

A CNN dinamika matematikai tulajdonságai - Stabilitás, korlátosság, megoldhatóság



András Horváth

Az elmélet és stabilitás fontossága

Tudunk-e mondani valamit általánosságban a dinamikáról?

Imserjük a dinamikát láttunk már egy-két funkciót is, de tudunk-e valamit kvalitatívan mondani a dinamikáról?

Kaphatunk-e periódikus pályákat? Kaotikus pályákat?

Elméleti korlátokat kell adnunk arra, hogy milyen értékekre, milyen körülmények között használhatjuk a dinamikát

Stabilitás

- BIBO stability (Bounded Input, Bounded Output stability),
- Structural stability
- Nyquist stability
- Asymptotic stability(Ljapunov Stability)
- Directional stability
- Slope stability

Kaotikus jelenségek:

Komplex

Ahogy haladunk az összetettebb bonyolultabb dinamikák felé, úgy lesz általánosabb a rendszer, de egyben nehezebben is alkalmazható

Egyértelmű megoldás létezése

Alapvető elvárás egy rendszerrel szemben, ugyanakkor a dinamikának általánosnak is kell lennie

Egyértelmű megoldás létezése:

$$5x + 3 = 8$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\sin(x) = 0$$

A rendszer nincs jól meghatározva, mérnökiileg nem használható

Egyértelmű megoldás létezése

Diffegyenlet megoldhatósága:

Vegyük az alábbi egyszerű példát.

$$y' = y$$

Ezen egyenletnek végtelen sok megoldása létezik $y = e^x$ $y = 2e^x$

Ezek függhetnek a kezdeti értékektől, s ez általában hasznos.

A kezdeti értékek mellett is kaphatunk több/végtelen különböző megoldást:

$$y' = y^{(2/3)}$$

Kezdeti érték: $y(0) = 0$

Két lehetséges megoldás: $y = (1/27)x^3$

$$y = 0.$$

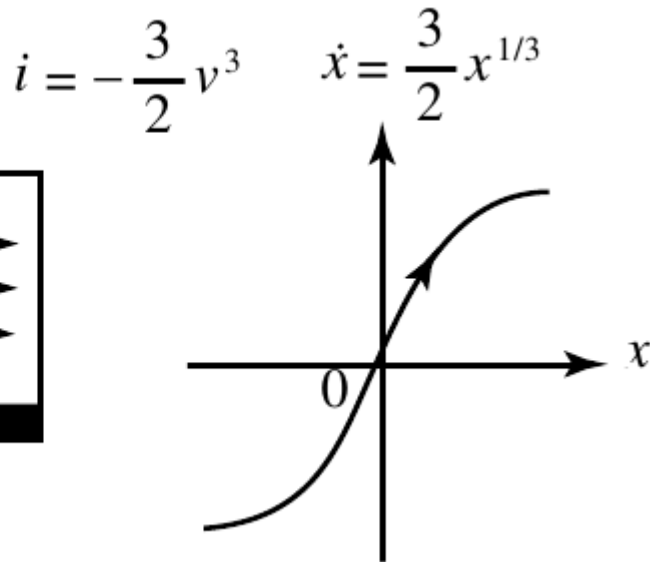
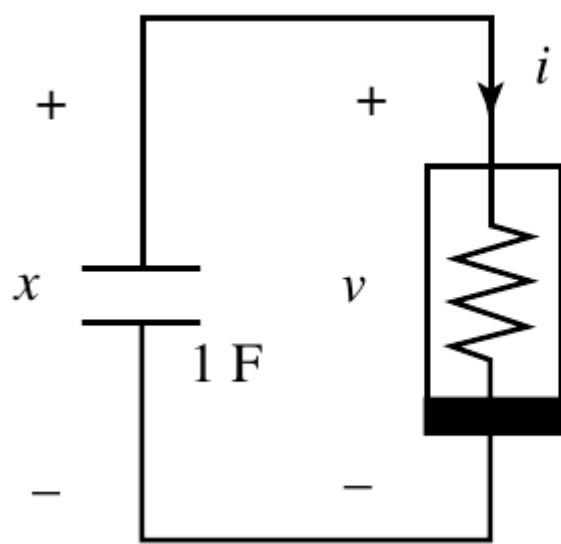
Áramköri szinten

Lineáris elemekből épített áramkör használatával mindig egyértelműen létezik megoldás.

Azonban ezek számításra nem igazán alkalmasak. Egy döntés/osztályozás pont akkor érdekes, ha nemlineáris.

Nemlineáris elemek esetén nem biztosított a megoldás egyértelmű létezése – (már 2 elemű nemlineáris áramkör esetén sem)

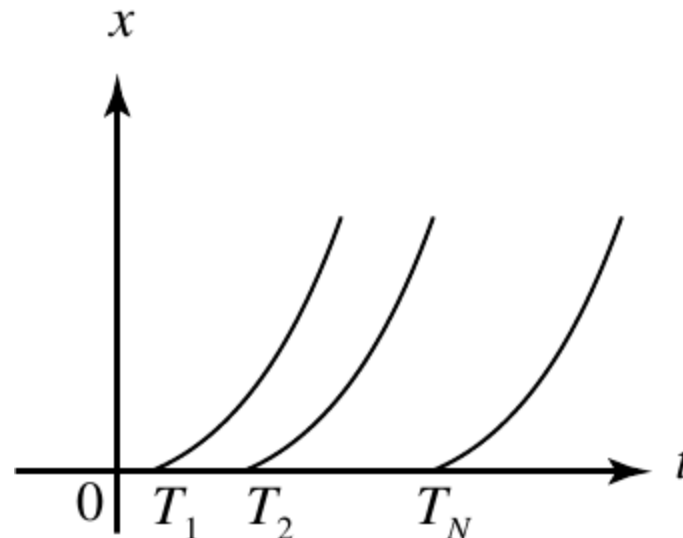
Megoldás egyértelmű létezése



$X(0)=0$ kezdeti érték esetén, tetszőleges $T>0$ jó megoldás lesz.

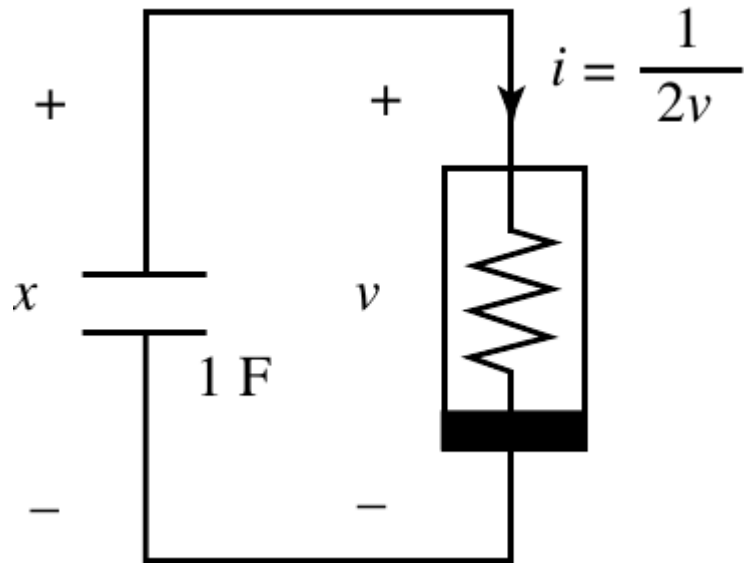
Végtelen sok megoldás létezik.

$$x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq T \\ (t-T)^{\frac{3}{2}}, & t > T \end{cases}$$



Megoldás egyértelmű létezése

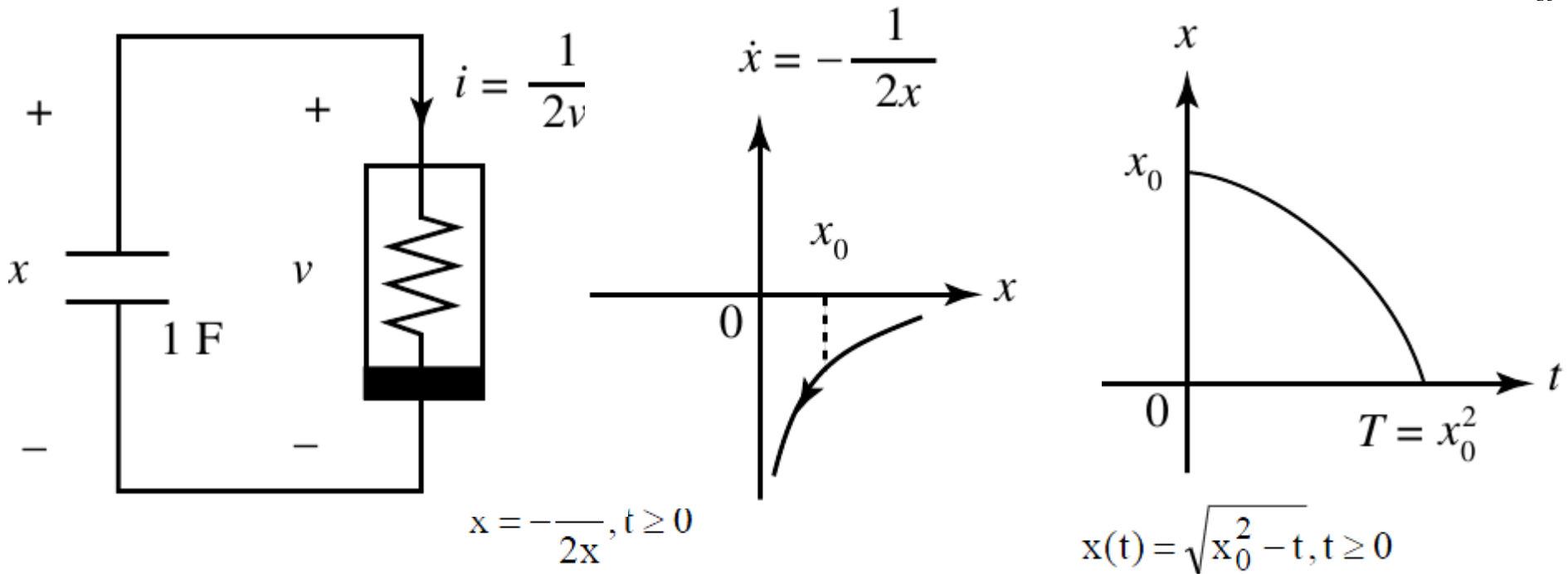
Vizsgáljuk meg az alábbi egyszerű áramkört, mely egyetlen nemlineáris elemet tartalmaz:



Az áramkört leíró differenciálegyenlet:

$$\dot{x} = -\frac{1}{2x}, t \geq 0$$

Megoldás egyértelmű létezése



A valós számok halmazán ezen dinamikának nem létezik megoldása $t > x_0^2$ esetén

Megoldás egyértelmű létezése

Picard–Lindelöf tétel /Cauchy-Lipschitz/ (Émile Picard, Ernst Lindelöf):

Adott a következő kezdeti érték feladat:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$$

Tfh:

f Lipschitz folytonos y -ban és folytonos t -ben

A kezdetiérték feladatnak egyértelműen létezik megoldása a megadott halmazon

Megoldás egyértelmű létezése

Felt 1: szinaptikus operátorok lineárisak és memóriamentesek:

A és B skalárral szorzás

Felt 2: A bemenet $u_{ij}(t)$ és a bias $z_{ij}(t)$ folytonos függvények

Felt 3: A nemlinearitás (kimenet: $y=f(x)$) Lipschitz folytonos

Ezen esetben bármilyen $x(0)$ állapot esetén egyértelműen létezik megoldása az állapotegyenletnek, mivel az:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$$

Alakba írható, ahol y folytonos és f Lipschitz folytonos.

Megoldás egyértelmű létezése

Felt 1: szinaptikus operátorok lineárisak és memóriamentesek:

A és B skalárral szorzás:

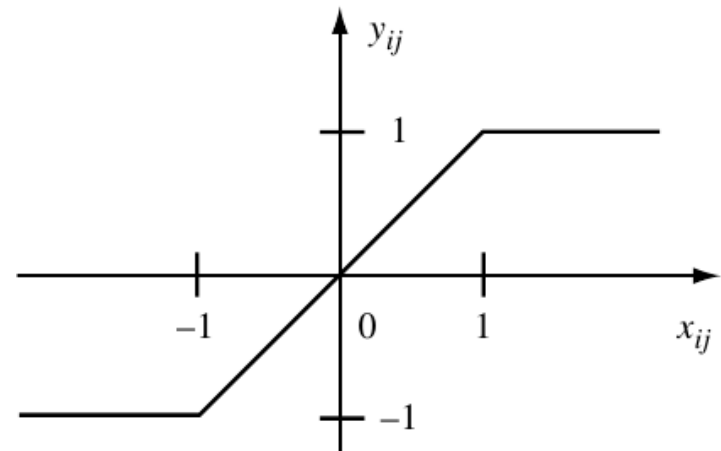
Konstans, időben nem változó template értékeket használunk

Felt 2: A bemenet $u_{ij}(t)$ és a bias $z_{ij}(t)$ folytonos függvények:

A bemenet és a Bias is konstans

Felt 3: A nemlinearitás (kimenet: $y=f(x)$) Lipschitz folytonos

A általunk használt nemlinearitás valóban Lipschitz folytonos



A dinamika korlátossága

Egy áramkörre mindig teljesül a gyakorlatban, mivel végés energia áll rendelkezésre.

Azonban meg kell vizsgálnunk a dinamikát, nehogy egy nem várt korlátba ütközzünk

A dinamika korlátossága

Korlátosság: $|x_{ij}(0)| \leq 1, \quad |u_{ij}(t)| \leq 1, \quad |z_{ij}(t)| \leq z_{\max}$

$$|x_{ij}(t)| \leq x_{\max} \quad \forall t \geq 0, \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq N$$

$$x_{\max} = 1 + z_{\max} + \max_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \left[\sum_{C(k,l) \in S_r(i,j)} (|A(i, j; k, l)| + |B(i, j; k, l)|) \right]$$

Stabilitás

Ljapunov stabilitás:

A dinamika tart valahova

Mérnökileg azt szeretnénk, hogy egy adott T idő elteltével mindig az elvárt megoldást ovlassuk ki (*lehetőleg minél pontosabban*).

Differenciálegyenletek esetén ez nem megvalósítható, de elvárhatjuk, hogy az idő múlásával egyre közelebb kerüljünk a megoldáshoz.

Nem minden template stabil

Periódikus kimenet egyszerű hálózat esetén:

Vizsgáljuk meg az alábbi template-et egy két cellából álló hálózat esetén:

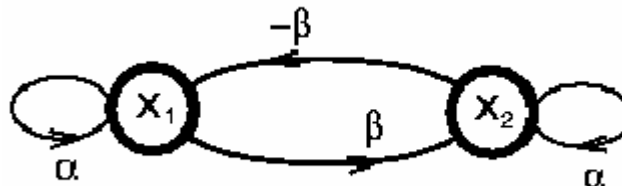
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \alpha y_1 - \beta y_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + \alpha y_2 + \beta y_1$$

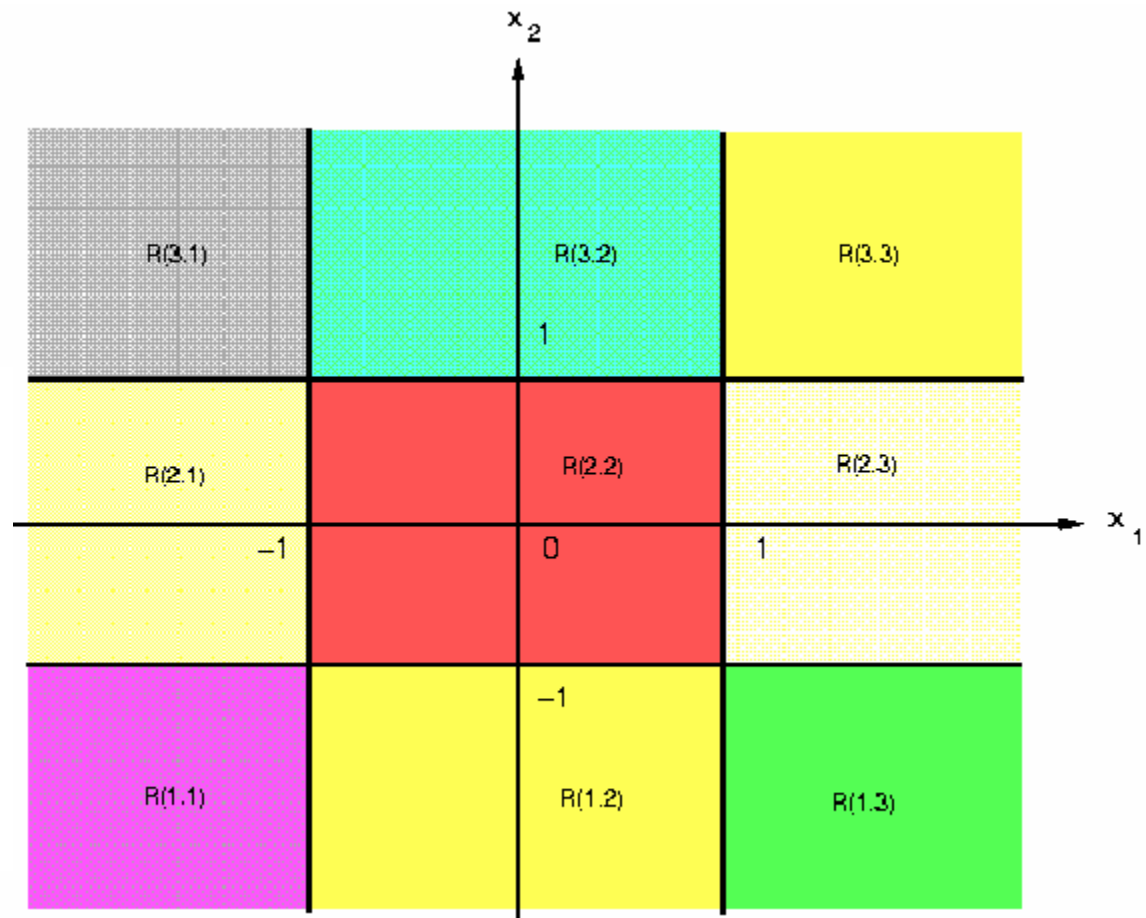
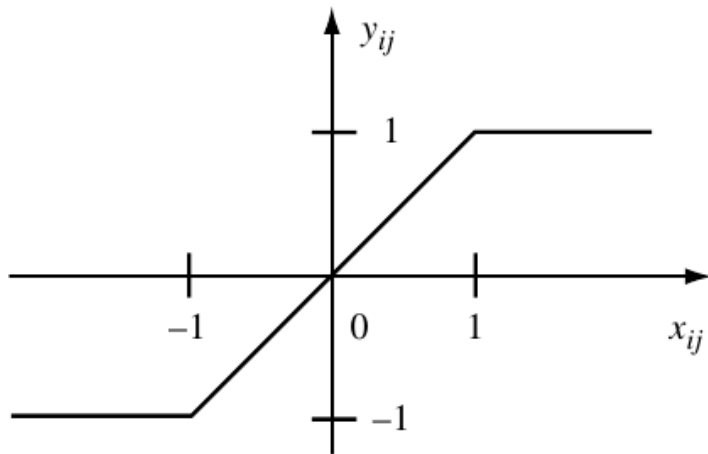


Nem minden template stabil

Összesen 9 különböző dinamikánk van

$$-x_1 + 2f(x_1) - 2f(x_2) = 0$$

$$-x_2 + 2f(x_2) + 2f(x_1) = 0$$



Template-ek a gyakorlatban

Középső rész $-1 < x_1 < 1$:

$-1 < x_2 < 1$:

$$-x_1 + 2f(x_1) - 2f(x_2) = 0$$

$$-x_2 + 2f(x_2) + 2f(x_1) = 0$$

Ezen a szakaszon: $f(x_1) = x_1$

$$-x_1 + 2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$-x_2 + 2x_2 + 2x_1 = 0$$

A dinamikának egyetlen stabil pontja van: $x_1=0$ $x_2=0$

Template-ek a gyakorlatban

Bal oldali sáv: $x_1 < -1$

Ezen a szakaszon: $f(x_1) = -1$

A dinamikának nincs stabil pontja

Template-ek a gyakorlatban

Jobb oldali sáv: $x_1 > 1$

Ezen a szakaszon: $f(x_1) = 1$

A dinamikának nincs stabil pontja

Template-ek a gyakorlatban

Az egyetlen stabil pont körül (0,0) a megoldás:

$$-x_1 + 2f(x_1) - 2f(x_2) = 0$$

$$\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2$$

$$-x_2 + 2f(x_2) + 2f(x_1) = 0$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2$$

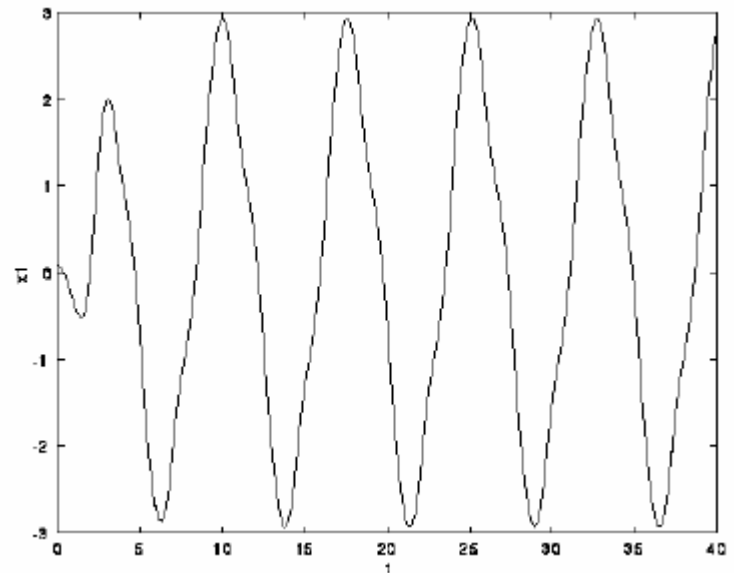
A diffegyenlet megoldás a harmonikus oszcilláció dinamikája:

$$\lambda_1 = 1 + j2$$

$$\lambda_2 = 1 - j2$$

$$x_1(t) = ke^t \cos(2t + \theta)$$

$$x_2(t) = ke^t \sin(2t + \theta)$$



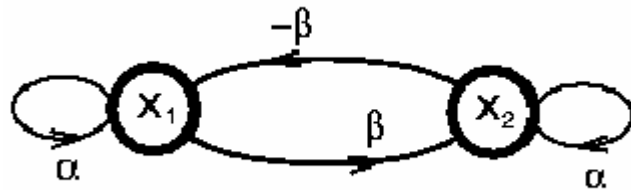
Kaotikus dinamika

Sinus-os bemenet az egyik cellán:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.2 & 2 & -1.2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

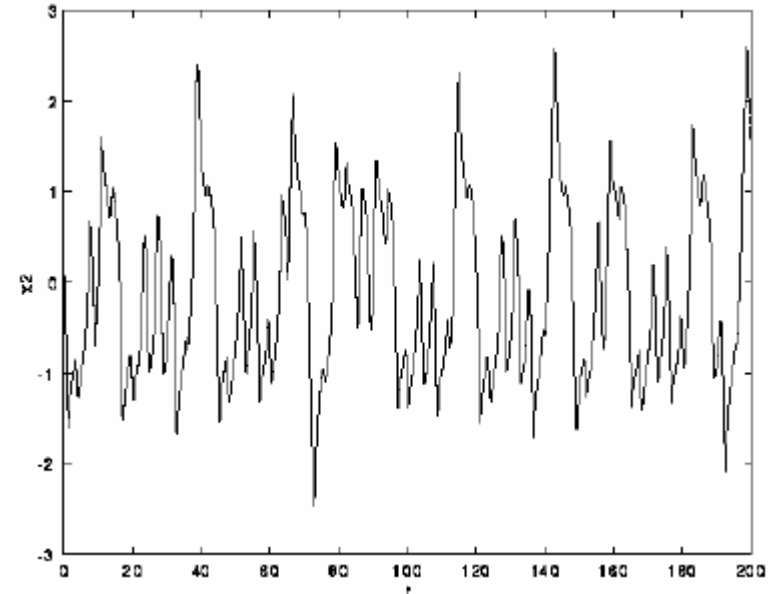
$$z = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$



$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2 y_1 - 1.2 y_2 + 4.04 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + 1.2 y_1 + 2 y_2$$

Kaotikus kimenet:



Kaotikus rendszer

Teljes mértékben determinisztikus

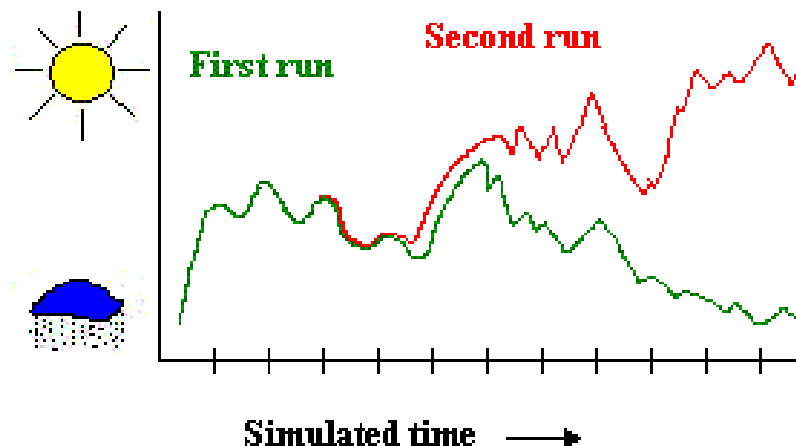
Könnyebb megadni a tulajdonságait,
mint definiálni:

1. Létezik tetszőlegesen sűrű
periódikus pálya
2. Érzékeny a kezdeti feltételekre
(pillangó effektus)
3. Topológikusan tranzitív

1960 Lorentz:

Időjárás előrejelzés

6 tizedessel számoló gép,
3 tizedes eredmény



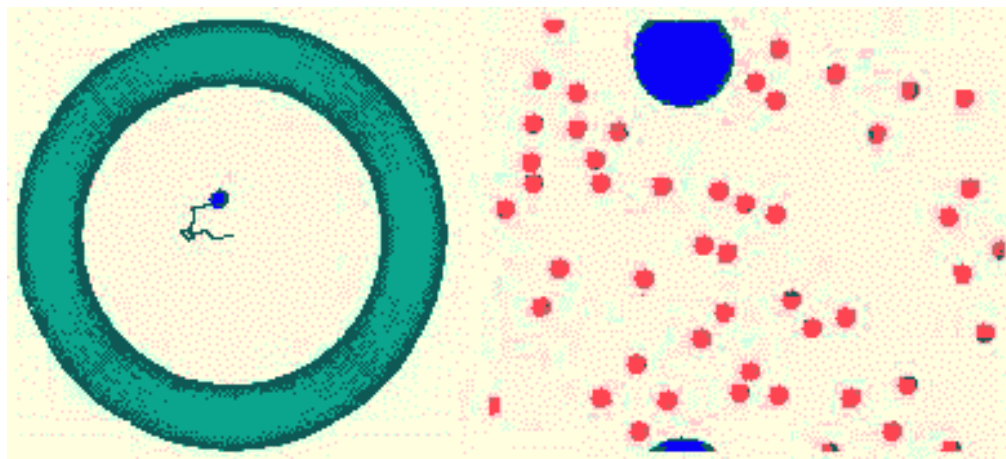
Kaotikus rendszerek a gyakorlatban

Véletlenszám generálás:

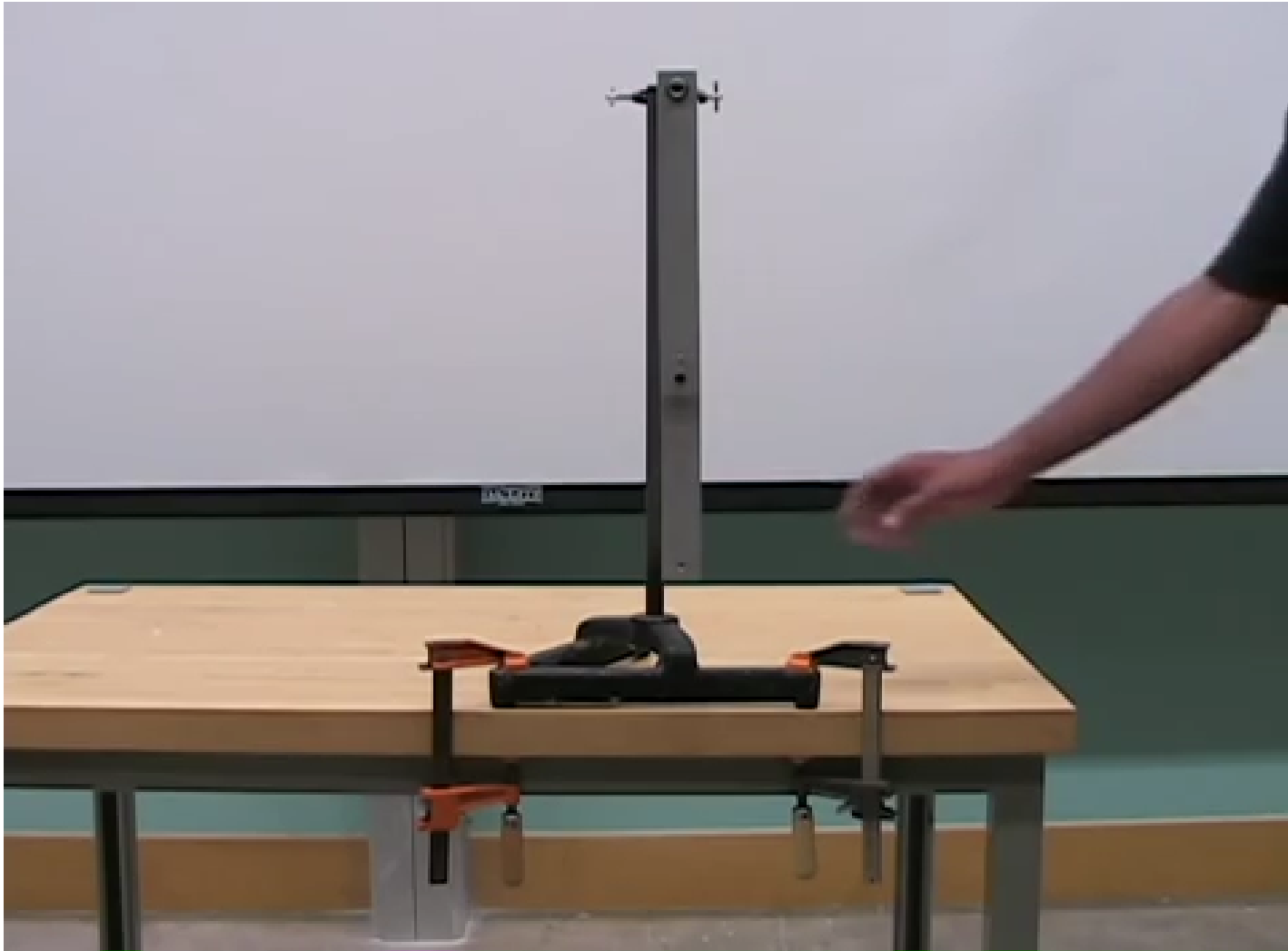
Ezen esetben hasznos, hogy a kezdeti feltételektől nagymértékben függ az eredmény

Brown mozgás: vitatott, hogy kaotikus-e

Tőzsde



Kaotikus oszcillátor



Kaotikus oszcillátor



Három test probléma

<http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/Flash/Chaos/ThreeBody/ThreeBody.html>

Stabilitás vizsgálata

Stabilitás:

Megmondhatjuk-e egy dinamikáról, hogy biztosan tart valahova anélkül, hogy megoldanánk a differenciálegyenletet?

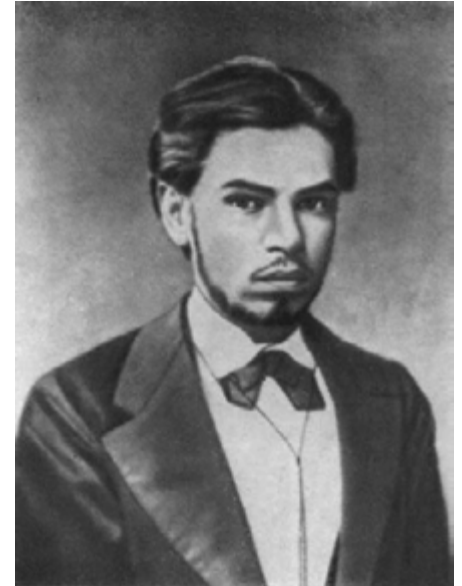
Ljapunov függvény:

$$V(x) > 0$$

$dV(x)/dx < 0$ (aszimptotikusan stabil, egyenlőség esetén stabil egyensúlyi pont)

Korlátos, monoton függvény, ami kapcsolódik a dinamikához

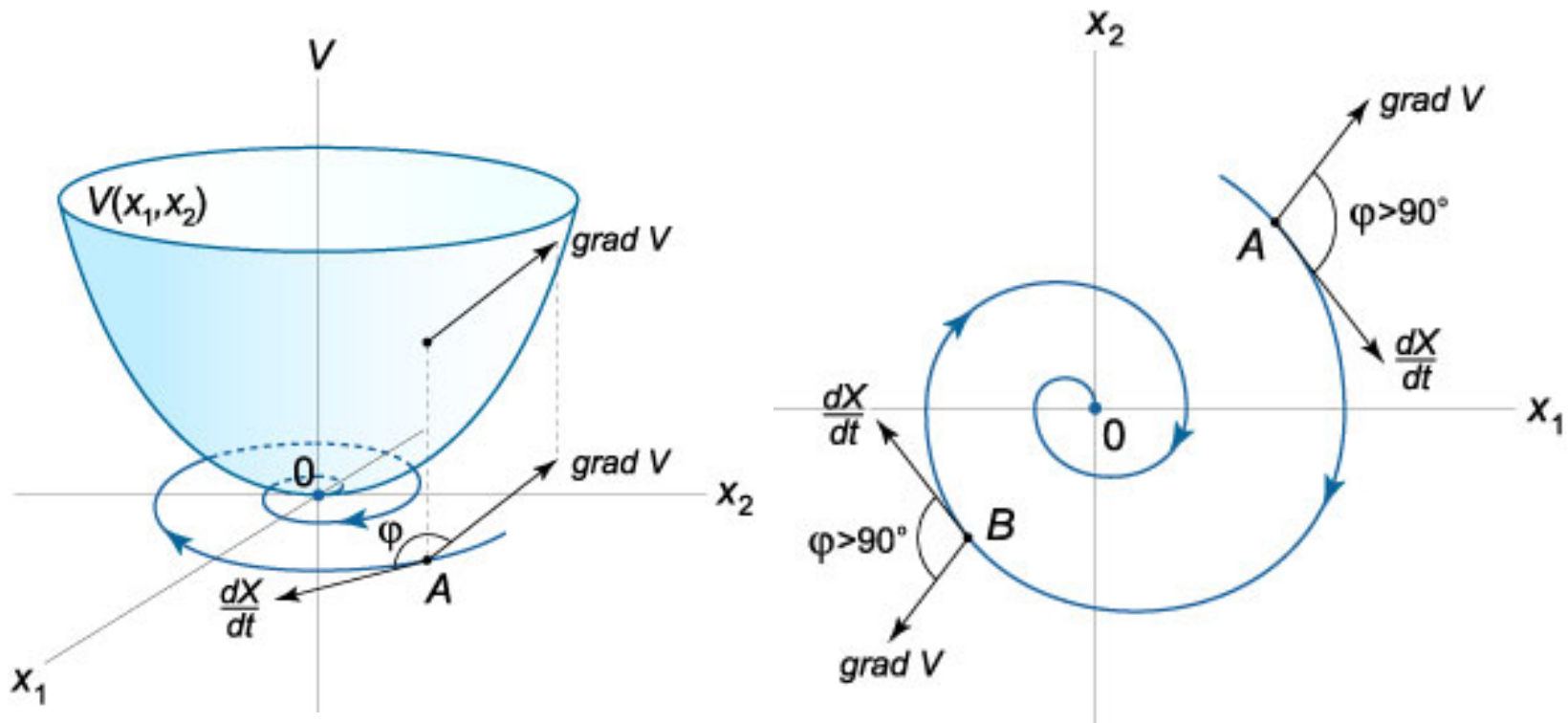
Energafüggvény



Template-ek a gyakorlatban

Ljapunov függvény

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2, \quad V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^4, \quad a, b > 0.$$

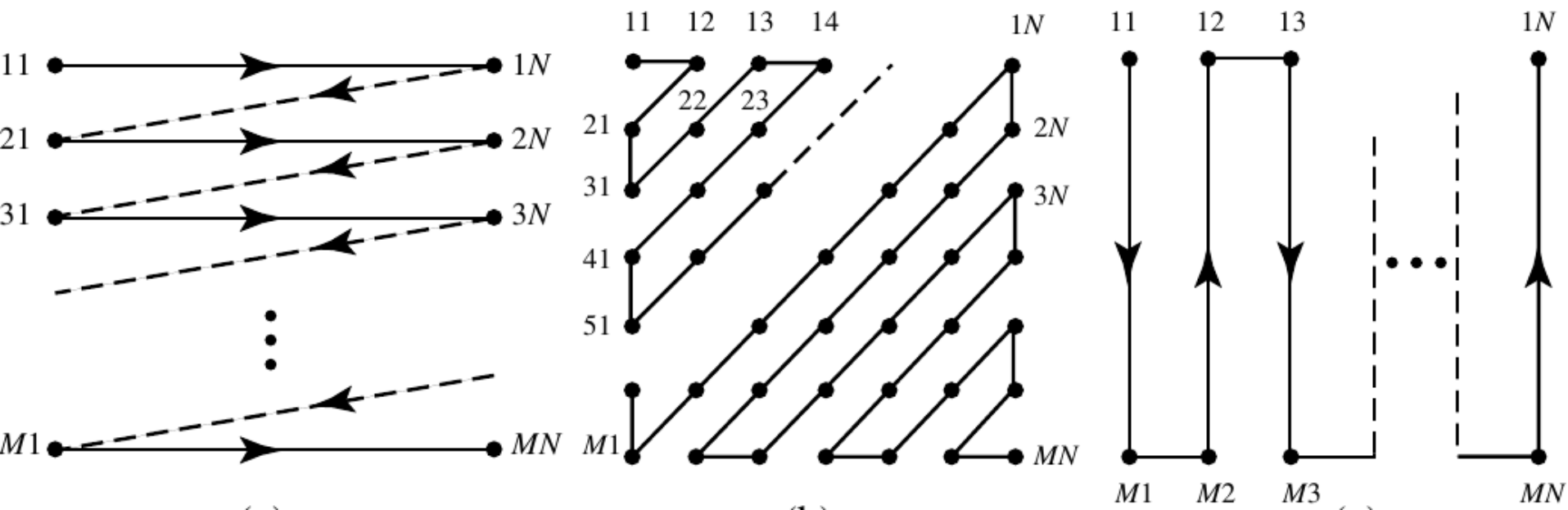


CNN stabilitás

A teljes hálózatot megadó differenciálegyenlet:

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x} + \hat{\mathbf{A}} \mathbf{y} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u} + \mathbf{z}$$

$$y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n = MN$$



CNN stabilitás lemma

Ha A centrálisan szimmetrikus $\hat{A}$ szimmetrikus

CNN stabilitás

CNN Ljapunov függvény:

$$V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \hat{\mathbf{A}}\mathbf{y} + \sum_{i=1}^n \left[\int_{\theta}^{y_i} f^{-1}(v)dv \right] - \mathbf{y}^T \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} - \mathbf{y}^T \mathbf{z}$$

Lássuk be, hogy valóban Ljapunov függvény

Ha $\mathbf{A}$ centrálisan szimmetrikus, akkor a dinamika asszimptótikusan stabil.

Elég, ha $\mathbf{A}$ előjelesen centrálisan szimmetrikus. Ezt most nem bizonyítjuk