

Számítógéppel irányított rendszerek elmélete

első házi feladat

Beadási határidő: 2014. 02. 27.

A megoldásokat kézzel kell kiszámolni és az ábrákat kézzel kell megrajzolni! Számítógépes programok használhatóak önellenőrzés céljából, de minden feladatnak tartalmaznia kell a megoldások levezetését!

Feladatok

1. Tekintsük a következő mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

- (a) Számítsa ki az A mátrix determinánsát!

Megoldás: Első sor szerinti kifejtéssel:

$$\det(A) = 2(-3 + 15) - 2(-15 + 3) - 2(25 - 1) = 0$$

Soreliminációval, a 3. sort az 1. sorból kétszer, a 2.sorból ötször kivonva az alábbi determinánst kapjuk:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -8 & 4 \\ 0 & -24 & 12 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

Mivel a 2. sor az 1. sor háromszorosa, $\det(A) = 0$.

- (b) Számítsa ki a következő kifejezés értékét: $e^A = ?$

Megoldás:

A mátrix hatványait számolva az alábbi értékeket kapjuk

$$A^2 = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -4 \\ 24 & -8 & -8 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ahonnan következik, hogy minden $n \geq 3$ hatványkitevő esetén az A^n mátrix a nullmátrix.

Az e^A kifejezés tehát az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & -4 \\ 11 & 0 & -5 \\ 13 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

2. Tekintsük a következő mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

- (a) Számítsa ki az A mátrix magterét és képterét!

Megoldás:

Mivel $\det(A) = 9 - 5 = 4 \neq 0$, a mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, ezért kifeszítik az egész kétdimenziós teret. Tehát $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^2$.

A dimenziótétel szerint $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$, tehát $\dim(\text{Ker}(A)) = 0$, így $\text{Ker}(A) = \{0\}$.

- (b) Mutassa meg, hogy az A mátrixra is teljesül a Cayley-Hamilton tétel!

Megoldás: A mátrix karakterisztikus egyenlete $(-3 - \lambda)^2 - 5 = \lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0$ ahova az A mátrixot behelyettesítve látható, hogy teljesül az egyenlőség.

$$A^2 + 6A + 4I = \begin{bmatrix} 14 & 30 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Tekintsük a következő mátrixot:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Számítsa ki az A mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

Megoldás:

Az A mátrix karakterisztikus egyenlete: $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$.

Az egyenlet konstans tagja a gyökök szorzata, ezért ha a harmadfokú egyenletből nem tudjuk kiemelni egyik gyöktényezőt sem, és feltételezhető, hogy a gyökök egész számok, akkor érdemes a konstans tag osztóit visszahelyettesíteni az egyenletbe.

Látható, hogy $\lambda_1 = 1$ gyöke az egyenletnek. Ez alapján polinomosztással kapható:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0, \text{ ahonnan } \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5.$$

$\lambda_{1,2} = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor számítása során az alábbi lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Ez alapján a koordinátákra az $x + 2y + z = 0$ összefüggést kapjuk, amelyből a szabad változók helyettesítése (1. $y = 1, z = 0$, 2. $y = 0, z = 1$) után a

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot p, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot q, \quad \text{ahol } p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\lambda_3 = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektor számítása során az alábbi lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ -3 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 4 & -4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Ez alapján a koordinátákra az $x = y = z$ feltételek adódnak, amely alapján

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot s, \quad \text{ahol } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- (b) Bázist alkotnak-e a sajátvektorok $\mathbb{R}^3$ -ban? Ha igen adjon egy példát!

Megoldás:

Igen, létezik sajátvektorokból álló bázis, például

$$b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A vektorok bázist alkotnak, mivel a belőlük, mint oszlopvektorokból előállított mátrix determinánsa $3 \neq 0$.

4. A radioaktív bomlás során a sugárzó anyag $y(t)$ mennyisége arányos az anyag csökkenésének gyorsaságával. Írjuk fel a folyamatot leíró differenciálegyenletet. Határozzuk meg az arányossági tényezőt, ha az anyag felezési ideje 100 (másodperc), azaz ennyi idő múlva éppen fele annyi sugárzó anyag van, mint kezdetben. Mi lesz az $y(t)$ függvény alakja, ha kezdetben 1 (kilogramm) volt anyagunkból?

Megoldás: Ismertek az alábbi képletek:

$a = \lambda y(t)$, $a = -\frac{dy}{dt}$, ahol a a bomlás aktivitása.

Ezekből kaphatjuk a rendszert leíró differenciál egyenletrendszert: $\dot{y}(t) = -\lambda y(t)$

melynek megoldása $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$

ahol $y_0 = 1 \text{ kg}$, a sugárzó anyag kezdeti mennyisége.

Ismert továbbá, hogy $y(t) = y_0 2^{-\frac{t}{T}}$, melyet egyenlővé téve az előbbi eredménnyel

$$e^{-\lambda t} = 2^{-\frac{t}{T}} = (e^{\ln(2)})^{-\frac{t}{T}} = e^{\ln(2) \cdot \frac{-t}{T}}$$

$$-\lambda t = \ln(2) \cdot \frac{-t}{T} \longrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{T} = \frac{\ln(2)}{100}$$

A sugárzó anyag aktuális mennyisége tehát $y(t) = 1000 e^{\frac{\ln(2)}{100} t} \approx 6,9315 \cdot 10^{-3}$

5. Oldja meg tetszőleges módszerrel a következő lineáris differenciálegyenletet!

$$\dot{x}(t) = 2x(t), \quad x(0) = 3$$

Megoldás:

Mindkét oldalt Laplace transzformálva $\mathfrak{L}(\dot{x}) = 2 \cdot \mathfrak{L}(x)$,

ahol $\mathfrak{L}(\dot{x}) = sX(s) - x(0) = sX(s) - 3$.

Visszahelyettesítve az első egyenletbe az $\mathfrak{L}(x) = \frac{3}{s-2}$ azonosság adódik, melyet inverz Laplace transzformálva kapható meg a feladat megoldása: $x(t) = 3e^{2t}$.

6. Adja meg a következő lineáris differenciálegyenlet rendszer általános megoldását:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_2(t) \end{aligned}$$

Megoldás:

Mivel a két koordináta egymástól független, ezért az egyenleteket külön-külön is megoldhatjuk.

Az 5. feladatban alkalmazott módszer alapján:

$$x_1(t) = c_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = c_2 e^{2t}$$

- (a) Ábrázolja az $x_1 - x_2$ síkon a megoldás görbék viselkedését $c_1 = -1, 0, 1$ és $c_2 = 1$ kezdeti értékek esetén.

Megoldás:

$c_1 = 0$ esetén $x_1(t) = 0$, aminek függvényekét nincs értelme semmilyen függvény ábrázolásának, ezért csak a másik két esetet tekintjük.

$$\text{1. eset: } c_1 = -1, c_2 = 1 \longrightarrow x_1 = -e^{-t}, x_2 = e^{2t}$$

$e^{2t} = f(-e^{-t})$, ahonnan a hatványozás azonosságainak alkalmazásával adódik, hogy $f(x) = (-x)^{-2}$ (csak a negatív számokon értelmezve)

$$\text{2. eset: } c_1 = 1, c_2 = 1 \longrightarrow x_1 = e^{-t}, x_2 = e^{2t}$$

$e^{2t} = g(e^{-t})$, ahonnan
 $g(x) = x^{-2}$ (csak a pozitív számokon értelmezve)

Megoldás 2:

Rendezzük át t -re az x_1 -hez tartozó megoldást.

$$x_1 = c_1 e^{-t} \rightarrow \log(|x_1|) = \log(c_1) - t \rightarrow t = \log\left(\frac{c_1}{|x_1|}\right) \quad (1)$$

$$x_2 = c_2 e^{2t} \rightarrow x_2 = \frac{c_1^2 c_2}{x_1^2} \quad (2)$$

Az ábra a mellékelt matlab fájlban található.