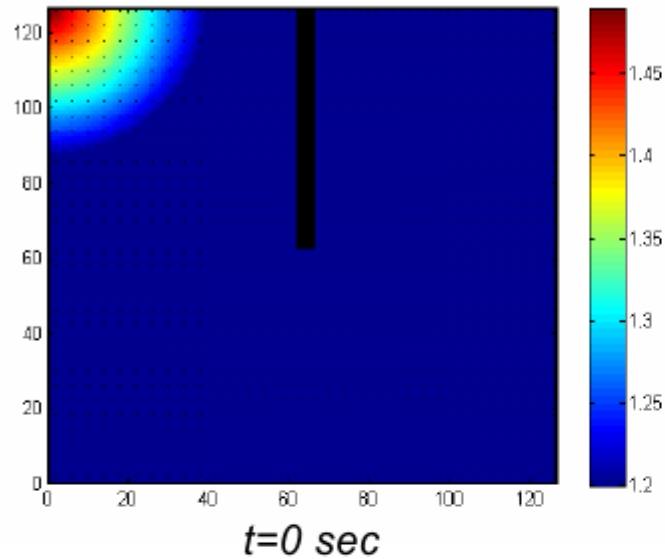
Ténylegesen architektúrákon (ugyan nem mindegyiken) is van lehetőség nemlineáris template-ek megvalósítására: pl Ace16k

The flow-chart of the algorithm:



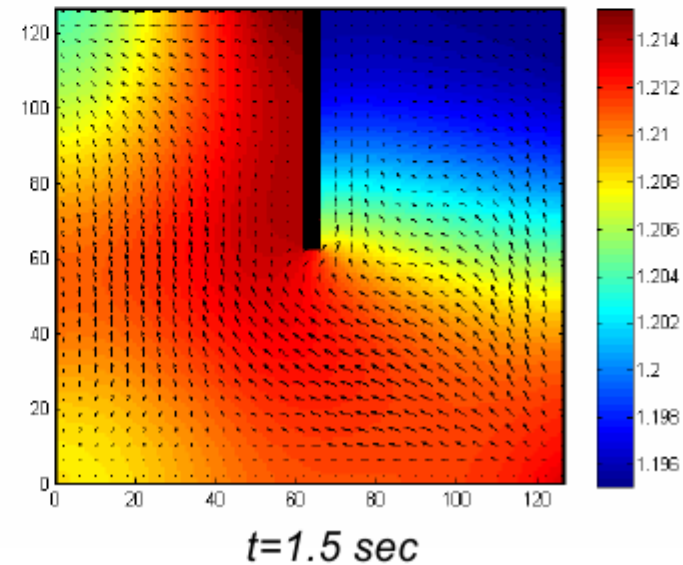
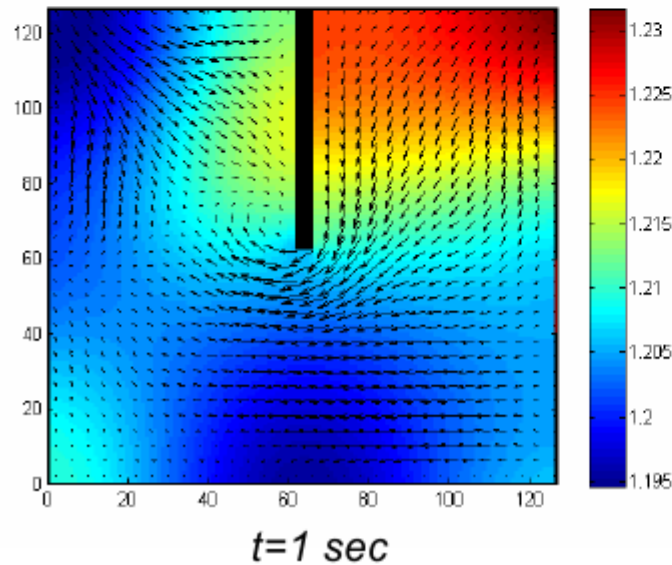
Flow simulation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$



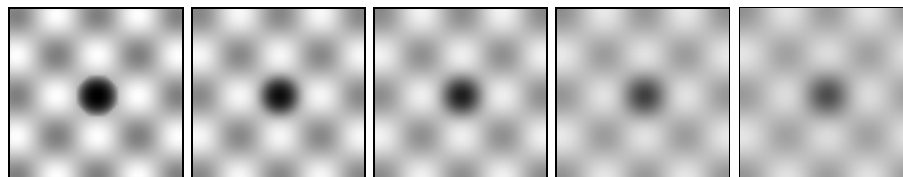
$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y}$$



Diffúzió és hullám alapú számítás

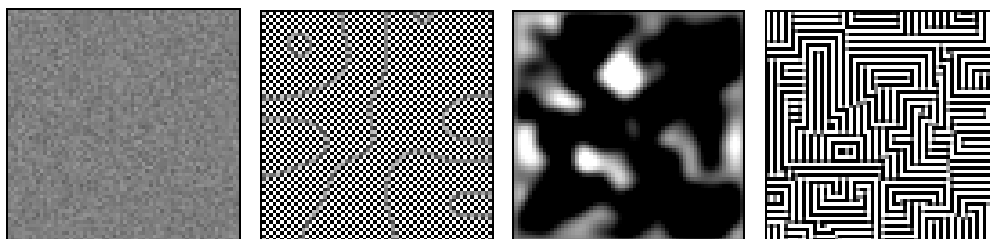
Lineáris diffúzió



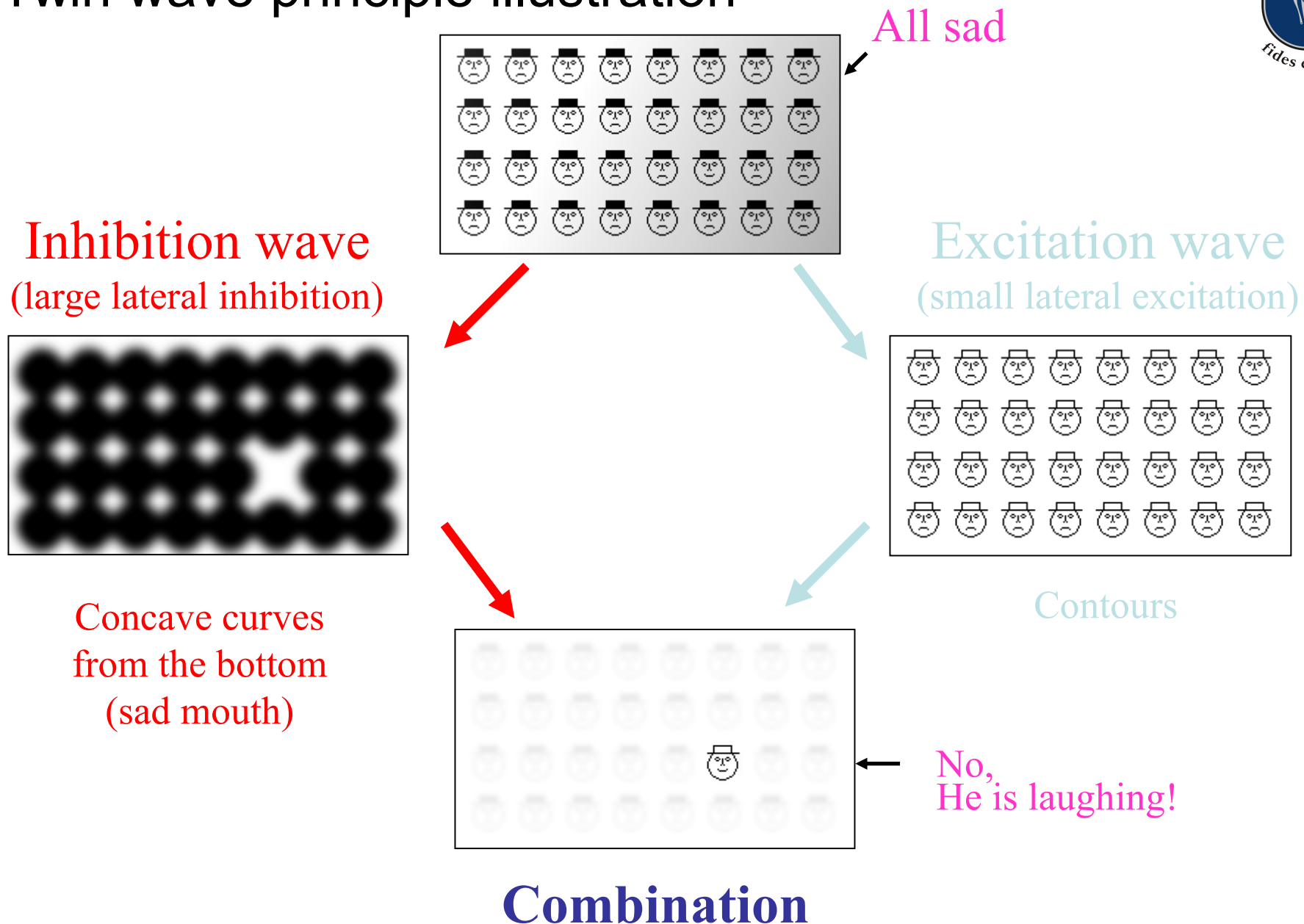
*Nemlineáris diffúzió:
Trigger-waves*



Pattern formation



Twin wave principle illustration

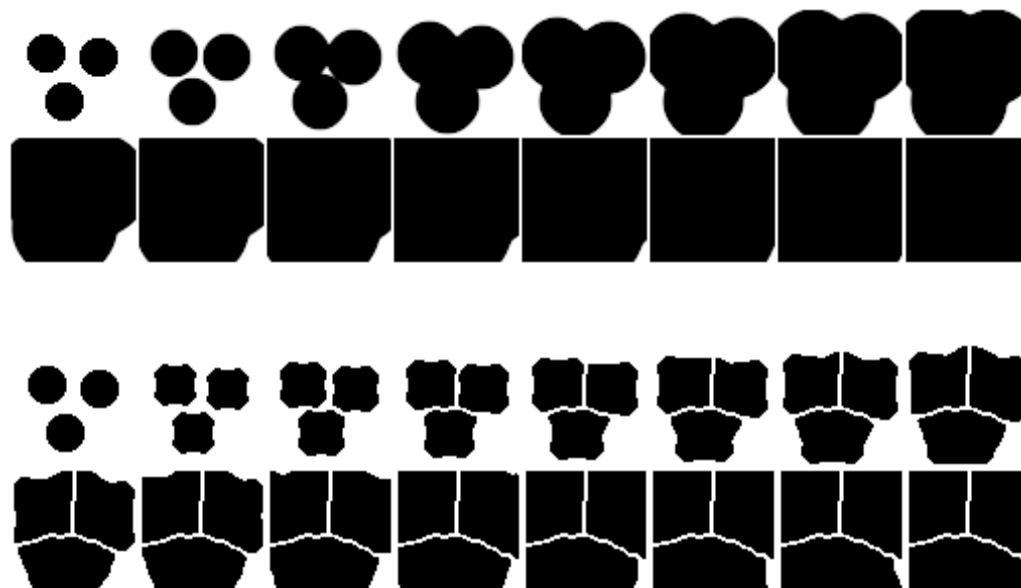


Trigger-waves as computing tools

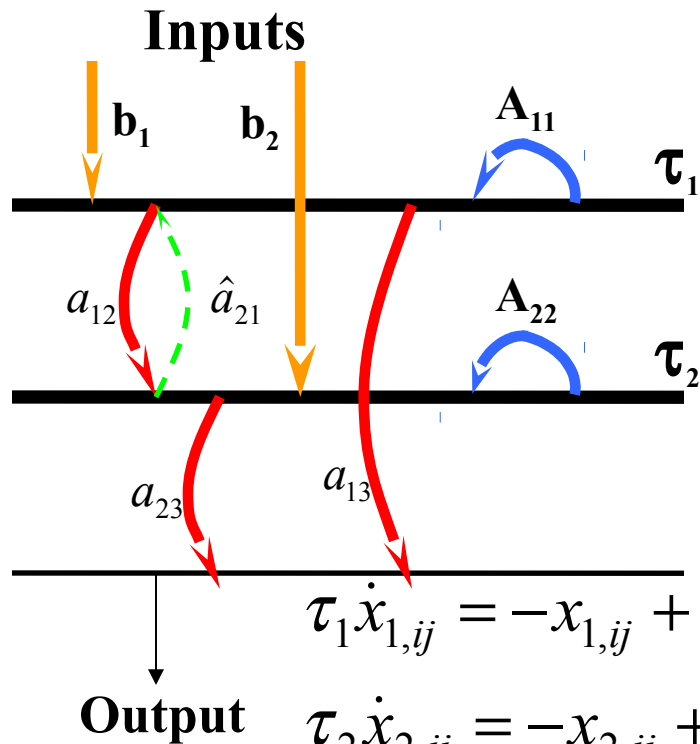
Hullámtulajdonságok:

- megfordíthatóság
- conservation of energy
- Amplitúdó és hullámfront megmaradása
- visszaverődés
- interferencia
- Törés (diffrakció)
- Kiloltás

Hullámfrontok kioltása: távolság számítás



3-rétegű prototípus



- mutually coupled 1st order „RC” cells, space constants
- double time-scale property
- separate inputs and initial states

$$\tau_1 \dot{x}_{1,ij} = -x_{1,ij} + \sum_{kl \in N_1} A_{11,kl} y_{1,kl} + a_{21} y_{2,ij} + b_0 u_{ij} + z_1$$

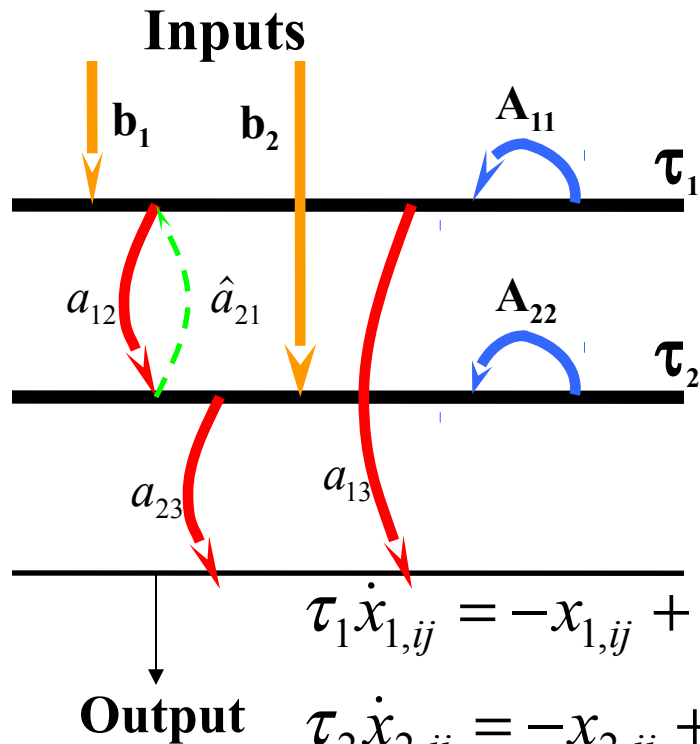
$$\tau_2 \dot{x}_{2,ij} = -x_{2,ij} + \sum_{kl \in N_1} A_{22,kl} y_{2,kl} + a_{12} y_{1,ij}$$

$$y_{1,ij} = f_1(x_{1,ij}), y_{2,ij} = f_2(x_{2,ij}), y_{3,ij} = f_3(a_{13} y_{1,ij} + a_{23} y_{2,ij})$$

$$1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M, 0 \leq |u_{ij}| \leq 1,$$

$$\text{Chua - Yang: } 0 \leq |x_{ij}(0)| \leq 1, \text{ Full - range: } 0 \leq |x_{ij}(t \geq 0)| \leq 1$$

3-rétegű prototípus



• **Nemlineáris template-ekkel háromváltozós (x1,x2,t) PDE-
ket tudunk megvalósítani egy
ilyen architektúrán**

$$\tau_1 \dot{x}_{1,ij} = -x_{1,ij} + \sum_{kl \in N_1} A_{11,kl} y_{1,kl} + a_{21} y_{2,ij} + b_0 u_{ij} + z_1$$

$$\tau_2 \dot{x}_{2,ij} = -x_{2,ij} + \sum_{kl \in N_1} A_{22,kl} y_{2,kl} + a_{12} y_{1,ij}$$

$$y_{1,ij} = f_1(x_{1,ij}), y_{2,ij} = f_2(x_{2,ij}), y_{3,ij} = f_3(a_{13} y_{1,ij} + a_{23} y_{2,ij})$$

$$1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq M, 0 \leq |u_{ij}| \leq 1,$$

$$Chua - Yang: 0 \leq |x_{ij}(0)| \leq 1, Full - range: 0 \leq |x_{ij}(t \geq 0)| \leq 1$$

Model elements

Layer parameters

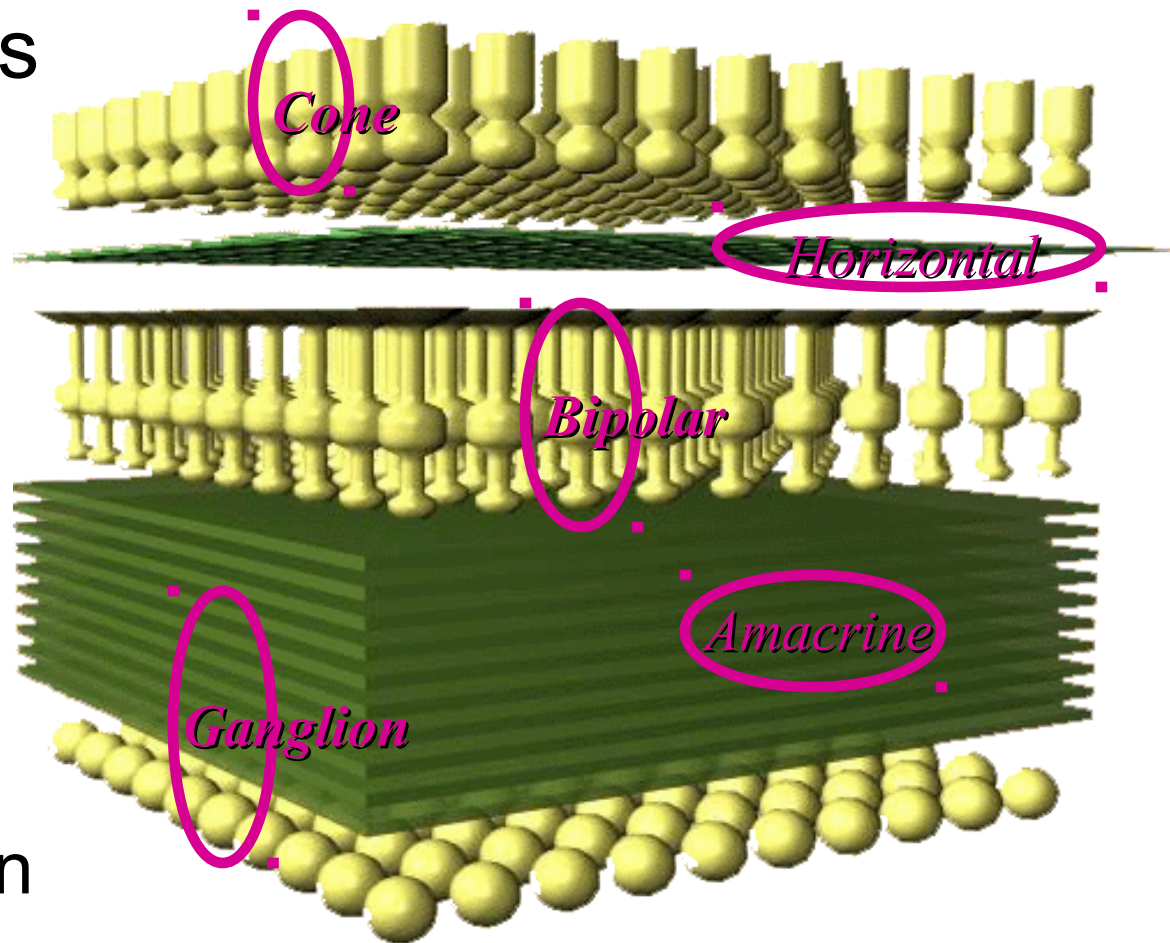
Time constant

Spatial coupling

Output function

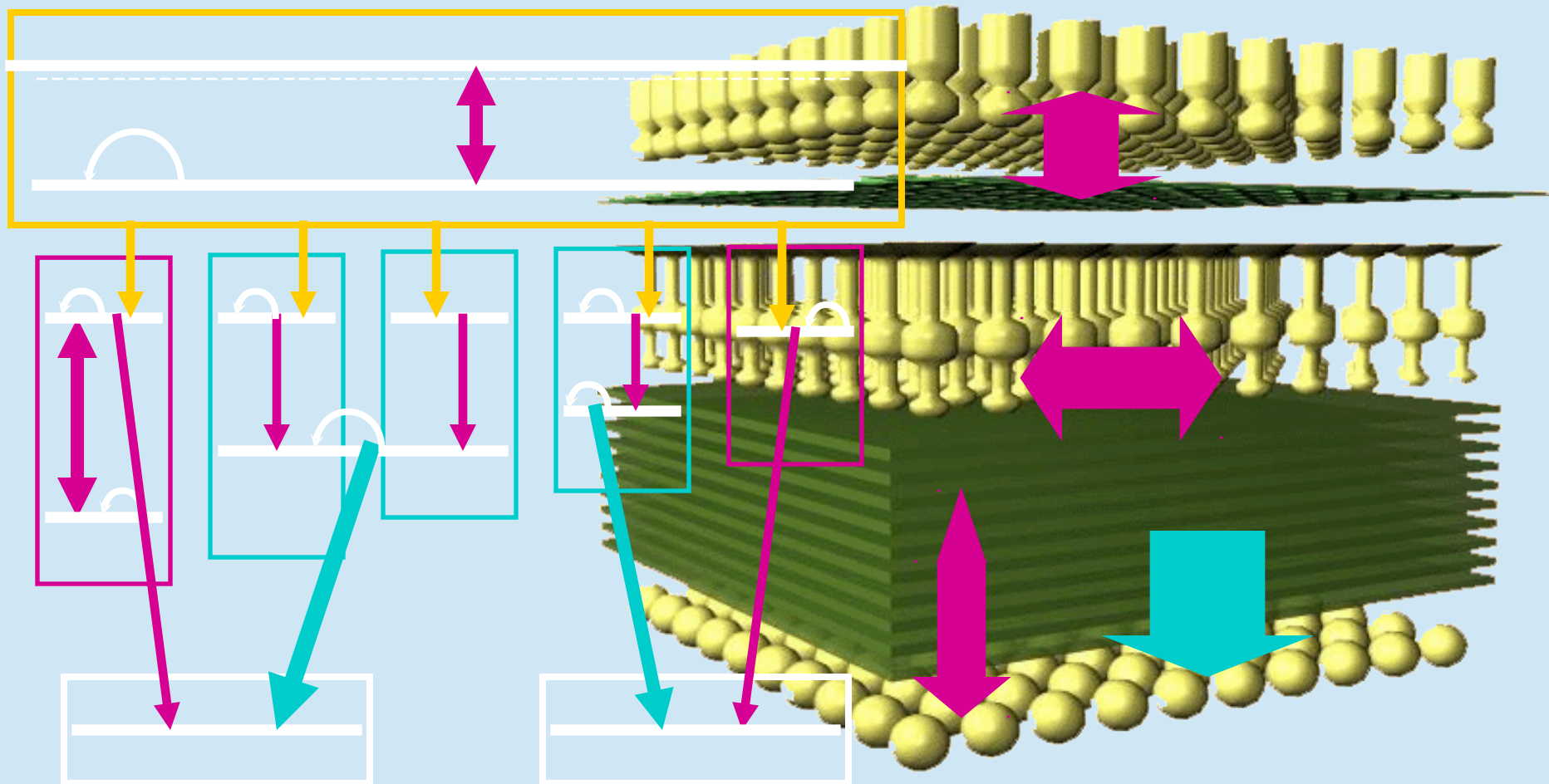
Receptors

- Gain
- Delay
- Desensitization



Computational structure

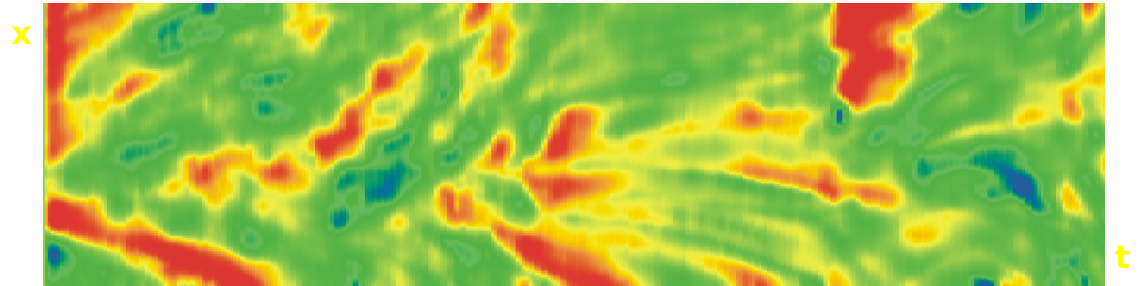
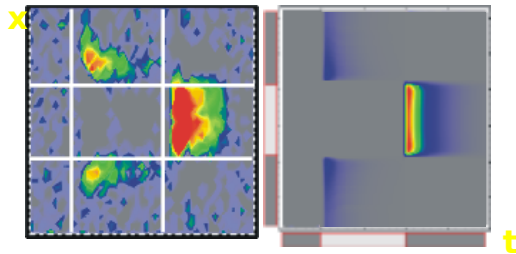
Connected pairs of diffusion layers



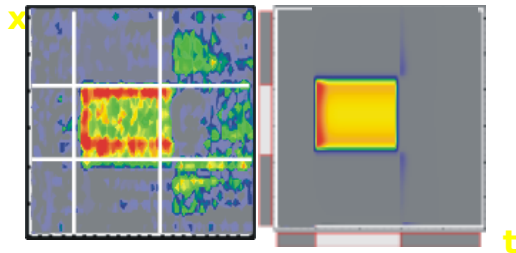
Parameter tuning - M&S

tests

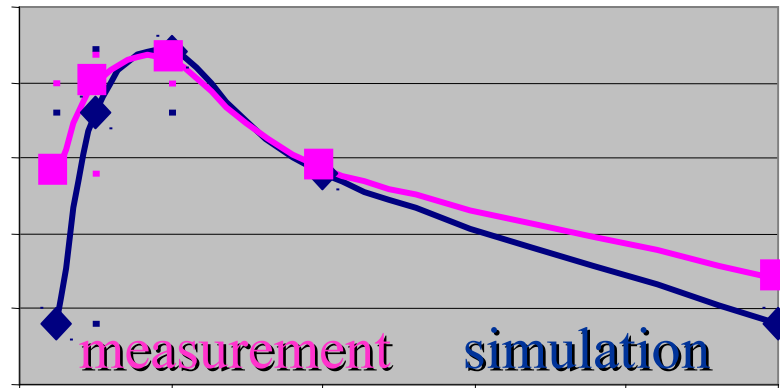
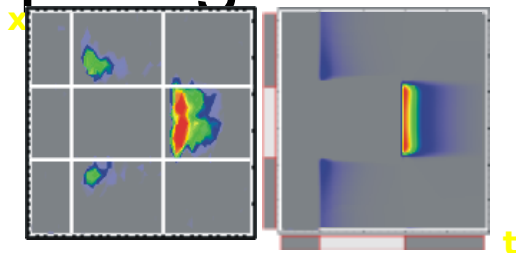
Excitation



Inhibition

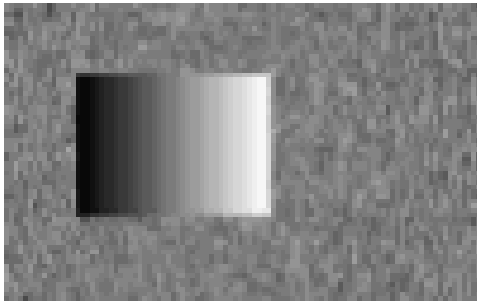


Spiking

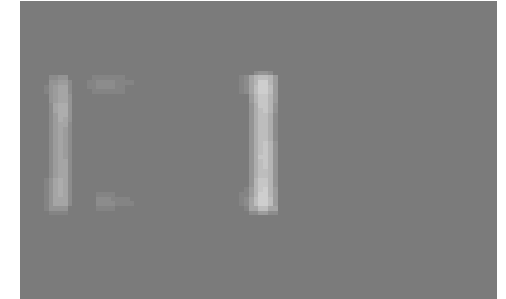
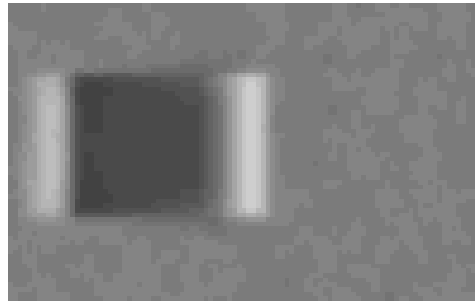


Moving gradient square in noise

Input



Bipolar MD ganglion



Noise filtering

Motion detection (on, off, speed)

Gradient phenomenon

Retinaeffects - On stimulus

Stimulus - effects



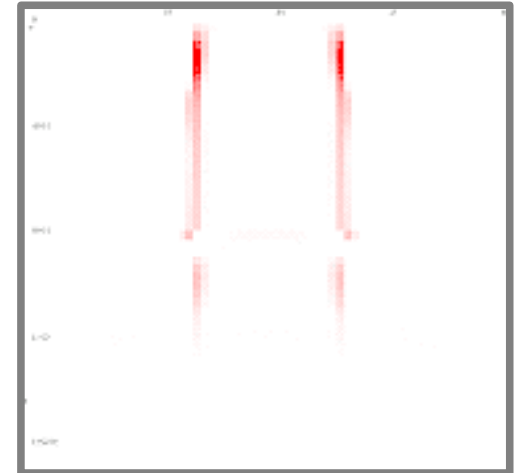
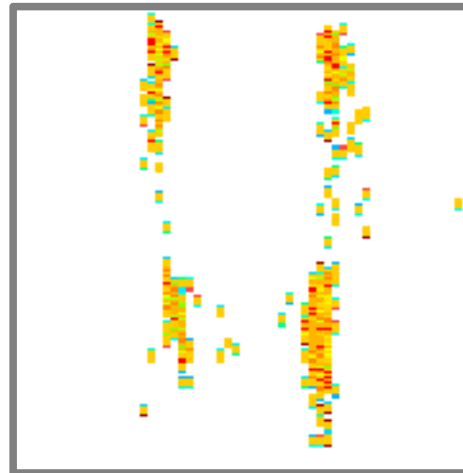
measurement



simulation



initiation of motion
detection
space- and time-based
edge detection
object corner detection



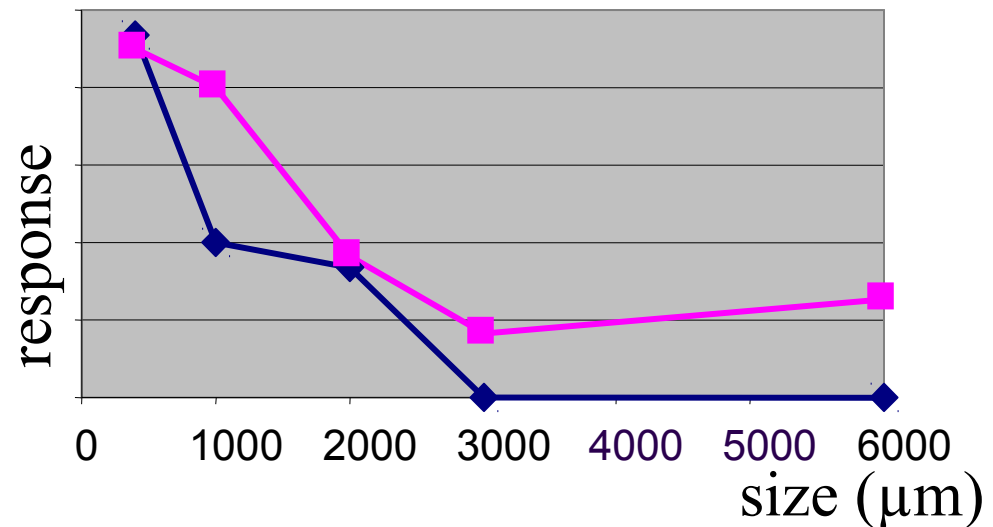
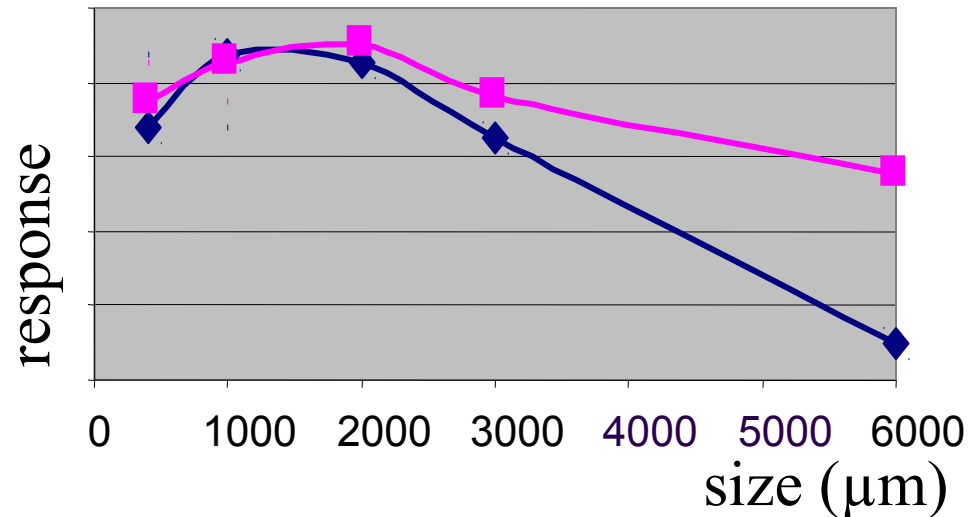
Retinaeffects - Size



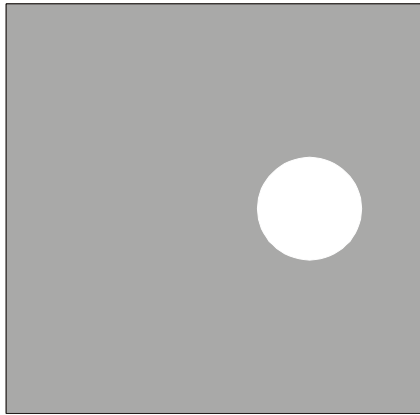
size selectivity with
local interaction
size-, speed- and
intensity-selective
video processing

measurement

simulation



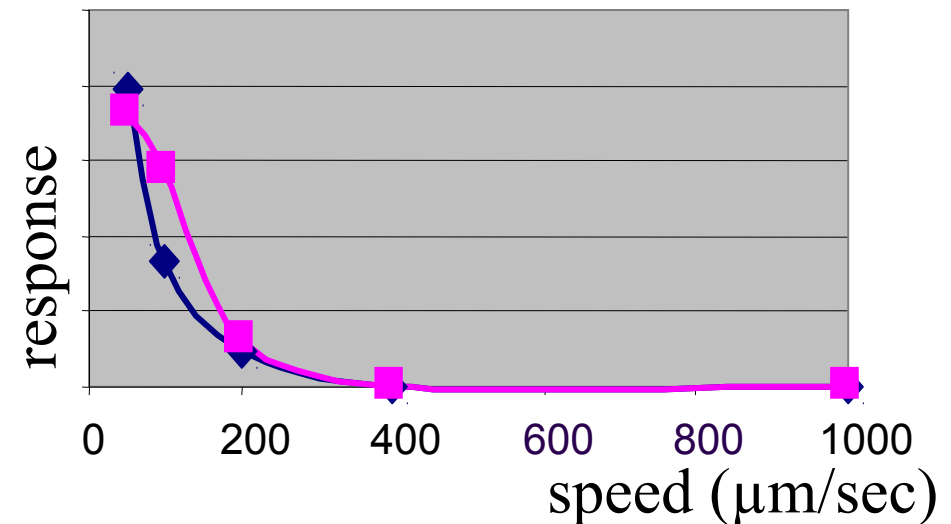
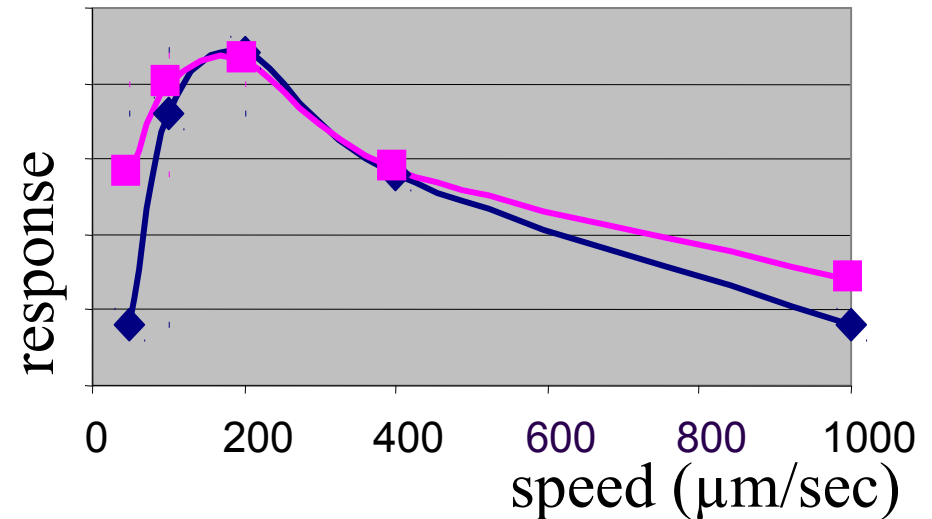
Retinaeffects - Speed



direction dependent
object level
motion detection
speed- and intensity-
selective video
processing

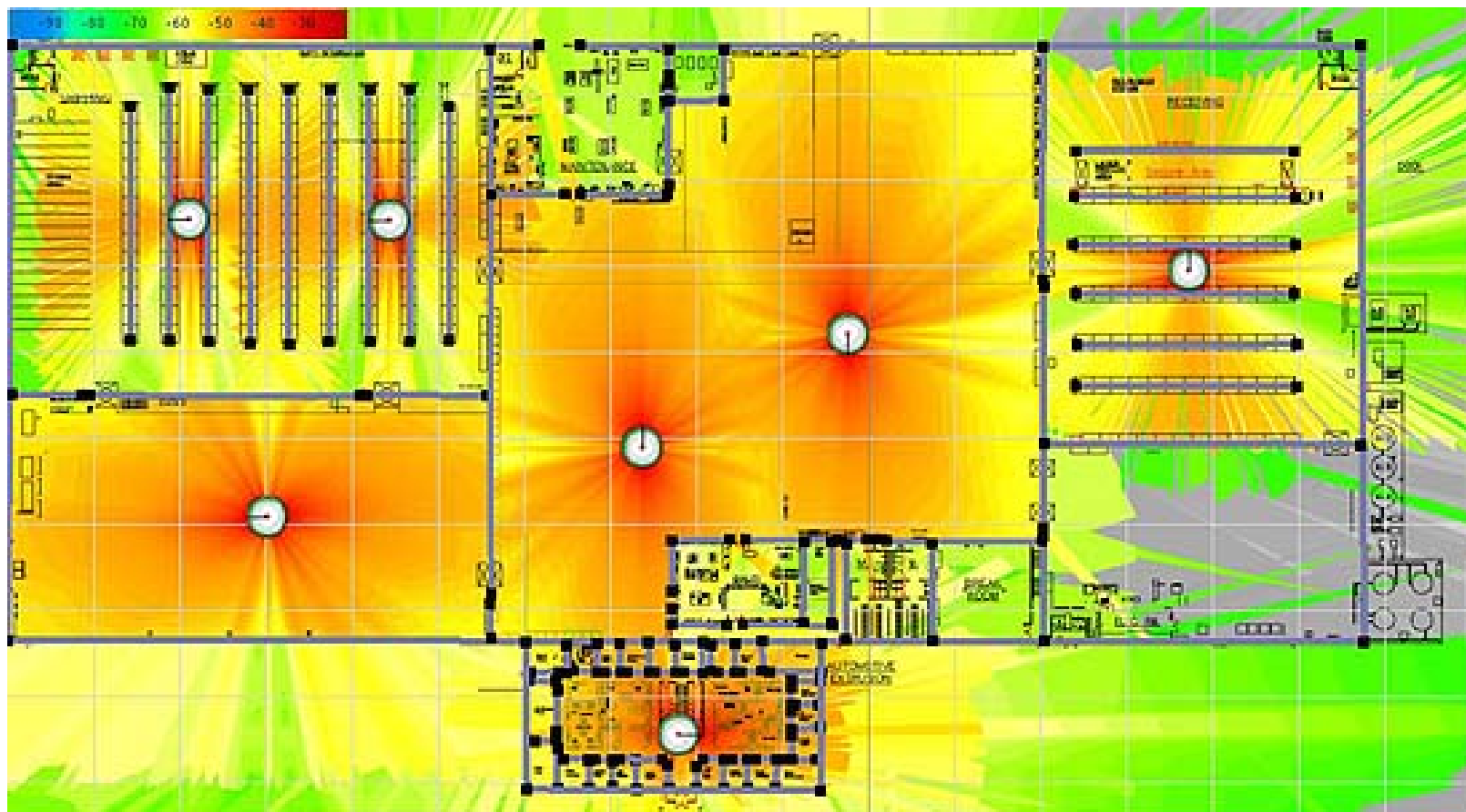
measurement

simulation



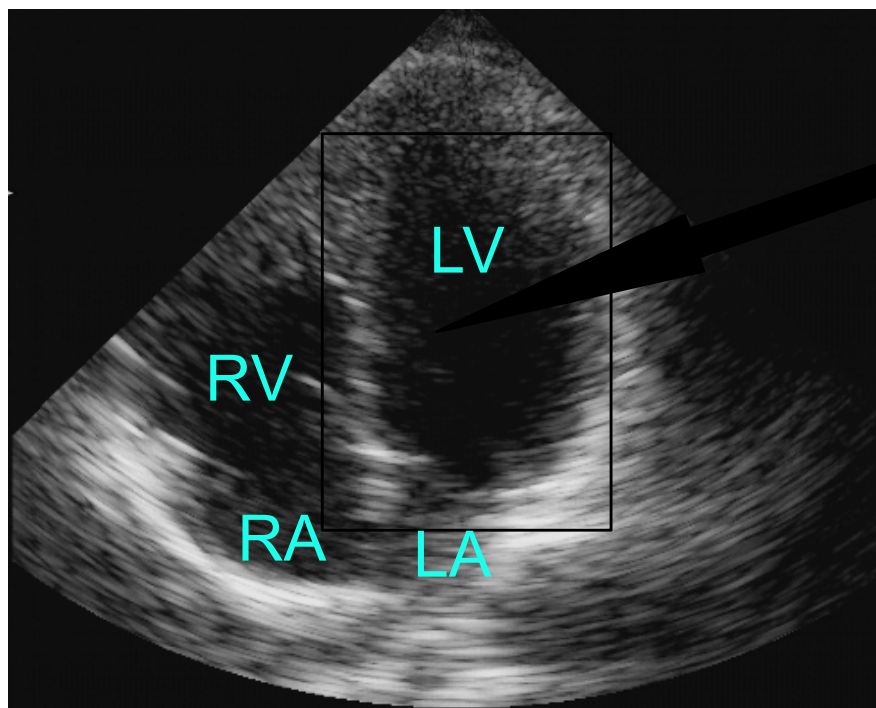
Wave equation

Wifi- jelterjedés, jelerősség
szimuláció



Hullámszámítás alkalmazása ultrahangos képeken

Echokardiográfiás képek szegmentációja



Cél:

*Endocardial (belső kontúr)
detekciója a bal kamra körül*

LV - left ventricle

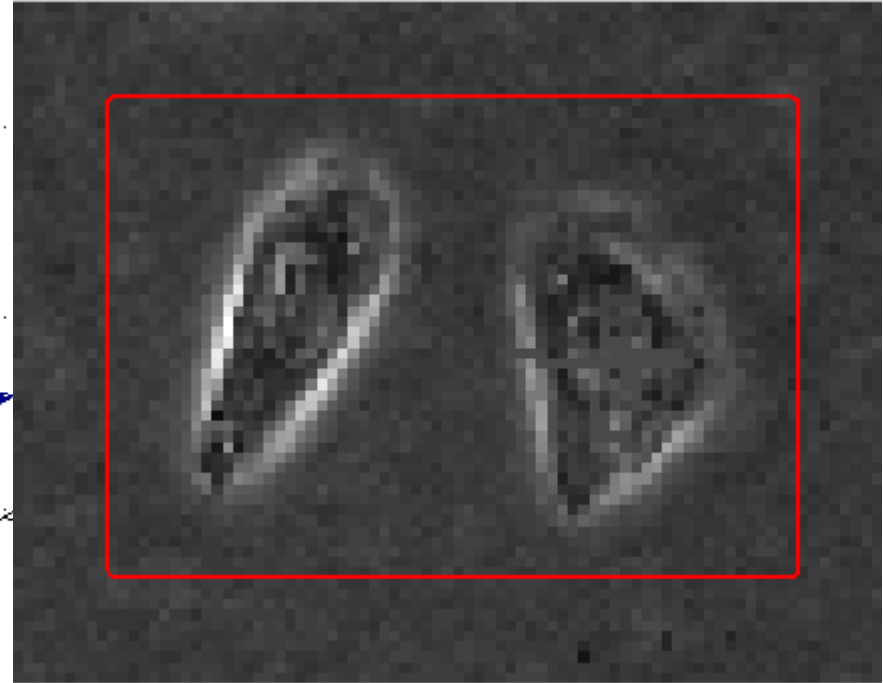
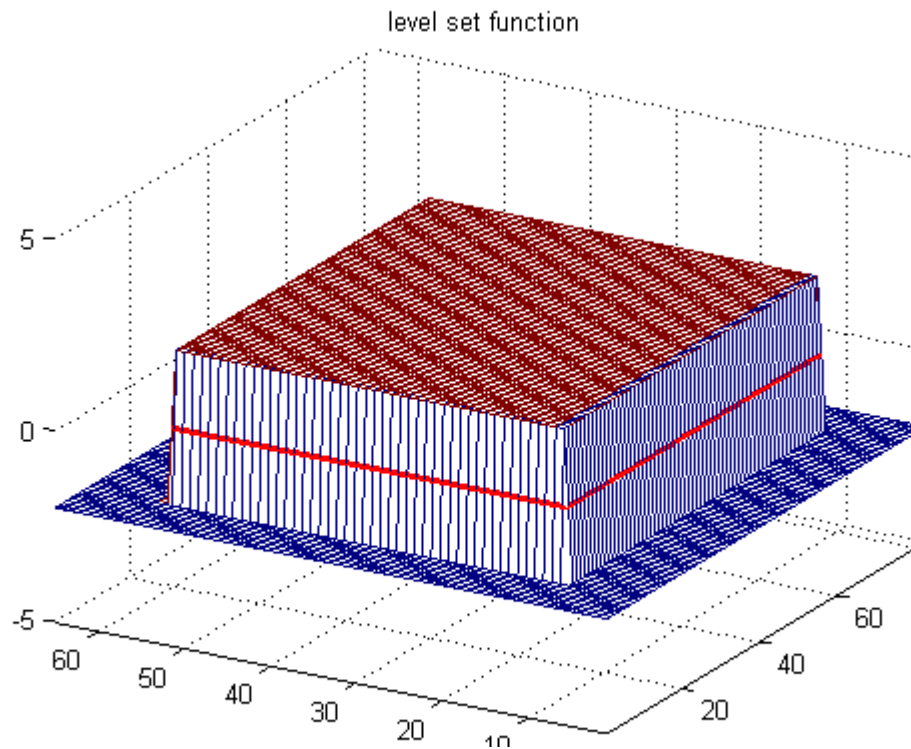
LA - left atrium

RV - right ventricle

RA - right atrium

Apikális, 2 kamra, 2 pitvar szerinti nézet az emberi szívről

Active contour



$$E_{internal} = (\alpha(s) |\mathbf{v}_s(s)|^2 + \beta(s) |\mathbf{v}_{ss}(s)|^2) / 2 = \left(\alpha(s) \left\| \frac{d\bar{v}}{ds}(s) \right\|^2 + \beta(s) \left\| \frac{d^2\bar{v}}{ds^2}(s) \right\|^2 \right) / 2$$

$$E_{image} = w_{line} E_{line} + w_{edge} E_{edge} + w_{term} E_{term}$$

$$E_{line} = I(x, y) \quad E_{edge} = -|\nabla I(x, y)|^2 \quad E_{term} = \frac{\partial \theta}{\partial n_{\perp}} = \frac{\partial^2 C / \partial^2 n_{\perp}}{\partial C / \partial n} = \frac{C_{yy} C_x^2 - 2C_{xy} C_x C_y + C_{xx} C_y^2}{(C_x^2 + C_y^2)^{3/2}}$$

PDE formalism:

$$\frac{\partial}{\partial t} I - \Delta I = I_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} I = -\nabla I \times V$$

$$\frac{\partial}{\partial t} I - \Delta I = I_0 + f(I)$$

(k-1)-th result

(k-1)-th frame

k-th frame

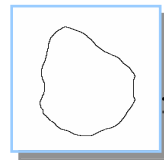
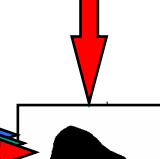
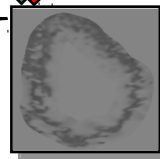
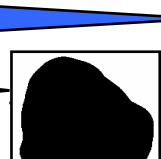
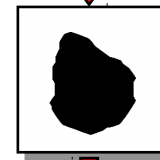
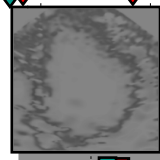
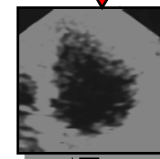
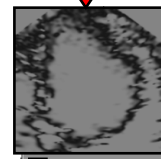
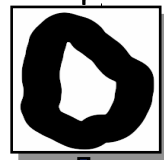
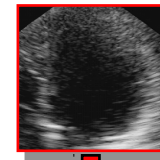
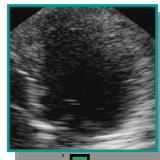
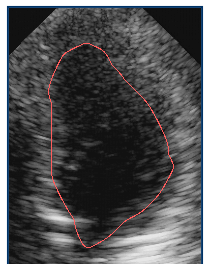
CNN-UM
chip results
(ACE4K):

~30 μ sec/fr

~60 μ sec/fr

~160 μ sec/fr

$\Sigma \sim 250 \mu$ sec/fr



k-th result