

AZ INFORMÁCIÓTECHNIKA ÉS BIONIKA FIZIKAI ALAPJAI I.

JEGYZET

Rudner Tamás IBYG8Z

2015. június 22.

Tartalomjegyzék

1. Klasszikus mechanika	4
1.1. SI mértékegységrendszer	4
1.1.1. Mértékegység	4
1.1.2. Prefixumok	4
1.2. Tér, idő, test, erő. Newton-törvények	5
1.3. Homogén, sztatikus erőtér	6
1.4. Lorentz-erőtörvény	6
1.4.1. Elektromágneses erőtér	7
1.5. Az elektromágneses tér munkája	7
1.6. Részecske gyorsítása	8
1.6.1. A részecske tömegének növelése	8
1.6.2. A részecske sebessége tetszőlegesen nagy U gyorsítófeszültség esetén	9
1.6.3. A részecskék nyugalmi energiája	9
1.7. Töltött részecske pályája sztatikus elektromágneses térben	9
1.7.1. Részecske mozgása homogén, sztatikus elektromos erőtérben	10
1.7.2. Részecske mozgása homogén, sztatikus mágneses erőtérben	10
1.7.3. Részecske mozgása sztatikus, homogén, egymásra merőleges elektromos és mágneses térben	11
1.8. Mérnöki alkalmazások	12
1.8.1. Az elektrosztatikus eltérítésű katódsugárcső	13
1.8.2. A mágneses eltérítésű tömegspektrográf	13
1.8.3. A ciklotron	14
1.9. Analitikus mechanika	15
1.9.1. Hamilton variációs elv és Newton mozgástörvény kapcsolata	16
1.9.2. Általánosított lendület és a Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenletek	17
1.9.3. Analitikus mechanika példák	17
2. Klasszikus elektrodinamika	19
2.1. Matematikai bevezető	19
2.1.1. Skalár-vektor függvény, gradiens, rotáció	19
2.1.2. Vektor-vektor függvény, divergencia, rotáció	19
2.1.3. Gauss-Osztrogradszkij és Stokes-tétel	20
2.1.4. Koordináta-transzformáció	20
2.2. Maxwell-egyenletek	22
2.2.1. I. Maxwell-egyenlet	23
2.2.2. II. Maxwell-egyenlet	23
2.2.3. III. Maxwell-egyenlet	24
2.2.4. IV. Maxwell egyenlet	24
2.2.5. Eltolási áram és az elektromos térerősség kapcsolata	24
2.2.6. A mágneses térerősség és indukcióvektor kapcsolata	25
2.2.7. Elektro- illetve magnetosztatika	26
2.2.8. Stacionárius terek	27
2.3. Inverz-problémák	27
2.3.1. Coulomb-törvény	29
2.3.2. Biot-Savart törvény	29
2.4. Kirchhoff-törvények	29
2.4.1. I. Kirchhoff-törvény	30
2.4.2. II. Kirchhoff-törvény	30

2.5.	Mozgó, pontszerű töltések elektromágneses tere	31
2.5.1.	Állandó sebességgel mozgó töltés	31
2.5.2.	Gyorsuló töltés	32
2.6.	Dipólus és multipólus elektrosztatikus tere	32
2.6.1.	Dipólus	32
2.6.2.	Multipólus	34
2.7.	Vonalszerű és felületi töltések erőtere	36
2.7.1.	Vonaltöltés potenciálja	37
2.7.2.	Felületi töltés potenciálja	39
2.8.	Elektromágneses energia	39
2.8.1.	Az elektromágneses tér energia- és lendülethordozója	39
2.8.2.	Véges térfogatú elektromágneses tér energiája, energiamegmaradás	40
2.9.	A Maxwell-egyenletek megoldásának egyértelműsége	41
2.10.	A retardált potenciál	42
2.11.	Maxwell-egyenletek harmonikus időfüggés esetén. Frekvenciatartomány. Komplex amplitúdók	44
2.12.	Az elektromágneses hullámok	44
2.12.1.	Hullámegyenletek a frekvenciatartományba	45
2.12.2.	A fény, mint elektromágneses hullám	45
2.13.	Síkhullámok	46
2.13.1.	Síkhullámok terjedése különböző közegekben	47
2.14.	Távvezetékek	48
2.14.1.	Távíróegyenletek	49
2.14.2.	Hullámterjedés és reflexió távvezetékben	49
2.15.	A síkhullámok refrakciója. Snellius-Descartes törvény és Fresnel-egyenletek	50
3.	Kvantummechanika	52
3.1.	Az anyagok kettős természete	52
3.1.1.	A foton, mint "kettős természet"	52
3.1.2.	Az elektron hullámtermészete	54
3.2.	A fekete test sugárzása	55
3.3.	Fényelektromos jelenség	57
3.4.	Az atommag	59
3.5.	Bohr-féle atommodell	60
3.6.	Vonalas spektrum	61
3.7.	Schrödinger-egyenlet	61
3.7.1.	A Schrödinger-egyenlet megoldása változók szétválasztásával	62
3.7.2.	Az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet	63
3.8.	A kvantummechanika Schrödinger-féle posztulátumai	63
3.9.	A posztulátumok következményei	64
3.9.1.	Kvantummechanikai mérés	64
3.9.2.	A mérés várható értéke:	65
3.9.3.	A mérés szórása	66
3.9.4.	A várható érték időbeli függése	66
3.9.5.	Ehrenfest-tétel	67
3.9.6.	Heisenberg-féle határozatlansági reláció	67
3.9.7.	A hely és lendület együttes mérésének pontossági korlátja	68
3.10.	Az elektron spektruma	68

3.10.1. A dobozba zárt elektron megengedett energiái	69
3.10.2. Háromdimenziós dobozba zárt elektron hullámfüggvényei és energiaértékei	70
3.10.3. Elfajuló stacionárius sajátállapotok	72
3.10.4. Több elektron a dobozban	73
3.10.5. Szabad elektron. A hullámcsomag	73
3.10.6. Hullámcsomag a helykoordinátákkal és lendületkoordinátákkal	74
3.11. Hidrogén és hidrogénszerű atomok	74
3.12. A testek kvantummechanikája	76
4. Statisztikus és szilárdtest fizika	77
4.1. Mikro- és makroállapotok	77
4.2. A statisztikus fizika posztulátumai	77
4.3. Fermionok, bozonok és megkülönböztethető testek	77
4.3.1. Fermionok egyensúlyi állapota	78
4.3.2. Fermi-függvény	79
4.4. Az elektronok makroállapota	80
4.5. Sommerfeld-féle kádmmodell	81
4.6. Termikus elektronemisszió	81
4.6.1. A katód működése	82
4.7. Kontakt potenciál	82
4.8. Sajátvezetésű félvezetők	83
4.8.1. Töltés-neutralitás elve és a Fermi-szint	84
4.9. Adalékolt félvezető anyagok	84
4.9.1. Kontakt potenciál adalékolt félvezetők esetén	85
4.10. Töltéshordozók mozgatása külső elektromos térrel	85
4.11. A félvezetők töltéshordozóinak dinamikája	87
4.11.1. Gerjesztés és rekombináció	87
4.11.2. Differenciális Ohm-törvény a félvezetőkben	87
4.11.3. Gunn-effektus	88
4.11.4. Transzportot leíró dinamikai egyenletek	88
4.12. Az anyagok és az elektromágneses tér kölcsönhatása	89
4.12.1. Emisszió és abszorpció	89
4.13. Atomok termikus egyensúlyban	89
4.14. Mérnöki alkalmazások	90
4.14.1. A LASER és MASER	90

1. Klasszikus mechanika

1.1. SI mértékegységrendszer

A mértékegységrendszer néhány (7), nemzetközileg elfogadott mértékegységen, illetve a 10 különböző hatványain alapul.

1.1.1. Mértékegység

A 7 mértékegység a következő:

1. Hosszúság, amit méterben mérünk. Jele: l, mértékegysége: m.
2. Tömeg, amit kilogrammban mérünk. Jele: m, mértékegysége: kg.
3. Idő, amit secundumban mérünk. Jele: t, mértékegysége: s.
4. Elektromos áramerősség, amit amperben mérünk. Jele: I, mértékegysége: A.
5. Abszolút hőmérséklet, amit kelvinben mérünk. Jele: T, mértékegysége: K.
6. Anyagmennyiség, amit mólbán mérünk. Jele: n, mértékegysége: mol.
7. Fényerősség, amit kandelában mérünk. Jele: I_v , mértékegysége: cd.

Egy méter annak az útnak a hosszúsága, amit a fény vákuumban $\frac{1}{299792458}$ másodperc alatt tesz meg.

A kilogramm az 1889. évben, a tömeg nemzetközi etalonjának Párizsban elfogadott, és ma a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban, Sèvres-ben őrzött platina-iridium henger tömege.

A másodperc az alapállapotú cézium-133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás 9192631770 periódusának időtartama.

Az amper olyan állandó villamosáram erőssége, amely két egyenes, párhuzamos, végtelen hosszúságú, elhanyagolhatóan kicsiny kör keresztmetszetű és egymástól 1 méter távolságra lévő, vákuumban elhelyezkedő vezetőben fenntartva, e két vezető között méterenként $2 \cdot 10^{-7}$ N erőt hozna létre.

A kelvin a víz hármaspontjának termodinamikai hőmérsékletének 273.15-ad része.

A mól annak a rendszernek az anyagmennyisége, amely annyi elemi egységet tartalmaz, mint ahány atom van 0.012 kilogramm szén-12-ben. A mól alkalmazásakor meg kell határozni az elemi egység fajtáját; ez atom, molekula, ion, elektron, más részecske vagy ilyen részecskék meghatározott csoportja lehet.

A kandela az a fényforrás erőssége adott irányban, amely 540·1012 Hz frekvenciájú monokromatikus fényt bocsát ki és sugárerőssége ebben az irányban 683-ad watt per szteradian.

1.1.2. Prefixumok

Az SI mértékegységrendszer prefixumait az alábbi táblázat tartalmazza:

SI mértékegység rendszer prefixumai (előtagjai)				
(International System of Units, SI Prefixes)				
yotta	[Y]	1 000 000 000 000 000 000 000 000	$= 10^{24}$	E24
zetta	[Z]	1 000 000 000 000 000 000 000	$= 10^{21}$	E21
exa	[E]	1 000 000 000 000 000 000 000	$= 10^{18}$	E18
peta	[P]	1 000 000 000 000 000 000	$= 10^{15}$	E15
tera	[T]	1 000 000 000 000 000 000	$= 10^{12}$	E12
giga	[G]	1 000 000 000 000 000	$= 10^9$	E9
mega	[M]	1 000 000 000 000	$= 10^6$	E6
kilo	[k]	1 000 000	$= 10^3$	E3
hekto	[h]	100 000	$= 10^2$	E2
deka	[da]	10 000	$= 10^1$	E1
deci	[d]	0,1 000	$= 10^{-1}$	E-1
centi	[c]	0,01 000	$= 10^{-2}$	E-2
milli	[m]	0,001 000	$= 10^{-3}$	E-3
mikro	[μ]	0,000 001 000	$= 10^{-6}$	E-6
nano	[n]	0,000 000 001 000	$= 10^{-9}$	E-9
piko	[p]	0,000 000 000 001 000	$= 10^{-12}$	E-12
femto	[f]	0,000 000 000 000 001 000	$= 10^{-15}$	E-15
atto	[a]	0,000 000 000 000 000 001 000	$= 10^{-18}$	E-18
zepto	[z]	0,000 000 000 000 000 000 001 000	$= 10^{-21}$	E-21
yocto	[y]	0,000 000 000 000 000 000 000 001 000	$= 10^{-24}$	E-24

1. ábra.

Az MKSA-rendszer a Méter-Kilogramm-Secundum-Amper mozaikszóából ered.

1.2. Tér, idő, test, erő. Newton-törvények

A klasszikus fizika négy alapvető alapfogalma a homogén idő, a homogén és izotrop geometriai tér, a tömeggel rendelkező test és végül a testek közötti kölcsönhatást leíró erő.

Newton ezért azt hitte, hogy az összes test elemi - oszthatatlan - részesekéből áll, és ezeket erők mozgatják. A klasszikus mechanikában az m tömegű testek mozgását $\mathbf{F}$ erő hatására a *Newton-törvények* írják le. Az első törvény szerint erőmentes térben ($\mathbf{F}=0$) a test konstans $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0$ sebességgel mozog. A második törvény szerint a test lendületének ($\mathbf{p}$) időegységenkénti megváltozása arányos az erővel, tehát

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

ahol $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ és elfogadjuk kísérleti tényként, hogy

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ahol m_0 a test nyugalmi (tehetetlen) tömege, c pedig a fény vákuumbeli sebessége és $\approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

Amennyiben eltekintünk a *relativitáselmélettől*, úgy az (1) a következőképpen módosul:

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

A harmadik tétel pedig kimondja, hogy az akció és a rákövetkező reakció ellentétes irányú, azonos nagyságú, azaz, ha két test között ható erő $\mathbf{F}_{12}$ illetve $\mathbf{F}_{21}$, akkor teljesülnie kell, hogy

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

1.3. Homogén, sztatikus erőtér

Amennyiben egy erőtér homogén és sztatikus, az azt jelenti, hogy a tér minden pontjában az erőtér nagysága konstans és az időben ez nem változik.

A legegyszerűbb példakkal a pontszerű testek mozgásaiban találkozhatunk, például a "hajítások". Legyen $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$, ahol $\mathbf{k}$ a z tengely irányába mutató egységvektor, g pedig a gravitációs gyorsulás ($\approx 9,81 \frac{m}{s^2}$). Ekkor felírható a következő egyenlet (nem relativisztikus esetben):

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F} = -mg\mathbf{k}. \quad (2)$$

Ezt koordinátánként is felírhatjuk:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= -g. \end{aligned}$$

Ekkor, ha megoldjuk a fenti differenciálegyenleteket (kétszeres integrálással t_0 és t határokkal), a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} x &= v_{0x}(t - t_0) + r_{0x} \\ y &= v_{0y}(t - t_0) + r_{0y} \\ z &= -\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_{0z}(t - t_0) + r_{0z}. \end{aligned}$$

Ebből pedig felírhatjuk (2) teljes megoldását:

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}g\mathbf{k}(t - t_0)^2 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}_0.$$

Általánosan megjegyezhető, hogy amennyiben ismerünk egy homogén, sztatikus erőteret, akkor a mozgás pályájának x, y, z koordinátáját meghatározhatjuk 3 darab másodrendű, (in)homogén, állandóegyütthatós differenciálegyenlet megoldásaiként, és ebből alkotott vektor lesz a mozgás pályája.

1.4. Lorentz-erőtörvény

Mindig és mindenütt az a tapasztalat, hogy elektromos töltés körül elektromos erőtér van, melynek jele: $\mathbf{E}$ ($[\mathbf{E}] = \frac{V}{m}$). Két töltés egymásra a *Coulomb-erő*vel hat, amely a következő:

$$\mathbf{F}_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

ahol q_1, q_2 (mindkettő *As*-ban) a két töltés nagysága, $\mathbf{r}$ pedig az ellentétes töltés irányába mutató vektor, melynek nagysága megegyezik a két töltés közötti távolsággal, ϵ_0 pedig a vákuum permittivitása, értéke:

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}.$$

Mindig és mindenütt az a tapasztalat, hogy az elektromos áram (mozgó töltés) körül mágneses erőter van, melynek jele: $\mathbf{B}$ ($[\mathbf{B}] = \frac{Vs}{m^2}$). A mágneses tér egy mozgó töltésre erővel hat, melynek nagysága:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

ahol q a töltés nagysága, és $\mathbf{v}$ a töltés sebessége.

1.4.1. Elektromágneses erőter

Amennyiben a töltött részecskét elektromágneses erőterbe tesszük, a testre ható erő a következőképpen számolható:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Töltött részecske mozgása elektromágneses térben:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

azonban, ha a sebesség sokkal kisebb, mint a fénysebesség, úgy az egyenlet a következőre redukálódik:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

1.5. Az elektromágneses tér munkája

Mozogjon egy m tömegű, q töltésű részecske a vizsgált t_1 -től t_2 -ig terjedő intervallumban P_1 és P_2 pontok között egy pályán. Számítsuk ki a munkát, amit az erőter végez:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} d\mathbf{r} + q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{v} \times \mathbf{B} d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r}. \quad (3)$$

Végezzük el a következő átalakítást:

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \mathbf{v} dt,$$

majd ezt helyettesítjük a (3) egyenletbe:

$$\int_{P_1}^{P_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} m \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \int_{v_1}^{v_2} m \mathbf{v} d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Most pedig tekintsük a (3) egyenlet másik oldalát:

$$q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} d\mathbf{r} + q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{v} \times \mathbf{B} d\mathbf{r} = q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} d\mathbf{r}, \quad (4)$$

hiszen a $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ vektor merőleges $d\mathbf{r}$ vektorra, mert az elmozdulásvektor párhuzamos a sebességvektorral, és $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ pedig merőleges a sebességre (és mágneses indukcióra), mint vektorra.

Ebből levonhatunk egy nagyon egyszerű következményt, nevezetesen azt, hogy a mágneses erőter munkát nem végez, a sebesség nagyságát nem tudja változtatni, csak az irányát.

Most tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sztatikus erőter, mert akkor előállítható egy skalártér negatív gradienseként:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}U(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Ezt behelyettesítve (4)-be, a következőt kapjuk:

$$q \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} d\mathbf{r} = -q \int_{P_1}^{P_2} \text{grad}U d\mathbf{r} = q(U_1 - U_2).$$

a (3)-ban leírt egyenlőség miatt tehát:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = q(U_1 - U_2),$$

amit átrendezve megkapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + qU_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + qU_2.$$

Tehát kimondhatjuk azt a következményt, hogy sztatikus, konzervatív erőter esetén a test összenergiája minden pillanatban egyenlő a kinetikus és potenciális energiák összegével, tehát az energia megmarad.

1.6. Részecske gyorsítása

A fenti (nem relativisztikus esetben) levezetett egyenlet a következőképp módosul, ha nem tekintünk el a relativitáselmélettől:

$$mc^2 - m_0c^2 = q(U_2 - U_1). \quad (6)$$

1.6.1. A részecske tömegének növelése

Relativisztikus esetben, amikor tetszőleges sebességet tekinthetünk, akkor a testek tömege a sebesség növelésével nő.

Tegyük fel, hogy egy részecskét nyugalmi helyzetből szeretnénk valamilyen U feszültséggel gyorsítani, hogy a részecske m_0 nyugalmi tömege a k -szorosára növekedjen. Tekintsük a következő egyenletet:

$$km_0c^2 - m_0c^2 = qU.$$

Rendezzük át az egyenletet, és fejezzük ki U -t:

$$U = \frac{(k-1)m_0c^2}{q}.$$

1.6.2. A részecske sebessége tetszőlegesen nagy U gyorsítófeszültség esetén

Tegyük fel, hogy az előbbi részecskénket valamilyen U - tetszőleges - feszültséggel gyorsítjuk, és szeretnénk megtudni a végsebességét. Ekkor (6)-ba behelyettesítve a relativisztikus tömeget, azt kapjuk, hogy:

$$mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = qU.$$

Rendezzük át v -re a kifejezést:

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + \frac{qU}{m_0c^2})^2}}.$$

1.6.3. A részecskék nyugalmi energiája

Egy adott q töltésű részecske nyugalmi energiáját a következő képlettel lehet kiszámolni:

$$E_{nyugalmi} = m_0c^2.$$

Mielőtt meghatároznánk a fontosabb részecskék (elektron, proton, neutron) nyugalmi energiáját, előbb be kell vezetnünk egy új fajta energiaegységet, az elektronvoltot (eV).

Az elektronvolt pontosan megegyezik egy elektron töltésének és $1V$ potenciál szorzatának, tehát

$$1eV = 1e \cdot 1V = 1.6 \cdot 10^{-19}Vs(Ws).$$

Az elektron tömege $9.1 \cdot 10^{-31} kg$, tehát a nyugalmi energiája:

$$E_{nyugalmi} = 9.1 \cdot 10^{-31}(3 \cdot 10^8)^2 = 8.19 \cdot 10^{-14}Ws = 5.11 \cdot 10^5eV.$$

A neutron és proton nyugalmi energiája ebből egyszerű arányként határozható meg, hiszen a tömegarányok a következők

$$\frac{m_n}{m_e} = \frac{1.67 \cdot 10^{-27}}{9.1 \cdot 10^{-31}} = 1.83 \cdot 10^{(3)} \approx \frac{m_p}{m_e}$$

Ebből pedig már kiszámolható a proton és neutron nyugalmi energiája:

$$E_{p,nyugalmi} = \frac{m_p}{m_e} 0.511 \cdot 10^5 = 938.2MeV.$$

A neutron nyugalmi energiája megközelítőleg ugyanennyi, ugyanis tömegükben csak a harmadik tizedesjegytől van különbség.

1.7. Töltött részecske pályája sztatikus elektromágneses térben

A töltött részecskére az elektromágneses erőter erőt gyakorol, és ezáltal "mozgatja". A mágneses erőter a sebesség nagyságát ugyan megváltoztatni nem tudja, de irányát igen.

1.7.1. Részecske mozgása homogén, sztatikus elektromos erőterben

Az egyik legegyszerűbb elektromágneses erőter, mikor nincs jelen mágneses térerősség, csak elektromos.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$, és $\mathbf{B} = 0$. Továbbá tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_0 = v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j} + v_{z0}\mathbf{k}$, és $\mathbf{r}_0 = r_{x0}\mathbf{i} + r_{y0}\mathbf{j} + r_{z0}\mathbf{k}$. Ekkor a mozgásegyenleteket felírva az m tömegű részecskére (nem relativisztikus):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qE_x \\ m\ddot{y} &= qE_y \\ m\ddot{z} &= qE_z. \end{aligned}$$

Oldjuk meg a fenti differenciálegyenleteket kétszeres integrálással, majd a kapott eredmény:

$$\begin{aligned} x &= \frac{q}{2m}E_x(t - t_0)^2 + v_{x0}(t - t_0) + r_{x0} \\ y &= \frac{q}{2m}E_y(t - t_0)^2 + v_{y0}(t - t_0) + r_{y0} \\ z &= \frac{q}{2m}E_z(t - t_0)^2 + v_{z0}(t - t_0) + r_{z0} \end{aligned}$$

Ezt egzakt formában a következőképpen írhatjuk:

$$\mathbf{r}(t) = \frac{q\mathbf{E}}{2m}(t - t_0)^2 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}_0,$$

tehát a részecske az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{v}_0$ vektorok által kifeszített síkon lévő parabola pályán fog mozogni.

1.7.2. Részecske mozgása homogén, sztatikus mágneses erőterben

Tegyük fel, hogy az előző fejezetben szerepelt $\mathbf{v}_0$ és $\mathbf{r}_0$ vektorok adottak most is, és tegyük fel, hogy $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, illetve $\mathbf{E} = 0$. Ekkor a mozgásegyenleteket felírhatjuk az m tömegű részecskére, de előbb nézzük, hogy mi lesz a teljes mozgásegyenlet ($v \ll c$ feltételezéssel élve):

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Láthatjuk, hogy az erő mindig merőleges a sebességre. Ez annyit jelent, hogy a tér a sebességnek csak az irányát tudja befolyásolni, a nagyságát nem.

Szorozzuk meg a fenti összefüggést skalárisan $\mathbf{v}$ -vel, és ekkor a következő összefüggésre jutunk:

$$m\langle \mathbf{v}, \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rangle = \langle \mathbf{v}, q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rangle = 0.$$

A skalárszorzat képzése és az időbeli derivált sorrendjének "felcserélése" esetünkben nem változtat a lényegi következményeken, csupán egy kétszeres eredményt kapunk, azonban egyenletrendezéssel ez eliminálható. Tehát:

$$\frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = 0,$$

tehát v^2 konstans, azaz $|v|$ konstans.

Amennyiben pedig a sebesség abszolútértéke állandó és a ható erő állandóan merőleges a sebességre úgy egy síkmozgás alakul ki, mégpedig egyetlen ilyen síkmozgás van, az egyenletes körmozgás. A részecske tehát körpályán mozog.

A körpályán mozgó test gyorsulása

$$\frac{v^2}{r},$$

innen pedig egyszerűen felírhatjuk a newtoni mozgásegyenletet:

$$m \frac{v^2}{r} = qvB,$$

amit egy kicsit árendezve azt kapjuk, hogy

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Tehát a körpályán mozgó részecske pályájának a sugara arányos a részecske lendületével.

1.7.3. Részecske mozgása sztatikus, homogén, egymásra merőleges elektromos és mágneses térben

Amennyiben a sebesség elhanyagolhatóan kicsi a fénysebességhez képest, úgy a Newton-féle mozgásegyenletre egy állandó együtthatós, lineáris, másodrendű differenciálegyenletet kapunk:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

ami megoldható, $\mathbf{r}(t)$ kiszámolható tetszőleges $\mathbf{v}_0$ és $\mathbf{r}_0$ esetén.

Tegyük fel, hogy az elektromos és mágneses terek egymásra merőlegesek. Ekkor a mozgás $\mathbf{E}$ irányú egyenletesen gyorsuló, és a $\mathbf{B}$ -re merőleges síkban elhelyezkedő ciklois mozgás szuperpozíciója lesz. Ennek igazolására tegyük fel, hogy a test az origóban áll, tehát $\mathbf{v}_0$ és $\mathbf{r}_0$ is zérus.

Bontsuk fel a sebességet és az elektromos erőt $\mathbf{B}$ -vel párhuzamos és $\mathbf{B}$ -re merőleges összetevőkre:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}\end{aligned}$$

Ez esetben a mozgásegyenlet két független egyenletre "esik szét":

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} &= \frac{q}{m} \mathbf{E}_{\parallel} \\ \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} &= \frac{q}{m} (\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}) + \frac{q}{m} \mathbf{E}_{\perp}.\end{aligned}$$

Az első egyenlet egy $\mathbf{E}$ irányú egyenletesen gyorsuló mozgást ír le, még pedig:

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_{\parallel} \frac{(t - t_0)^2}{2}.$$

A második esetben a részecskére ható $q\mathbf{E}_{\perp}$ erő merőleges $\mathbf{B}$ -re. Vegyünk fel most egy másik koordinátarendszert, amelynek tengelyei a $t = t_0$ időpillanatban az előző koordináta-tengelyekkel egybeesnek, de amely a régi rendszerünkhöz képest állandó $\mathbf{u}$ sebességgel mozog.

Tetszőleges időpillanatban a részecske sebessége az eredeti (nyugvó) koordinátarendszerben mérve:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_r,$$

ahol $\mathbf{u}$ a mozgó koordinátarendszer sebessége, $\mathbf{v}_r$ pedig a mozgó rendszerhez viszonyított (tehát relatív) sebesség. Majd, ha ezt behelyettesítjük a mozgásegyenletbe, a következőt kapjuk:

$$m \frac{d(\mathbf{u} + \mathbf{v}_r)}{dt} = q(\mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}). \quad (7)$$

Most pedig az eddig határozatlan $\mathbf{u}$ sebességet úgy válasszuk meg, hogy a mozgás a mozgó koordinátarendszerben a lehető legegyszerűbb legyen. Határozzuk meg úgy, hogy (7) jobb oldalán a zárójel első két tagja nullát adjon, vagyis:

$$\mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0.$$

Tehát $\mathbf{u}$ nagysága:

$$|\mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{E}_{\parallel}|}{|\mathbf{B}|} = \frac{E}{B},$$

azaz

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{E}_{\parallel} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

A mozgásegyenlet a mozgó koordinátarendszerben tehát:

$$m \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = q(\mathbf{v}_r \times \mathbf{B}),$$

hisz $\mathbf{u}$ differenciálhányadosa állandó lévén zérus.

A részecske a mozgó koordináta-rendszerben tehát úgy mozog, mintha csak mágneses tér volna jelen. Az elektromos tér ezen koordinátarendszer transzlációs sebességén keresztül érvényesül. A mozgó rendszerből az elektromos tér mintegy kitranszformálódott. A részecske a mozgó koordináta-rendszerben körpályát ír le, ha $\mathbf{v}_{0r}$ merőleges $\mathbf{B}$ -re, de ez a koordináta-rendszer egyenletes transzlációs mozgást végez. A részecske pályája eredeti koordináta-rendszerünkben tehát ciklois lesz.

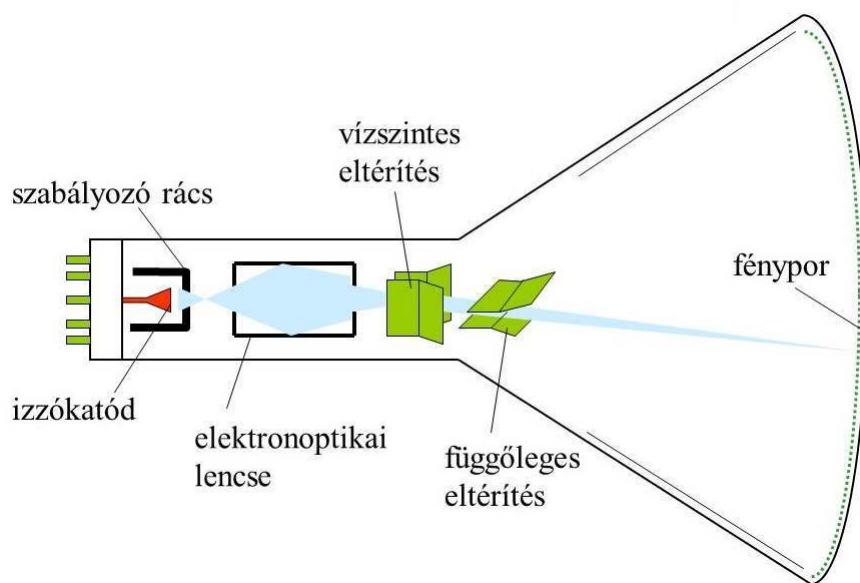
1.8. Mérnöki alkalmazások

A fentebb tárgyalt mozgásokat több területen is alkalmazzák, így a katódsugárcsőes tévénél vagy monitornál (bár ez ma már kevésbé népszerű), tömegspektográfoknál, illetve részecskegyorsítóknál is, csak hogy egy pár példát említsünk.

1.8.1. Az elektrosztatikus eltérítésű katódsugárcső

A katódsugárcsővel könnyen találkozhattunk egyszerűbb (és jó nagy méretű) monitorok, illetve tévékészülékek esetén. A működését leírni egyszerű (elektronok csapódnak a fluoreszcens ernyőre, és így fel-felvillanó képpontokként áll össze a kép), azonban megérteni már kicsit nehezebb.

A 2. ábrán látható, hogy egy katódról elektronok lépnek ki, amiket egy szabályozó rács és lencse fókuszál, majd két vízszintesen párhuzamos, és függőlegesen párhuzamos kondenzátor térít el, mégpedig úgy, hogy a köztük lévő sztatikus elektromos tér kimozdítja az eredeti pályájáról az elektront, és így a fluoreszcens ernyő tetszőleges pontjára juttatja azt.



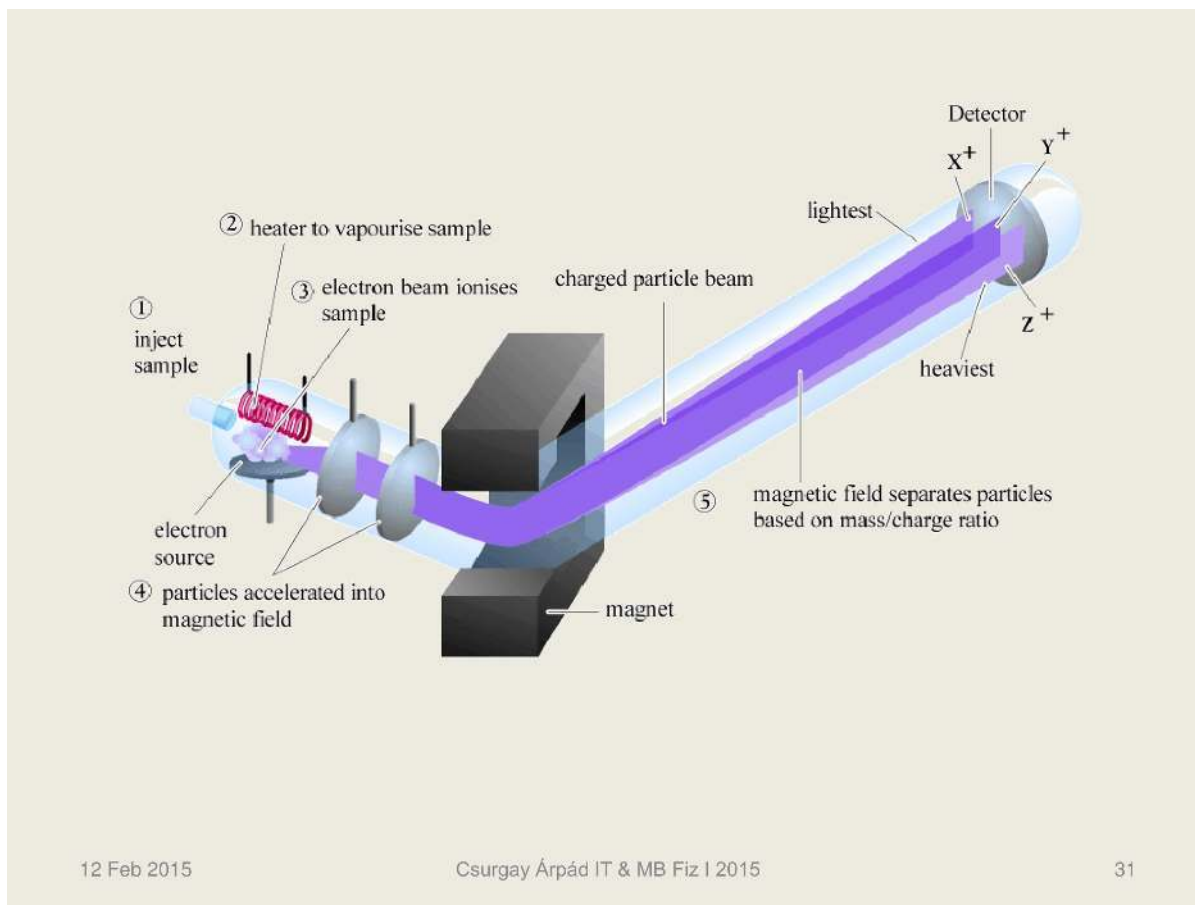
2. ábra.

1.8.2. A mágneses eltérítésű tömegspektrográf

Az atomok szétválaszthatóak a töltésük segítségével, ugyanis, ha egy részecskét belövünk mágneses térbe, akkor az körpályára fog állni. A körpálya sugara pedig a következőképpen számolható:

$$r = \frac{mv}{qB}.$$

Ebből láthatjuk, hogy állandó v sebesség esetén (amit gyorsítóval tudunk biztosítani) a tömeg és töltés arányában a 3. ábrán látható eszköz szétválasztja a részecskéket.



3. ábra.

1.8.3. A ciklotron

Ernest Lawrence 1930-ban alkotta meg a ciklotront. A ciklotron két darab D alakú fémdobozból áll, amit homogén mágneses térbe helyezünk, és váltakozó feszültséget kapcsolunk közéjük (4. ábra). Ezzel tudunk gyorsítani "tetszőlegesen" egy részecskét, amelyet akár ütköztethetünk is később.

Egy részecske körülfutási ideje nem függ a részecske energiájától vagy sebességétől:

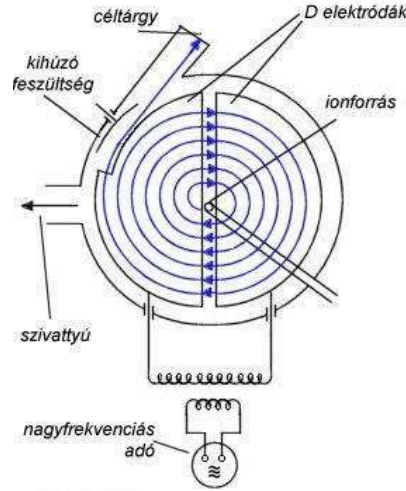
$$T = \frac{2\pi m}{qB},$$

a részecske legnagyobb (vég)sebessége:

$$v_{max} = \frac{qBr_{max}}{m},$$

a részecske végenergiája pedig:

$$W = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}\frac{r_{max}^2 q^2 B^2}{m}.$$



4. ábra.

1.9. Analitikus mechanika

Az eddig tárgyalt vektormechanikának a hátránya, hogy minden egyes tömegpontra meg kell határoznunk az összes rá ható erőt, hogy megoldhassuk a Newton mozgásegyenletet.

Az analitikus mechanika ezzel szemben jóval "erősebb" leírása a klasszikus fizikának.

Először is induljunk ki a vektor mechanikából (nem relativisztikus eset):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}.$$

Tegyük fel, hogy a mozgások konzervatívak, tehát $\mathbf{F}$ -hez tartozik egy potenciál, illetve

$$E_{\text{össz}} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}(t) + U_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = \text{állandó}.$$

Vezessük be a konfigurációs tér fogalmát. A konfigurációs tér mindig a rendszer szabadsági fokával megegyező számú általános koordinátákkal jellemzett absztrakt tér. Ezeket $(q_1, q_2, \dots, q_f)$ -fel jelöljük, ahol f a rendszer szabadsági foka. Ezek időbeli deriváltja az általános sebességkoordináták.

Az analitikus mechanikához vezessünk be további két új fogalmat:

- Lagrange-függvény
- Hatás

A Lagrange-függvény nem más, mint a kinetikus és potenciális energiák különbsége, tehát

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}.$$

A kinetikus energia függhet az általános hely- és sebességkoordinátáktól, a potenciális energia azonban csak a helykoordinátáktól függ.

A hatás a Lagrange-függvény idő szerinti integrálja:

$$S[\mathbf{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

A test tényleges pályáján a hatás minimális, esetleg maximális, de mindenképpen szélsőérték, tehát

$$\delta S[\mathbf{r}(t)] = 0.$$

Ezt nevezik Hamilton-elvnek, vagy másnéven a legkisebb hatás elvének.

Ennek a problémának a megoldása az Euler-Lagrange egyenletek, amelyek a következők:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Ezeket hívjuk Lagrange-mozgásegyenleteknek.

1.9.1. Hamilton variációs elv és Newton mozgástörvény kapcsolata

A fentiekben bemutatott módszerek is ugyanarra a mozgásegyenlet(ek)re vezet(nek) vissza, még pedig a Newton-egyenlet(ek)re.

Tegyük fel, hogy az erőtér egy $U(\mathbf{r}(t))$ potenciállal leírható, és tegyük fel, hogy a kinetikus energia csak az általános sebességkoordinátáktól függ. Ekkor a Newton mozgásegyenlet a következő:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -gradU.$$

Az $\mathbf{r}(t)$ vektort jellemezzük $(q_1, q_2, \dots, q_f)$ általános koordinátákkal. Nézzük az alábbi kifejezést:

$$\frac{d}{dt} m\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^2}{\partial \dot{\mathbf{r}}}.$$

Ebből pedig láthatjuk, hogy ez a Lagrange-függvény idő és általános sebességvektor szerinti deriváltja. A $gradU$ pedig a Lagrange-függvény általános helyvektor szerinti deriváltja (azaz a potenciális energia), hiszen a kinetikus energia a feltételezésünk miatt nem függ a helykoordinátáktól. Ezzel pedig, ha rendezzük az egyenletet a következőt kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0,$$

amiből pedig L a következő:

$$L = m\dot{\mathbf{r}} - gradU = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^2}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - gradU.$$

Ezzel pedig beláttuk, hogy a Newton egyenletek megegyeznek az Euler-Lagrange mozgásegyenletekkel.

1.9.2. Általánosított lendület és a Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenletek

Az általánosított hely- és sebességekordináták mellett felírhatjuk az általános lendületkoordinátákat is, a következőképpen:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

A Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenletekhez előbb definiáljuk a Hamilton-függvényt:

$$H(q_i, p_i) = \sum \dot{q}_i p_i - L,$$

ahol L a Lagrange-függvény.

Ebből felírhatjuk a Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenleteket, amelyek a következők:

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial p_i}.\end{aligned}$$

Ezek alapján elmondhatjuk, hogy a rendszerhez felírhatunk 2f darab, elsőrendű közönséges differenciálegyenletet is, amelyeket, ha megoldunk, már "mindent" tudunk a rendszerről.

Fontos megjegyezni, hogy az analitikus mechanika kétféle mozgásegyenletei (Hamilton-féle kanonikus egyenletek, Lagrange-egyenletek) és a vektormechanika Newton mozgásegyenlete(i) teljes mértékben ekvivalensek, és egymásba átalakíthatóak azonos átalakításokkal.

1.9.3. Analitikus mechanika példák

Tegyük fel, hogy van egy l hosszúságú nyújthatatlan fonalunk, amelynek végén egy m tömeg lóg. Ekkor az általános koordináta legyen az inga és a vízszintes tengely által bezárt szög (φ). Ehhez írjuk fel a kinetikus energiát

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2,$$

és a potenciális energiát

$$E_{pot} = mgl(1 - \cos\varphi).$$

Ebből felírható a Lagrange-függvény is:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos\varphi).$$

Határozzuk meg az általános lendületkoordinátát:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}.$$

Innentől pedig felírhatjuk a Hamilton-függvényt:

$$H(q_i, p_i) = ml^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = \frac{\dot{\varphi}p}{2} + mgl(1 - \cos\varphi).$$

Ebből pedig a Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = mgl(-\sin\varphi) \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\dot{\varphi}}{2}.\end{aligned}$$

Ezzel levezettük a síkinga Hamilton-féle kanonikus mozgásegyenleteit.

Vegyünk egy, az előzőhöz hasonló síkingát, de most egy l_0 kezdeti nyújtottságú gumiszálra lógjon az m tömeg. Ekkor a rendszer szabadsági foka kettő, szögelfordulás (φ), és az inga megnyúlása (l). Ekkor felírhatjuk a potenciális energiát, ami a fonálban, mint "rugóban" tárolt potenciális energia

$$E_{pot,r} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2,$$

és a nehézségi erőből származó

$$E_{pot,n} = mg(h + l_0 - l\cos\varphi)$$

potenciális energiák összege, és h az ingára lógatott test nyugalmi állapotban mért távolsága a földtől.

A kinetikus energiák pedig a következőképpen alakulnak:

$$E_{kin,r} = \frac{1}{2}m\dot{l}^2,$$

illetve

$$E_{kin,n} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2.$$

Ebből felírhatjuk a Lagrange-függvényt:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2) + mg(l\cos\varphi - l_0 - h) - \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{m}{2}(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2) + mgl\cos\varphi - \frac{1}{2}kl^2 + kll_0.$$

A fenti egyenlet jobb oldalán a konstans tagokat elhanyagoltuk, hiszen az Euler-Lagrange egyenletek felírásakor a deriválás miatt amúgy is eltűnnek.

Írjuk fel az Euler-Lagrange egyenleteket:

$$\begin{aligned}\ddot{l} + \left(\frac{k}{m} - \dot{\varphi}^2\right)l - \left(g\cos\varphi + \frac{kl_0}{m}\right) &= 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Ezzel megkaptuk az inga mozgásegyenleteit.

2. Klasszikus elektrodinamika

A klasszikus elektrodinamika kiterjeszti a klasszikus fizika alapjait, de ehhez előbb néhány matematikai alapfogalommal kell tisztában lennünk.

2.1. Matematikai bevezető

Mindenek előtt a fejezet egyik legfontosabb operátorát definiáljuk, a nablát (∇):

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

2.1.1. Skalár-vektor függvény, gradiens, rotáció

A skalár-vektor függvény, más néven skalár tér a geometriai tér (és idő) minden pontjához egy skalárt (számot) rendel. Példaként képzeljük el egy szoba hőmérsékletét vagy egy test sűrűségét. Az azonos skalárszámú felületeket ekvipotenciálisnak nevezzük.

Skalár tér gradiensét úgy képezzük, hogy vesszük a tér minden koordináta szerinti parciális deriváltját, és ezeket elhelyezzük egy vektorba. Fontos megjegyezni, hogy a skalár tér gradiens mindig egy vektor-vektor függvény lesz.

A skalár tér gradiensének egy fontos tulajdonsága, hogy rotáció-, azaz örvénymentes, ami annyit jelent, hogy a térben bármely zárt görbére vett vonalintegrál értéke zérus.

A rotációt egy $\mathbf{F}$ erőterre $\text{rot}\mathbf{F}$ -fel jelöljük, és amennyiben $\mathbf{F}$ előáll egy f függvény gradienseként, úgy $\mathbf{F}$ biztos, hogy rotációmentes a fentiek értelmében, és f -et potenciálnak, pontosabban skalárpotenciálnak nevezzük.

A fentiekből tehát általánosan felírható, hogy

$$\text{rot}(\text{grad}\mathbf{F}) = 0.$$

Az utolsó összefüggés általánosítása a Poincaré-lemma.

2.1.2. Vektor-vektor függvény, divergencia, rotáció

Az előző fejezetben bemutatott vektor-vektor függvényt úgy jellemezhetjük, hogy a konfigurációs tér egy-egy pontjához (vektorához) egy-egy vektor tartozik, tehát egy vektorhoz vektort rendel. Példaként elképzelhetünk elektromos vagy épp mágneses (esetleg mindkettő) teret, ahol az erőteret minden pontban egy vektorral jellemezhetjük.

Az előbbieken említett rotációképzés nem más, mint a vektor-vektor függvény és a ∇ operátor külső (kereszt), vagy más néven vektoriális szorzata:

$$\text{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}.$$

Az előzőhöz "hasznos", vektoranalitikai "eszköz" a divergenciaképzés. A divergencia megadja egy vektor tér forrásosságát, tehát azt, hogy vannak-e a térnek olyan pontjai, amelyekből az erővonalak kiindulnak (source) vagy elnyelődnek (sink).

Amennyiben egy vektor tér előállítható egy vektor-vektor függvény rotációjaként, úgy az utóbbi függvényt vektorpotenciálnak nevezzük, az előállított vektor térre pedig mindig igaz, hogy ennek divergenciája zérus, azaz

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = \langle \nabla, \nabla \times \mathbf{F} \rangle = 0.$$

Ez is a Poincaré-lemma egy speciális esete.

2.1.3. Gauss-Osztrogradszkij és Stokes-tétel

Általánosan elmondható, hogy mind a Gauss-Osztrogradszkij, mind a Stokes-tétel az általános Stokes-tétel következménye, de nekünk itt elég ezt a két speciális esetet vizsgálni.

A Gauss-Osztrogradszkij-tétel kimondja, hogy egy vektor-vektor függvény zárt felületre vett integrálja megegyezik a vektor tér divergenciájának zárt felület által közrezárt térfogatra vett integráljával. Ezt szokás fluxusnak is nevezni.

$$\Phi = \oint_A \mathbf{F} d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{F} dV.$$

Amennyiben a fluxus pozitív, úgy a zárt térrészben forrás van, amennyiben negatív, úgy a zárt térrészben nyelő van, amennyiben pedig zérus, úgy nincs se forrás, se nyelő a zárt térrészben.

A Stokes-tétel pedig kimondja, hogy egy vektor-vektor függvény zárt görbe mentén vett integrálja megegyezik a vektor tér rotációjának zárt görbére kifesztett felületen vett integráljával.

$$\oint_L \mathbf{F} d\mathbf{L} = \int_A \operatorname{rot}\mathbf{F} d\mathbf{A}.$$

Ezen két tétel jelentősége a Maxwell-egyenletek bevezetése után lesz látható.

2.1.4. Koordináta-transzformáció

A fizikai problémák esetében előfordulhat, hogy a probléma megoldását jelentősen könnyíti, ha a "megszokott" Descartes-koordinátákról áttérünk más koordinátákra.

Ezesetben azonban figyelniük kell, hogy hogy térünk át, ugyanis a külső- és belsőszorzat, rotáció, divergencia, illetve gradiens képzése jelentősen eltér a különböző koordinátarendszerekben, és az integrálásnál is figyelni kell a transzformáció Jacobi-determinánsával való beszorzásra.

Vegyünk a "szokásos" háromdimenziós teret. Ekkor egy helyvektort az általános koordinátarendszerben felírhatjuk a következőképpen:

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3.$$

Ebből $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ egységvektorok felírhatók:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} \right|}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2} \right|}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_3}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_3} \right|}$$

alakban.

Ekkor a $d\mathbf{r}$ vektort a következőképpen definiáljuk

$$d\mathbf{r} = g_1 dx_1 \mathbf{e}_1 + g_2 dx_2 \mathbf{e}_2 + g_3 dx_3 \mathbf{e}_3,$$

ennek hossza pedig:

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{g_1^2 dx_1^2 + g_2^2 dx_2^2 + g_3^2 dx_3^2},$$

ahol g_1, g_2 és g_3 az adott koordinátarendszerre jellemző metrika.

Adottak a következő függvények: $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(x_1, x_2, x_3)$ és $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(a_1, a_2, a_3)$, ahol $a_i(\mathbf{r}) = (x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$. A gradiens, divergencia, rotáció képzése a következőképpen néz ki általános koordinátákkal:

$$\begin{aligned} \text{grad}\Psi(\mathbf{r}) &= \nabla\Psi = \frac{1}{g_1} \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{g_2} \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{g_3} \frac{\partial\Psi}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \\ \text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \langle \nabla, \mathbf{A}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial g_2 g_3}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial g_1 g_3}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial g_1 g_2}{\partial x_3} a_3 \right) \\ \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{e}_1}{g_2 g_3} & \frac{\mathbf{e}_2}{g_1 g_3} & \frac{\mathbf{e}_3}{g_1 g_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ g_1 a_1 & g_2 a_2 & g_3 a_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Az alábbiakban a két fő koordinátarendszer közötti áttéréseket, illetve számolásokat vizsgáljuk (Descartes $\Leftrightarrow$ Gömbi).

Először is nézzük a koordinátatranszformációkat

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta, \end{aligned}$$

ahol r a helyvektor nagysága, ϑ a vektor z tengellyel bezárt szöge, míg φ a helyvektor xy síkra vett vetületének x tengellyel bezárt szöge.

Az inverz transzformáció pedig:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\vartheta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Gömbi koordinátákban az egységvektorok: $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_\vartheta$.

Tegyük fel, hogy adottak a fent definiált $\mathbf{A}$ és Ψ függvények. Descartes-koordinátarendszerben a következőképpen definiáljuk a divergencia-, rotáció- és gradiensképzést:

$$\text{grad}\Psi(\mathbf{r}) = \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\mathbf{i} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\mathbf{j} + \frac{\partial\Psi}{\partial x_3}\mathbf{k}$$

$$\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

$$\text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Most pedig tekintsük ugyanezeket a függvényeket, csak most gömbi koordinátarendszerben:

$$\text{grad}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta}\mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 a_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta a_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}.$$

$$\text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \frac{e_r}{r^2\sin\vartheta} & \frac{e_\vartheta}{r\sin\vartheta} & \frac{e_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & ra_2 & r\sin\vartheta a_3 \end{vmatrix}$$

Ebből tehát megállapíthatjuk, hogy Descartes-koordináták esetén a metrika

$$g_1 = g_2 = g_3 = 1,$$

míg gömbi koordináták esetén

$$g_1 = 1$$

$$g_2 = r$$

$$g_3 = r\sin\vartheta.$$

2.2. Maxwell-egyenletek

A klasszikus elektrodinamika legfontosabb egyenleteit James Clerk Maxwell publikálta 1865-ben. Einstein szerint Newton óta a legtermékenyebb fizikus volt Maxwell, aki az elektrodinamika mellett a statisztikus fizika területén is kiemelkedőt alkotott.

2.2.1. I. Maxwell-egyenlet

Mindig és mindenütt azt tapasztaljuk, hogy az áramsűrűség és az eltolási áram maga körül mágneses örvényeket gerjeszt. Ennek integrális alakja a következő:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_A \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A}.$$

Tehát egy adott zárt görbe mentén a mágneses térerősség megegyezik az efölé a görbe fölé kifeszített, tetszőleges felületen áthaladó áramsűrűség vektorok és eltolási áram vektorok időegységenkénti megváltozásának összegével. Az eltolási áram vektor a nyílt (például a kondenzátort tartalmazó) áramkörök esetében jelentős, hiszen itt az egyszerű áramsűrűség vektor nem magyarázza az áramkör "tökéletes" működését.

Ennek felírható lokális, azaz differenciális alakja is. Felhasználva az előbbieken ismertett Stokes-tételt a törvény a következő alakot ölti:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H}.$$

A törvényt szokás Ampere-törvénynek is nevezni.

2.2.2. II. Maxwell-egyenlet

Mindig és mindenütt azt tapasztaljuk, hogy az időben változó mágneses tér (mágneses indukció) maga körül az elektromos térerősség örvényeit generálja. Integrális alakban:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A}.$$

Azaz elmondható, hogy egy adott zárt görbe mentén az elektromos térerősség megegyezik az efölé a görbe fölé kifeszített, tetszőleges felületen áthaladó mágneses indukcióvektorok időbeli deriváltjának (-1)-szeresével. Ez csupán a Faraday-féle indukciótörvény átírt alakja, mely kimondja, hogy ha bármely vezető által körülfogott fluxus az időben változik, akkor ebben a vezetékben a fluxusváltozással arányos feszültség keletkezik. Ezért szokás Faraday-törvénynek is nevezni.

Az előző törvényhez hasonlóan ez is felírható differenciális alakban a Stokes-féle integrál-transzformáció felhasználásával:

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}.$$

A előző törvénytől való eltérés az, hogy az elektromos térerősség örvényei a mágneses indukcióvektorokkal balsodrású rendszert, míg az áramsűrűség, az eltolási áramvektor idő szerinti deriváltja és az ezek körüli mágneses térerősség örvényei jobbsodrású rendszert alkotnak.

2.2.3. III. Maxwell-egyenlet

Mindig és mindenütt azt tapasztaljuk, hogy a mágneses indukcióvektoroknak nincsenek forrásaik, azaz

$$\oint_A \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0.$$

Az eddigiekhez hasonlóan a törvény most is felírható differenciális alakban, ha felhasználjuk a korábban ismertetett Gauss-Osztrogradszkij-féle integráltranszformációs tételt:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 = \langle \nabla, \mathbf{B} \rangle.$$

2.2.4. IV. Maxwell egyenlet

Mindig és mindenütt azt tapasztaljuk, hogy az elektromos eltolási vektor "forrásai" az elektromos töltések.

$$\oint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = \sum_i Q_i = \int_V \rho dV.$$

Tehát egy adott zárt felületen áthaladó elektromos eltolási vektorok összessége megegyezik a zárt felület által közrezárt térrészben lévő töltés összességével. Másképpen ezt fluxusnak is nevezhetjük.

A törvény lokális alakja a Gauss-tétel felhasználásával:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho = \langle \nabla, \mathbf{D} \rangle.$$

A III. és IV. törvényt "kiegészítő" törvényeknek is szokás hívni, bár ezek is a Maxwell-egyenletekhez tartoznak. Azért kiegészítő törvények, mert a II. törvénynek, ha képezzük a divergenciáját, akkor a Poincaré-lemma szerint a divergenciája a rotációnak azonosan zérus, így megkapjuk a $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ egyenletet. Az I. törvénynek pedig szintén a divergenciaképzéssel kapjuk egy folytonossági egyenletből a $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ összefüggést.

2.2.5. Eltolási áram és az elektromos térerősség kapcsolata

A Maxwell-egyenletekben észrevehetjük, hogy az elektromágneses tér egyik "összetevőjét", az elektromos teret két vektorral tudjuk leírni. Az elektromos térerősség ($\mathbf{E}$) és eltolási áram ($\mathbf{D}$) vektorokkal.

Az elsőre talán távol álló leírási módokon azonban jelentősen egyszerűsít az alábbi egyenlet, amely megmutatja a két jellemző közötti összefüggést:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (8)$$

A kifejezés ebben a formájában a legáltalánosabb, de mielőtt ezt tárgyalnánk, tekintsük a lehető legegyszerűbb esetet, amikor az elektromos teret vákuumban tekintjük.

Ekkor a kifejezés a következőre egyszerűsödik:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E},$$

ahol ε_0 a vákuum permittivitása, és

$$\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}.$$

Amennyiben kicsit "bonyolultabb" közeget veszünk, de még mindig egyszerű közegről beszélünk (ezt egyszerű közegnek is hívják), úgy a vákuumra értendő kifejezésben szereplő ε_0 -t meg kell szoroznunk még a közegre jellemző, vákuumhoz viszonyított relatív permittivitással, tehát

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},$$

ahol

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_{rel}.$$

Most tegyük fel, hogy egy teljesen általános esetben vagyunk, ekkor a (8) egyenlet írja le egzaktul az eltolási áram és az elektromos térerősség kapcsolatát. Az egyenletben szereplő $\mathbf{P}$ vektor az adott anyag polarizációs vektora. Vegyünk egy általános közeget V térfogattal. Legyen A a közeg egy pontja, és legyen ΔV az ekörüli elemi térfogat. Továbbá legyen $\mathbf{p}$, az ezen a ΔV térfogatban foglalt molekulák dipólus nyomatékának eredője, akkor az A pontban a polarizációvektor definíció szerint

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V}.$$

A polarizációvektor mértékegysége: $[\mathbf{P}] = \frac{As}{m^2}$.

Első megközelítésben a lineáris anyagegyenlet igaz, vagyis $\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}$, ahol χ egy dimenzió nélküli szám, neve dielektromos szuszceptibilitás. Vákuumban, illetve vezetőben $\chi = 0$, szigetelőanyagban $\chi > 0$.

2.2.6. A mágneses térerősség és indukcióvektor kapcsolata

Az elektromos térhez hasonlóan a mágneses teret is két vektorral írhatjuk le, a mágneses térerősség ($\mathbf{H}$) és indukció ($\mathbf{B}$) vektorokkal.

A közegekre vonatkozó összefüggés e két leírási mód között hasonlít az elektromos teréhez, így általános esetben a következőképpen néz ki:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{M}. \quad (9)$$

Hasonlóan az előző fejezetben tárgyalt módhoz, most is a legegyszerűbbtől fogjuk "felépíteni" az általánosig az összefüggést.

Vákuumban a kifejezés - hasonlóan az elektromos tér esetéhez - csupán egy konstanssal való szorzásra redukálódik a jobb oldalon

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

ahol μ_0 a vákuum permeabilitása, és

$$\mu_0 = 1.256 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}.$$

Amennyiben egyszerű közegeket tekintünk, úgy a kifejezésben a vákuum permeabilitását meg kell szoroznunk - ugyancsak hasonló módon az elektromos térhez - egy relatív permeabilitással, ami az adott közegre jellemző, tehát

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

ahol

$$\mu = \mu_0 \mu_{rel}.$$

Most tekintsük a legáltalánosabb esetet, amikor a (9) összefüggés lesz igaz a mágneses indukcióvektor és az elektromos térerősség közötti kapcsolatra. Az egyenlet $\mathbf{M}$ vektora az anyagra jellemző mágnesezettség vektor. A polarizációs vektornál megismeretett körülményeket feltételezve a mágnesezettség vektorának értéke egy A pontban definíció szerint

$$\mathbf{M}(A) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V},$$

ahol $\mathbf{m}$ az adott ΔV térfogatban a mágneses dipólnyomatékok vektori összege (másképpen eredője). Tehát mérőszámként ez megadja az egységnyi térfogatra jutó mágneses dipólnyomatékot. Mértékegysége: $[\mathbf{M}] = \frac{A}{m}$.

A mértékegység talán egy kicsit zavaró lehet, de az ellentmondás feloldása az, hogy a mágneses térerősséget a következőképpen definiáljuk:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M},$$

amiből egyenletrendezéssel megkapjuk ugyan (9) egyenletet, de amit mi ott $\mathbf{M}$ -nek hívtunk, az egy konstansszorosa annak, amit mi az előbbiekből levezettünk, még pedig μ_0 -szorosa.

2.2.7. Elektro- illetve magnetosztatika

Sztatikus esetről beszélünk, ha sem a mágneses, sem az elektromos tér nem változik az időben, tehát $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$, illetve, ha nem folyik áram, tehát $\mathbf{J} = 0$. Ebben az esetben a négy Maxwell-egyenlet a következőképpen módosul:

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

$$\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\langle \nabla, \mathbf{D} \rangle = \rho.$$

Az első két egyenlet a magnetosztatikára, míg a második kettő az elektrosztatikára vonatkozik. Az elektromos térerősség és eltolási áram vektor, illetve mágneses térerősség és indukció vektorok közötti összefüggések változatlanok.

A fenti négy egyenletből megállapíthatjuk, hogy statikus esetben semmilyen kapcsolat nincs a mágneses és elektromos terek között.

2.2.8. Stacionárius terek

A stacionárius terek már egy fokkal "komplikáltabbak", mint a sztatikusak. Időbeni változás még itt sincs, azonban van töltésmozgás, tehát folyik az áram, vagyis $\mathbf{J} \neq 0$.

Ebben az esetben a Maxwell-egyenletek alakjai

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} \\ \langle \nabla, \mathbf{B} \rangle &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \\ \langle \nabla, \mathbf{D} \rangle &= \rho.\end{aligned}$$

A térerősségek és eltolási áram, illetve indukció vektor közötti összefüggések továbbra is változatlanok. Azonban ebben az esetben már be kell vezetnünk egy újabb összefüggést, mégpedig az áramsűrűség vektorra:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{gen}),$$

ahol $\mathbf{E}_{gen}$ a generátorokban tárolt elektromos térerősség, míg σ a fajlagos vezetőképesség, másnéven konduktivitás. Mértékegysége: $[\sigma] = \frac{A}{Vm}$. Ezt nevezik differenciális Ohm-törvénynek.

Az Ohm-törvény arról szól, hogy egy vezetőben az áramsűrűség és az elektromos térerősség egyenesen arányos egymással. Érvényességéről fontos megjegyezni, hogy korlátozott, ugyanis ha nő az áramsűrűség, akkor a hőmérséklet is, és lecsökken a fajlagos vezetőképesség, tehát σ csak akkor lesz független $\mathbf{J}$ -től, ha a hőmérséklet állandó. Néhány anyagra (pl. félvezető diódák) azonban még állandó hőmérsékleten sem igaz, sőt néhány anyag vezetőképessége hűtésre egy meghatározott hőmérséklet alatt végtelenné válik, ekkor nem szükséges térerősség sem ahhoz, hogy áram folyjon. Ezt szupravezetésnek hívjuk.

Az Ohm-törvényben szerepel továbbá a generátorok által keltett "ideigen" tér is, ez az $\mathbf{E}_{gen}$.

2.3. Inverz-problémák

Adott töltéselrendezésből skalárpotenciál bevezetésével határozható meg az elektrosztatikus erőter. Ezt a 2.1.1 fejezetben megismertett skalárpotenciál segítségével tehetjük meg.

Tegyük fel, hogy a közegünk "egyszerű", vagyis

$$\mathbf{D} = (\varepsilon_0 + \kappa)\mathbf{E} = \varepsilon_0\varepsilon_{rel}\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}.$$

Induljunk ki a IV. Maxwell-egyenletből, vagyis

$$\langle \nabla, \mathbf{D} \rangle = \rho.$$

Használjuk fel a 2.1.1 fejezetben ismertetett Poincaré-lemmát (hiszen az egyszerű közegre vonatkozó II. Maxwell egyenlet következménye, hogy az elektromos tér rotációmentes), továbbá írjuk át az előző egyenletet úgy, hogy $\mathbf{E}$ szerepeljen benne és ne $\mathbf{D}$. Ezután pedig helyettesítünk be a skalárpotenciál negatív gradiensét ide:

$$-\langle \nabla, \nabla U \rangle = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

ahol U a skalárpotenciál.

Ekkor tudjuk, hogy $\nabla^2 = \Delta$, tehát kapunk egy Poisson-egyenletet:

$$\Delta U(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon}.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Ezzel megadtuk a töltésekből a skalár potenciált. A térerősséget a következőképpen lehet meghatározni a potenciálból:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}^0}{r^2} dV',$$

ahol az $\mathbf{r}^0$ vektor az adott $\mathbf{r}$ helyvektorú pontból az $\mathbf{r}'$ helyvektorú pont felé mutató egységnyi hosszúságú vektor, r^2 pedig a két pont távolságának négyzete.

Az előbbiekben megismertük a sztatikus elektromos térerőre vonatkozó inverz-problémát, azonban a stacionárius mágneses térnek is van inverz-problémája. Mágneses térre vonatkozó inverz probléma esetén egy adott $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ vektorból szeretnénk meghatározni $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ -t, tehát stacionárius térben az áramok adottak, és a mágneses teret (pontosabban ezek örvényeit) határozzuk meg.

Továbbra is "egyszerű" közegeket tekintsünk, vagyis

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},$$

illetve

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H},$$

ahol $\mu = \mu_0\mu_{rel}$.

Induljunk ki a I. Maxwell-egyenletből

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

Használjuk fel a **2.1.2**-ben ismertetett Poincaré-lemmát, miszerint tudjuk, hogy $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ előáll egy $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektorpotenciál rotációjaként (a mágneses tér forrásmentességének következmény). Majd az előbbi Maxwell-egyenletet írjuk át, hogy $\mathbf{B}$ szerepeljen benne $\mathbf{H}$ helyett, ezután pedig - az átírt - egyenletbe helyettesítjük be a vektorpotenciál rotációját, azaz azt kaptuk, hogy

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A} = \mu\mathbf{J},$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A},$$

és $\nabla \langle \nabla, \mathbf{A} \rangle = 0$ választással éltünk, amely az általánosságot nem szorítja meg, hiszen $\mathbf{A}$ -nak csak a rotációjára vagyunk kíváncsiak, ám ez nem határozza meg egyértelműen vektorpotenciált.

Ebben az esetben pedig a $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ -ből $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ meghatározható:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} dV'.$$

Az előző egyenletből pedig már $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ egy egyszerű rotáció képzéssel megkapható:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (10)$$

2.3.1. Coulomb-törvény

Tekintsünk egy pontszerű töltést, azaz

$$Q = \int_V \rho dV.$$

Ennek erőtere:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{r}^0}{r^2} dV' = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{r}^0$$

Tehát a q töltésre ható erő:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{r}^0.$$

Ez pedig a jól ismert *Coulomb*-törvény, amelyet szokás a potenciál és az elektromos tér "szuperpozíciójának" törvényeként is emlegetni.

2.3.2. Biot-Savart törvény

Amennyiben a (10) egyenletet egy kicsit még alakítjuk

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dAd\mathbf{l} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \nabla \times \frac{1}{r} d\mathbf{l} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0}{r^2}$$

és végeredményt pedig leosztjuk μ -vel, megkapjuk a Biot-Savart törvényt. A törvényt vonalszerű áramok által keltett mágneses térerősség meghatározására használhatjuk, ahol a keresztmetszet elhanyagolható a vezeték hosszához viszonyítva.

2.4. Kirchhoff-törvények

Stacionárius (egyenáramú) áramkörökben igaz Kirchhoff-törvényeket levezethetjük a Maxwell-egyenletekből is.

2.4.1. I. Kirchhoff-törvény

A törvény kimondja, hogy egy adott csomópontban érvényesül a töltésmegmaradás elve, azaz a befolyó és kifolyó áramok előjeles összege zérus. Kirchhoff I. törvényét szokás csomóponti potenciálok törvényének is nevezni.

Induljunk ki az I. és IV.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \langle \nabla, \mathbf{D} \rangle &= \rho\end{aligned}$$

Maxwell-egyenletekből. A Poincaré-lemmát felhasználva tudjuk, hogyha képezzük az I. egyenlet divergenciáját, akkor nullát kapunk, azaz

$$\langle \nabla, \nabla \times \mathbf{H} \rangle = \langle \nabla, \mathbf{J} \rangle + \langle \nabla, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rangle = 0.$$

Az utolsó egyenletbe behelyettesítve IV. Maxwell-egyenletet azt kapjuk, hogy

$$\langle \nabla, \mathbf{J} \rangle + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle \nabla, \mathbf{J} \rangle = 0,$$

hiszen a töltéssűrűség nem változik az időben a stacioner körülmények miatt. Ekkor felhasználva a Gauss-Osztrogradszkij tételt azt kapjuk, hogy

$$\oint_A \mathbf{J} d\mathbf{A} = \sum_k I_k = 0.$$

2.4.2. II. Kirchhoff-törvény

A törvény kimondja, hogy egy zárt hurok mentén a feszültségesések összege zérus. Szokás hurokáramok törvényének is nevezni.

Induljunk ki a II. Maxwell-egyenletből:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

amit átírhatunk a Stokes-tétel segítségével az alábbi formára:

$$\int_A \nabla \times \mathbf{E} d\mathbf{A} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0,$$

illetve a

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{gen})$$

egyenletekből. Rendezzük át az utolsó egyenletet $\mathbf{E}$ -re:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{E}_{gen},$$

majd ezt helyettesítsük be a(z átírt) Maxwell-egyenlet jobb oldalába

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \oint_L \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \mathbf{E}_{gen} \right) d\mathbf{l} = 0.$$

Alakítsuk át az utolsó egyenletet úgy, hogy az integrandusban az első tagot szorozzuk eggyel a következőképp:

$$\oint_L \left(\frac{\mathbf{J}A}{A\sigma} - \mathbf{E}_{gen} \right) d\mathbf{l} = I \oint_L \frac{1}{A\sigma} d\mathbf{l} - \oint_L \mathbf{E}_{gen} d\mathbf{l} = 0,$$

amit pedig, ha egy általános hálózat tetszés szerinti zárt körére veszünk, akkor Kirchhoff II. törvényére jutunk:

$$\sum_k I_k R_{ik} - \sum_k U_{gen_k} = 0.$$

Az utolsó egyenletet átrendezve megkapjuk a k . indexű tagra vonatkozó klasszikus Ohm-törvényt, hiszen a k . indexű generátor által szolgáltatott villamos térerősség vonalmenti integrálja megegyezik a hálózatba juttatott külső potenciál értékével.

Az integrális alakban szereplő $\frac{1}{A\sigma}$ kifejezés tehát ellenállás (Ω) dimenziójú.

2.5. Mozgó, pontszerű töltések elektromágneses tere

A valóságban az elektromágneses tér létrehozói a töltések és az áramok. Általuk közeli és távoli elektromágneses tér jöhet létre, ám fontos különbség e két tér között, hogy a közeli nagysága $\frac{1}{r^2}$ -esen, míg a távolié $\frac{1}{r}$ -rel csökken.

Sztatikus töltéseknek csak közeli elektromos, sztatikus áramoknak csak közeli mágneses tere van.

2.5.1. Állandó sebességgel mozgó töltés

Adott egy töltés, amely állandó sebességgel mozog ($\mathbf{v}$ = állandó, akár zérus). Ekkor a töltésnek csak közeli elektromos és mágneses tere van.

A $\rho(\mathbf{r}, t)$ töltéssűrűség-függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_q t),$$

ahol *delta* egy háromdimenziós Dirac-delta függvény. Ez esetben a elektromágneses teret leíró elektromos térerősség és mágneses indukcióvektorok a következőképpen számolhatók:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|^3}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0}{r^2}.$$

Amennyiben a töltés álló helyzetben van, úgy megkapjuk a már jól ismert Coulomb-törvényt, illetve azt, hogy álló töltés körül nincsenek mágneses indukcióvonalak, ugyanis a mágneses tér örvényeit az áram, vagyis a mozgó töltés hozza létre.

2.5.2. Gyorsuló töltés

A gyorsuló töltésnek a közeli téren kívül van egy másik, úgynevezett távoli vagy sugárzó tere is. Ez esetben a vektorpotenciál a következőképpen néz ki

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r} \dot{\mathbf{r}}_q \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

Ebből kiszámolhatjuk a mágneses és elektromos térerősség vektorait:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{4\pi} \frac{q}{r} \left(\ddot{\mathbf{r}}_q \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r}_0 \right) \\ \mathbf{E} &= \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \left(\ddot{\mathbf{r}}_q \left(t - \frac{r}{c} \right) \times \mathbf{r}_0 \right) \times \mathbf{r}_0. \end{aligned}$$

Jól látható, hogy amennyiben a gyorsulás zérus, azaz a töltés sebessége állandó, úgy mind az elektromos, mind a mágneses térerősség is zérus.

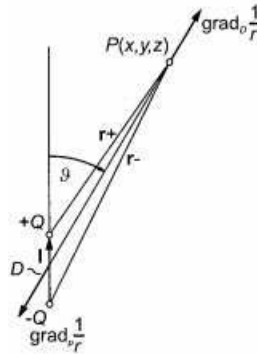
A mágneses és elektromos tér egymásra merőleges, és mindkettő nagysága arányos a töltéstől való távolság reciprokával.

2.6. Dipólus és multipólus elektrosztatikus tere

A pontszerű töltés elektrosztatikus tere mellett (amit a Coulomb-törvénnyel meghatározhatunk) a gyakorlatban nagy jelentősége van a dipólusok, illetve multipólusok terének is.

2.6.1. Dipólus

A dipólus két, ellenkező előjelű, azonos nagyságú töltésből áll, melyek nagyon közel vannak egymáshoz.



5. ábra.

Hozzunk egy +Q és egy -Q töltést egymáshoz nagyon közel az 5. ábrán látható módon, akkor a tetszőleges P pontban a potenciálérték a következő:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{r_+} - \frac{Q}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_- + \mathbf{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_-|} \right),$$

ahol $\mathbf{r}_+$ és $\mathbf{r}_-$ a pozitív, illetve negatív töltésből a P pontban mutató vektorok.
A gradiens definíciója szerint

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_- + \mathbf{l}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_-|} \approx \langle \mathbf{l}, \text{grad}_D \frac{1}{r} \rangle,$$

ha az $|\mathbf{l}| \ll |\mathbf{r}|$. A D index azt mutatja, hogy a gradiensképzéskor a D pont koordinátáit kell változóknak tekintenünk. Ezt behelyettesítve a potenciált megadó kifejezésbe:

$$U(P) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \langle \mathbf{l}, \text{grad}_D \frac{1}{r} \rangle.$$

Amennyiben a két pontot nagyon közel visszük egymáshoz, úgy a P pontbeli potenciál értéke zérushoz közelít. Növeljük Q értékét úgy, hogy $Q\mathbf{l} = \mathbf{p}$ szorzat állandó maradjon. A $\mathbf{p}$ és $\mathbf{l}$ vektorok definíció szerint a negatív töltésből a pozitívba mutatnak. Ekkor a potenciál értéke is állandó marad, kiváltképpen a potenciált egyre pontosabban adja meg az utolsó összefüggés.

Tehát a dipólus potenciálja

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \langle \mathbf{p}, \text{grad}_D \frac{1}{r} \rangle.$$

Azonban, ha most nem a dipólus koordinátái szerint differenciálunk, hanem a P pont koordinátái szerint, és a

$$\text{grad}_D \frac{1}{r} = -\text{grad}_P \frac{1}{r}$$

összefüggést figyelembe vesszük, akkor a

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \langle \mathbf{p}, \text{grad}_P \frac{1}{r} \rangle = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}.$$

egyenletre jutunk.

A dipólus potenciálja átírható az

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{r}_0 \rangle}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}.$$

alakra.

A potenciál ezek után negatív gradiensképzéssel egyszerűen meghatározható gömbi koordinátákban:

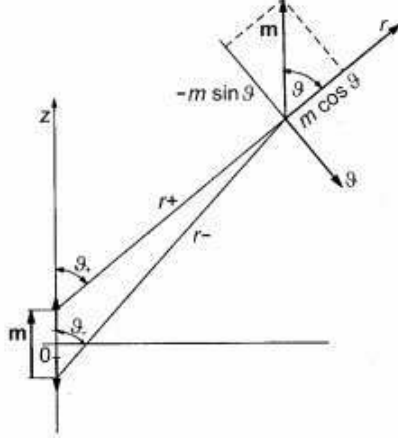
$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{r}_0 \rangle}{r^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^3} \\ E_\vartheta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}|}{r^3} \\ E_\varphi &= 0, \end{aligned}$$

amit felírhatunk vektoregyenletben is:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left\langle \frac{2\langle \mathbf{p}, \mathbf{r}_0 \rangle}{r^3}, \mathbf{r}_0 \right\rangle + \frac{\mathbf{r}_0 \times (\mathbf{r}_0 \times \mathbf{p})}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\left\langle \frac{2\langle \mathbf{p}, \mathbf{r}_0 \rangle}{r^3}, \mathbf{r}_0 \right\rangle - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].$$

2.6.2. Multipólus

Az általános multipólusokon belül a legegyszerűbbek az axiális multipólusok, mi most csak ezekkel fogunk foglalkozni. A dipólust úgy kaptuk meg, hogy két, ellentétes előjelű pontszerű töltéseket, másnéven monopólusokat vagy nulladrendű multipólusokat l -lel eltolunk egymáshoz képest. Vizsgáljuk most meg azt az esetet, ha egy dipólust eltolunk $\mathbf{m}$ vektorral, és ellenkezőleg irányítjuk, és ennek a két dipólusnak figyeljük egyszerre a terét. Ezt az elrendezést hívják egyébként (axiális) kvadrupólusnak, vagy másnéven másodrendű multipólusnak. Az elrendezést a 6. ábra szemlélteti.



6. ábra.

Az első dipólus potenciálját már egyszer meghatároztuk

$$U^{+(1)} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \langle \mathbf{p}, \text{grad}_P \frac{1}{r_+} \rangle = -\frac{lQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_+},$$

ahol $U^{+(1)}$ azt jelöli, hogy ez a referencia iránynak tekintett "pozitív", és elsőrendű monopólus, vagyis dipólus. Azonban a második dipólus potenciálját a

$$U^{-(1)} = \frac{lQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_-}$$

összefüggés adja meg. Az eredő axiális kvadrupólus potenciálja e kettő szuperpozíciója, tehát

$$U^{(2)} = U^{+(1)} + U^{-(1)} = \frac{lQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right).$$

Viszont tudjuk, hogy

$$\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} = -\frac{1}{|\mathbf{r}_- + \mathbf{m}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_-|} \approx -\langle \mathbf{m}, \text{grad}_D \frac{1}{r} \rangle = \langle \mathbf{m}, \text{grad}_P \frac{1}{r} \rangle = m \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r},$$

és ezzel a potenciál értéke a következőképpen változik:

$$U^{(2)} = \frac{lQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r}.$$

Csökkentsük most l és m távolságokat minden határon túl, és közben növeljük Q -t, hogy a $2mlQ = p^{(2)}$ szorzat állandó maradjon. A $p^{(2)}$ momentumú axiális kvadrupólus potenciáljára tehát azt kaptuk, hogy

$$U^{(2)} = \frac{p^{(2)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r}.$$

A kettes szorzó bevonásának célja itt nem látszik, de célszerű és későbbiekben majd világossá válik a szerepe.

Írjuk fel a kvadrupólus potenciálját gömbi koordinátákában is:

$$U^{(2)} = U^{+(1)} + U^{-(1)} = \frac{lQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\cos\vartheta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\vartheta_-}{r_-^2} \right),$$

viszont

$$\frac{\cos\vartheta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\vartheta_-}{r_-^2} \approx -\langle \mathbf{m}, \text{grad}_P \frac{\cos\vartheta}{r^2} \rangle.$$

A $\text{grad}_{\frac{\cos\vartheta}{r^2}}$ komponensei gömbi koordináta-rendszerben

$$\begin{aligned} \text{grad}_r \frac{\cos\vartheta}{r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos\vartheta}{r^2} = -\frac{2\cos\vartheta}{r^3} \\ \text{grad}_\vartheta \frac{\cos\vartheta}{r^2} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\cos\vartheta}{r^2} = -\frac{\sin\vartheta}{r^3} \\ \text{grad}_\varphi \frac{\cos\vartheta}{r^2} &= 0, \end{aligned}$$

míg az $\mathbf{m}$ vektor ugyanebben a koordináta-rendszerben

$$\begin{aligned} m_r &= m \cos\vartheta \\ m_\vartheta &= -m \sin\vartheta \\ m_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

alakot ölti. Ebből pedig felírhatjuk a potenciált a gömbi koordinátarendszerben:

$$U^{(2)} = \frac{mlQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{r^3} \left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3} \right) = \frac{p^{(2)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2r^3} \left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3} \right).$$

Most, hogy megállapítottuk a másodrendű multipólust, minden adott, hogy egy n -ed rendű, axiális multipólus potenciálját meghatározzuk. Az előbbiek értelmében tehát két ellenkező előjellel vett kvadrupólusból kapjuk az oktopólust. Ennek potenciálját Descartes-koordinátákkal

$$U^{(3)} = -\frac{p^{(3)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \frac{1}{r},$$

míg gömbi koordinátákkal

$$U^{(3)} = \frac{p^{(3)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^4} (5\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta),$$

ahol $p^{(3)} = 3p^{(2)}m_3$, és $p^{(2)}$ azon kvadrupólusok nyomatóka, amelyek egymástól m_3 távolságra való eltolásából és előjelváltoztatásából kaptuk az oktopólust.

Ezek után pedig már láthatjuk, hogy az n -ed rendű multipólus képzésének szabálya Descartes-koordinátákkal, illetve gömbi koordinátákkal a következő:

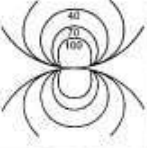
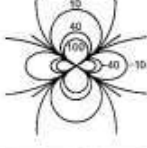
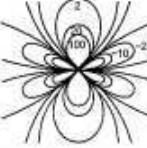
$$U^{(n)}(x, y, z) = (-1)^n \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{r}$$

$$U^{(n)}(r, \vartheta) = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\vartheta),$$

ahol $p^{(n)} = ip^{(n-1)}m_n$, $P_n(\cos\vartheta)$ pedig a $\cos\vartheta$ változó n -ed fokú polinómja, az úgynevezett Legendre-polinóm.

Fontos megjegyezni, hogy az előbbieken levezetett potenciálok csak az axiális multipólusokra érvényesek, a teljesen általános multipólusokra nem. A definíció célszerűségét a következő fejezetben fogjuk belátni, amikor vonaltöltés potenciálját fogjuk meghatározni.

A különböző multipólusok tulajdonságait a következő táblázat tartalmazza:

	Monopólus vagy pontszerű töltés	Dipólus	Kvadrupólus	Oktopólus	(i)-ed rendű multipólus
A multipólus rendje	0	1	2	3	i
A pontszerű töltések száma	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	2^i
A potenciál derékszögű koordinátákban	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$	$-\frac{p^{(1)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}$	$\frac{p^{(2)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r}$	$-\frac{p^{(3)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \frac{1}{r}$	$(-1)^i \frac{p^{(i)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \frac{1}{r}$
A potenciál gömbkoordinátákban	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$	$\frac{p^{(1)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\vartheta$	$\frac{p^{(2)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \frac{3}{2} \cdot \left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right)$	$\frac{p^{(3)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^4} \frac{1}{2} \cdot (5\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta)$	$\frac{p^{(i)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^{i+1}} P_i(\cos\vartheta)$
Ekvipotenciális felületek					
A potenciál eloszlása gömbfelületen					

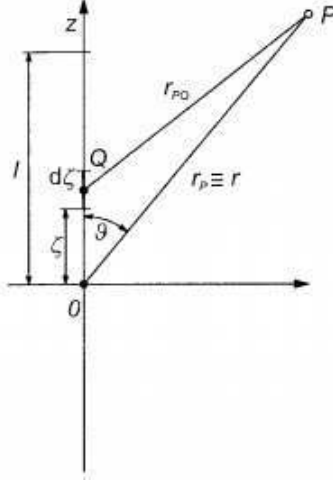
7. ábra.

2.7. Vonalszerű és felületi töltések erőtere

Amennyiben nem csak monopólusokból összerakott multipólusok potenciálját vizsgáljuk, hanem folytonos töltéseket, úgy beszélhetünk vonalszerű és felületi töltések erőteréről.

2.7.1. Vonaltöltés potenciálja

Határozzuk meg a tér egy P pontjában a z tengely mentén $\xi = -l$ és $\xi = +l$ között folytonosan eloszló $q(\xi)$ vonaltöltés potenciálját. Az elrendezést a 8. ábra szemlélteti.



8. ábra.

A $(0, \xi)$ pont környezetében kiválasztott $d\xi$ szakaszon helyet foglaló töltés

$$dQ = q(\xi)d\xi,$$

és ennek potenciálja

$$dU = \frac{q(\xi)}{4\pi\epsilon_0 r_{PQ}} d\xi,$$

azaz a teljes potenciál

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{+l} \frac{q(\xi)}{r_{PQ}} d\xi.$$

Legyen a P pont rögzített, ahogy a 8. ábra mutatja. Ekkor r_{PQ} értéke az

$$r_{PQ} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \xi)^2} \quad (11)$$

kifejezésnek megfelelően csak ξ -től függ.

Tekintsük az $f(\xi) = \frac{1}{r_{PQ}}$ függvényt, amely az $f(0) = \frac{1}{r}$ pontban Taylor-sorba fejthető és

$$f(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left. \frac{\partial^i f(\xi)}{\partial \xi^i} \right|_{\xi=0}}{i!} \xi^i.$$

A (11)-ből következik, hogy

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r_{PQ}} = - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r_{PQ}},$$

tehát

$$f(\xi) = \frac{1}{r_{PQ}} = \sum_{i=0}^{\infty} \xi^i \frac{(-1)^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial z^i} \frac{1}{r}.$$

Ezek után tehát felírhatjuk a P pontbeli potenciált a sorfejtés felhasználásával:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left[(-1)^i \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial^i}{\partial z^i} \frac{1}{r} \right) \int_{-l}^{+l} q \xi^i d\xi \right]$$

Ebből láthatjuk, hogy egy tetszőleges vonaltöltés első közelítésre egy monopólusnak, második megközelítésre egy dipólusnak, harmadik megközelítésre pedig egy kvadrupólusnak felel meg, és így tovább. A Taylor-sor tagjai a magasabb rendű multipólusok hatását adják meg. Többek között ezért volt benne a kvadrupólus momentumában a 2-es szorzó, ugyanis az a Taylor-sor konvergenciája miatti faktorálásból ered.

Amennyiben pontszerű töltések szerepelnek, úgy az általános momentumra az alábbi kifejezést kapjuk:

$$p^{(n)} = \sum_i Q_i z_i^n.$$

Azonban a z tengelyen folytonosan eloszló vonaltöltés potenciálját más módon is sorba lehet fejteni. Legyen a 8. ábra szerint

$$r_{PQ}^2 = r^2 + \xi^2 - 2r\xi \cos\vartheta.$$

Ezért a potenciál

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{+l} \frac{1}{r_{PQ}} q(\xi) d\xi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{+l}^{-l} \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 - 2\frac{\xi}{r} \cos\vartheta \right]^{-\frac{1}{2}} q(\xi) d\xi.$$

Az $r > l > \xi$ értékre $\frac{1}{r_{PQ}}$ binomiális sorba fejthető:

$$\frac{1}{r_{PQ}} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 - 2\frac{\xi}{r} \cos\vartheta \right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\cos\vartheta) \frac{1}{r^{i+1}} \xi^i,$$

ahol P_i polinomok definíciószerűen a Legendre-polinomok. Ezek kiadódnak, ha a sorbafejtést $\frac{1}{r}$ növekvő hatványai szerint rendezzük. A potenciál tehát:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\frac{1}{r^{i+1}} P_i(\cos\vartheta) \int_{-l}^{+l} q(\xi) \xi^i d\xi \right].$$

A potenciált így most is a különböző multipólus-nyomatékokkal fejezzük ki, ám most gömbi koordinátákkal.

2.7.2. Felületi töltés potenciálja

Legyen az A felület $\rho(\mathbf{r})$ változó felületi töltéssűrűséggel ellátva. Egy dA felületelemen a ρdA pontszerűnek tekinthető töltéselem potenciálja

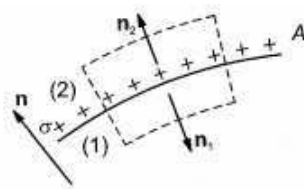
$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dA}{r}.$$

Itt r a dA felületelem és a P pont közötti távolság, ahol keressük a potenciált. Így tehát a felületi töltés potenciálját megadja az

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\rho dA}{r}$$

összefüggés.

A potenciál ugyanazt az értéket adja, akármelyik oldalról is közelítjük meg a felületet. Másképpen ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a potenciál folytonosan megy át egy ρ felületi töltéssűrűséggel ellátott felületen. A potenciál normális menti deriváltja azonban "ugrik".



9. ábra.

A fenti ábrán látható zárt felületre, és az általa körülhatárolt térfogatra, ha alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt, akkor azt kapjuk, hogy

$$\rho dA = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial U}{\partial n_2} + \frac{\partial U}{\partial n_1} \right) = -\epsilon_0 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_2 - \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_1 \right] dA.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_2$$

2.8. Elektromágneses energia

2.8.1. Az elektromágneses tér energia- és lendülethordozója

Az elektromágneses tereket a Maxwell-egyenletek kielégítően leírják. Azonban vizsgáljuk meg, hogy az egyenletek hogy kapcsolódnak a fizika többi ágához.

Először is definiáljuk az energiasűrűség (w) fogalmát, amelyet egyszerű közegekben a

$$w = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}, \mathbf{D} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{B}, \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{2} \mu \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle$$

összefüggés definiál. Mértékegysége $[w] = \frac{W_s}{m^3} = \frac{VA_s}{m^3}$.
Ezen felül pedig a mozgó töltésre ható erőt a Lorentz-erővel

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

írhatjuk le.

Az összenergia egy térfogatban megegyezik a mágneses és elektromos energiák összegével, vagyis az energiasűrűség térfogati integráljával, azaz

$$\int_V \frac{1}{2}\varepsilon\langle\mathbf{E}, \mathbf{E}\rangle + \frac{1}{2}\mu\langle\mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle dV.$$

2.8.2. Véges térfogatú elektromágneses tér energiája, energiamegmaradás

A zárt, véges V térfogatú térrészre igaz az a tétel, miszerint a V -beli generátorok által termelt teljesítmény megegyezik a V -ben tárolt egységnyi idő alatti energianövekedés, a V -ben hővé alakuló teljesítmény, és az A felületen V -ből kilépő sugárzó teljesítmény összegével. Ez formailag a következő alakot ölti:

$$\int_V \langle \mathbf{E}_{gen}, \mathbf{J} \rangle dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2}\mu\langle\mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle + \frac{1}{2}\varepsilon\langle\mathbf{E}, \mathbf{E}\rangle \right) dV + \int_V \frac{\langle \mathbf{J}, \mathbf{J} \rangle}{\sigma} dV + \oint_A \mathbf{E} \times \mathbf{H} d\mathbf{A}.$$

A fenti tételt egyszerűen bebizonyíthatjuk. Induljunk ki az I. és a II. Maxwell-egyenlet általános alakjából. Az első egyenletet szorozzuk meg $-\mathbf{E}$ -vel skalárisan, a másodikat pedig szorozzuk meg $\mathbf{H}$ -val, szintén skalárisan. A kapott eredményeket adjuk össze egymással, és azt kapjuk, hogy

$$\langle \mathbf{H}, \nabla \times \mathbf{E} \rangle - \langle \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{H} \rangle = -\langle \mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rangle - \langle \mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rangle - \langle \mathbf{E}, \mathbf{J} \rangle.$$

Majd alkalmazzuk a bal oldalra azt az összefüggést, hogy $\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \langle \mathbf{H}, \text{rot} \mathbf{E} \rangle - \langle \mathbf{E}, \text{rot} \mathbf{H} \rangle$, illetve integráljuk az adott V térfogaton a kifejezés mindkét oldalát, akkor az

$$\int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = - \int_V \left(\langle \mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rangle + \langle \mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rangle \right) dV - \int_V \langle \mathbf{E}, \mathbf{J} \rangle dV$$

kifejezéshez jutunk. Ezután, ha felhasználjuk a differenciális Ohm-törvényt a jobb oldal utolsó tagjára, illetve a Gauss-Osztrogradszkij tételt a bal oldalra, akkor a következő egyenletre jutunk:

$$\oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} = - \int_V \left(\langle \mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rangle + \langle \mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rangle \right) dV - \int_V \frac{\langle \mathbf{J}, \mathbf{J} \rangle}{\sigma} dV + \int_V \langle \mathbf{E}_{gen}, \mathbf{J} \rangle dV.$$

Ezt az egyenletet rendezzük

$$- \int_V \left(\langle \mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rangle + \langle \mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rangle \right) dV = \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} + \int_V \frac{\langle \mathbf{J}, \mathbf{J} \rangle}{\sigma} dV - \int_V \langle \mathbf{E}_{gen}, \mathbf{J} \rangle dV, \quad (12)$$

és amit kapunk, azt úgy értelmezhetjük, mint az energia megmaradásának tételét. Az egyenlet bal oldalának átalakításával

$$\int_V \left(\langle \mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rangle + \langle \mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rangle \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \epsilon \langle \mathbf{E}, \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{2} \mu \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle dV,$$

láthatjuk, hogy ez nem más, mint a közrezárt térfogatban foglalt elektromágneses energia időegység alatti változása. Ezt behelyettesítve (12)-be, és átrendezve az egyenletet megkapjuk a tétel állítását, de ezt most nem tesszük meg, mert így a fizikai háttér jobban látszik. Ugyanis, ha vesszük (12)-t, akkor az egyenlet jobb oldalán azt láthatjuk, hogy a tér elektromágneses energiája minek a hatására változik meg.

A térfogatba zárt elektromágneses energia csökken időegység alatt, hiszen a vezetésbeli áram a vezetőn áthaladva Joule-hőt fejleszt. A hővé disszipált teljesítményt a jobb oldal középső tagja írja le.

Csökken az energia akkor is, ha az áram a generátorok által fejlesztett térerősség ellen folyik, hiszen ekkor a jobb oldal utolsó tagja negatív lesz, és az integrál előtti (-1)-szeres szorzó az energia csökkenését idézi elő. Azonban, ha az áram egyirányba folyik a generátorok által gerjesztett erőter irányával, akkor a generátorok végeznek munkát, és így az elektromágneses energia nőni fog. A generátorok által leadott teljesítmény a jobb oldal utolsó tagjában jelenik meg.

Azonban ezen energiaátalakulások mellett van a jobb oldalon egy harmadik tag is, ami nem más, mint a térrészt lezáró A zárt felületen sugárzás formájában kilépő energia. Ezt Poynting-vektornak nevezzük, és $\mathbf{S}$ -sel jelöljük, továbbá igaz rá a következő összefüggés:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

Tehát általánosan elmondhatjuk, hogy a sugárzást leíró vektor merőleges mind az elektromos, mind a mágneses térerősségre. Ahol a Poynting-vektor nem nulla, ott az energia áramlik, még stacionárius esetben is. Ennek magyarázata, hogy az energia mindig a dielektrikumban terjed.

2.9. A Maxwell-egyenletek megoldásának egyértelműsége

Ha egy zárt V térfogatban a kezdeti feltételek, és a zárt térrész A határfelületén a határfeltételek adottak, vagyis

1. a V térfogat minden pontjában az $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ vektorok adottak a $t = t_0$ időpillanatban (kezdeti feltételek)
2. a V térfogatban a generátorok adottak a $t > t_0$ -ra
3. a határoló felület A minden pontjában vagy a tangenciális elektromos vagy mágneses térerő adott $t > t_0$ -ra (határfeltételek)

akkor a térrész belsejében a Maxwell-egyenletek megoldása mindenütt létezik, és egyértelmű, azaz $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ kiszámítható minden $t > t_0$ -ra. Ennek bizonyítása nem nehéz.

Tegyük fel, hogy a Maxwell-egyenleteknek van két olyan megoldása, amelyek ugyanazokat a kezdeti és határfeltételeket elégítik ki. Legyenek ezek $\mathbf{E}'$ és $\mathbf{H}'$, illetve $\mathbf{E}''$ és $\mathbf{H}''$. Ekkor

a Maxwell-egyenletek linearitásából következik, hogy e két megoldás különbsége is szintén megoldás lesz, tehát

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}' - \mathbf{E}'' \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{H}' - \mathbf{H}''\end{aligned}$$

is megoldások, azaz kielégítik a Maxwell-egyenleteket, és eleget tesznek a kezdeti és határfeltételeknek, tehát az elektromágneses energiamegmaradás törvényének is, vagyis igaz rájuk, hogy

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon \langle \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_0 \rangle + \frac{1}{2} \mu \langle \mathbf{H}_0, \mathbf{H}_0 \rangle \right) dV = \int_V \frac{\langle \mathbf{J}, \mathbf{J} \rangle}{\sigma} dV,$$

ugyanis a generátorok mindkét esetben azonosak, tehát a generátorokból adódó teljesítményt megadó tag a megoldások különbségére zérus, illetve a Poynting-vektor felületi integrálja is nulla, hiszen sugárzás sem lehet az A -n, mivel vagy az $\mathbf{E}$ vagy $\mathbf{H}$ tangenciális komponense nulla, tehát azt kaptuk, hogy a kifejezés értéke pozitív, hiszen a disszipált teljesítmény csak pozitív lehet. Mivel a kezdeti időpillanatban az összes energia nulla, hiszen azonos kezdeti értékekből indultunk, ezért az összes energia később sem válhat negatívvá, vagyis

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \mathbf{E}'' \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{H}''.\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a Maxwell-egyenletek megoldásának egyértelműségét egy zárt térrészben, adott feltételek mellett.

2.10. A retardált potenciál

Amennyiben szeretnénk megoldani a Maxwell-egyenleteket hullámtanilag, úgy be kell vezetnünk a retardált potenciálok fogalmát. A retardált késleltetett jelent, ami fizikailag annyit tesz, hogy egy adott pontban, ha megváltoztatjuk az elektromágneses erőteret, akkor egy attól távolabbi pontban a változtatás hatása késleltetve fog megjelenni.

Ehhez előbb tekintsünk a Maxwell-egyenletekre egy eddigiektől különböző megvilágításban:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \langle \nabla, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle &= 0. \\ \langle \nabla, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

Ekkor induljunk ki abból, hogy $\mathbf{B}$ felírható egy $\mathbf{A}$ vektorpotenciál rotációjaként, tehát $\mathbf{B}$ helyére helyettesíthetünk $\nabla \times \mathbf{A}$ -t a II. Maxwell-egyenletbe és, ha ezt nullára rendezzük, akkor a következő összefüggéshez jutunk:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

ahol pedig a Poincaré-lemmát felhasználva tudjuk, hogyha egy vektortér rotációja azonosan zérus, akkor ez a vektortér előáll egy skalárpotenciál negatív gradienseként, tehát:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t).$$

Az utolsó egyenletet átrendezve $\mathbf{E}$ -re azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Ekkor tehát kapunk egy szoros összefüggést a potenciálok és az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ terek között:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \phi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \times \mathbf{A} \\ -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Ezek után először helyettesítsünk be az I. majd a IV. Maxwell-egyenletbe, vagyis

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \langle \nabla, \mathbf{A} \rangle - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)}{\partial t}, \quad (13)$$

illetve

$$-\langle \nabla, \nabla \phi \rangle - \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla, \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (14)$$

Ahhoz, hogy (13) és (14) egyenleteket megoldjuk, válasszuk "mértéknek" a *Lorenz-mértéket*, azaz

$$\langle \nabla, \mathbf{A} \rangle + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

amiből egyenesen következik, hogy

$$\langle \nabla, \mathbf{A} \rangle = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Ezt behelyettesítve (13) és (14) egyenletekbe a következőket kapjuk:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J},$$

és

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Ezek megoldásai pedig rendre

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

és

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\varepsilon_0\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Felhasználva a potenciálok és az erők közötti összefüggést, az elektromágneses erőter a retardált potenciálokból már könnyen számolható.

2.11. Maxwell-egyenletek harmonikus időfüggés esetén. Frekvenciatartomány. Komplex amplitúdók

Egyszerű közegekben, harmonikus monokromatikus (szinuszos) időfüggések esetén bevethetjük a komplex amplitúdókat. Ezek előnye, hogy sokkal könnyebb velük számolni, mint egy szinuszos kifejezéssel, hátránya, hogy a komplex tartományra "ugrunk".

Időtartományban a Maxwell-egyenletekben szereplő mennyiségek $\mathbf{r}$ -től és t -től is függnének, míg frekvenciatartományban ugyanezek csak a helytől függnének, ugyanis a gerjesztést állandó frekvencián tekintjük.

A frekvenciatartományban a Maxwell-egyenletek a következőképp alakulnak:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{B} \\ \langle \nabla, \mathbf{B} \rangle &= 0 \\ \langle \nabla, \mathbf{D} \rangle &= \rho\end{aligned}$$

A Maxwell-egyenletek "maradékai", azaz a Lorentz-erőt leíró, az áramsűrűségekre vonatkozó, illetve a $\mathbf{D} \Leftrightarrow \mathbf{E}$ és $\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{H}$ közötti összefüggések változatlanok maradnak egyszerű közegekben.

Az idő- és frekvenciatartomány közötti átmenetet az alábbi összefüggés adja meg:

$$u(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U} \cos(\omega t + \phi) = \Re\{\mathbf{U}(\mathbf{r})e^{j\phi}e^{j\omega t}\},$$

ahol a komplex amplitúdó az

$$\mathbf{U}(\mathbf{r})e^{j\phi}.$$

2.12. Az elektromágneses hullámok

Az elektromágneses hullámok egyenleteit (egyszerű közegekben, időtartományban) meghatározhatjuk a Maxwell-egyenletekből, mégpedig a következő két feltétel mellett:

$$\begin{aligned}\rho &= 0 \\ \mathbf{J} &= 0.\end{aligned}$$

Ekkor a Maxwell egyenletek a következőképpen egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \langle \nabla, \mathbf{B} \rangle &= 0 \\ \langle \nabla, \mathbf{D} \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Írjuk át az első egyenletet a következőképp:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Tekintsük most a második egyenletet, és képezzük mindkét oldal rotációját:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B},$$

ahova, ha behelyettesítjük az első egyenlet átírását, azt kapjuk, hogy

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

ahol a kifejezés közepe és bal oldala közötti egyenlőséget a következő összefüggés írja le (kiegészítve a feltételezéseink mellett érvényes IV. Maxwell-egyenlettel):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \langle \nabla, \mathbf{E} \rangle - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}.$$

Amennyiben az előbb végzett átalakításokat elvégezzük "fordított szereposztással", úgy megkapjuk ugyanezt az egyenletet, $\mathbf{B}$ -re vonatkozóan:

$$\Delta \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

A fenti két hullámegyenletet hívjuk az elektromágneses tér hullámegyenleteinek. Fontos megjegyezni, hogy a két megoldás ($\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$) nem biztos, hogy összetartozóak!

2.12.1. Hullámegyenletek a frekvenciatartományba

A fent bemutatott hullámegyenleteket természetesen le lehet írni a "komplex amplitúdók" világában is:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} &= -\omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{E} \\ \Delta \mathbf{B} &= -\omega^2 \varepsilon \mu \mathbf{B}.\end{aligned}$$

2.12.2. A fény, mint elektromágneses hullám

1864-ben Maxwell egyenleteiből levezette, hogy léteznie kell olyan elektromágneses hullámnak, amelynek sebessége a stacionáriusan mérhető ε_0 -ból és μ_0 -ból kiszámítható, tehát

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Maxwell korában már ismert volt a fény terjedési sebessége, amely Fizeau 1849-es pontosítása értelmében

$$c = 300000 \frac{km}{s}.$$

Amennyiben kiszámoljuk a fenti, v -t megadó kifejezést, azt kapjuk, hogy

$$v = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s},$$

azaz ebből Maxwell arra következtetett, hogy a fény elektromágneses hullám.

2.13. Síkhullámok

A hullámequyenletek legegyszerűbb megoldásai a síkhullámok (egyszerű közegekben), ehhez a következő feltételeket kell teljesíteni az elektromágneses hullámnak:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} = 0$$

Tekintsük a következő (frekvencia tartományban lévő) egyenletet:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}),$$

ha pedig az egyenlet bal oldalán szereplő rotációképzést elvégezzük a következő egyenlőségre jutunk:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\omega(B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})$$

itt pedig tagonként egyenlőséggel kapunk három egyenletet:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega B_x, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega B_y, \quad 0 = -j\omega B_z.$$

Hasonlóan vizsgáljuk meg a következő összefüggést is:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = j\omega \varepsilon \mathbf{E}.$$

Ismét végezzük el az egyenlet bal oldalán szereplő rotációképzést

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = j\omega \varepsilon \mu (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}),$$

amiből pedig tagonkénti egyenlőséggel a következő adódik:

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} = j\omega \mu \varepsilon E_x, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = j\omega \mu \varepsilon E_y, \quad 0 = j\omega \mu \varepsilon E_z.$$

Jól látható, hogy $E_z = B_z = 0$. Továbbá a két, tagonként vett egyenlőség összehasonlításával kapunk két másodrendű, homogén, közönséges differenciál egyenletet:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon E_x = 0,$$

illetve

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon B_x = 0.$$

Ezek megoldása rendre

$$E_x = E_x^+ e^{-j\beta z} + E_x^- e^{j\beta z},$$

és

$$B_x = B_x^+ e^{-j\beta z} + B_x^- e^{j\beta z},$$

amit célszerű a mágneses térerősségekkel megegyező koordinátával megadni, azaz

$$H_x = H_x^+ e^{-j\beta z} + H_x^- e^{j\beta z},$$

ahol $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Most, hogy E_x -et és H_x -et ismerjük, használjuk fel ismét a tagonkénti egyenlőséggel leírt egyenleteinket, amik segítségével meghatározhatjuk az y -hoz tartozó koordinátáit is a térerősségeknek:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y,$$

amiből pedig megkapjuk, hogy

$$H_y = \frac{E_x^+}{\eta} e^{-j\beta z} - \frac{E_x^-}{\eta} e^{j\beta z}.$$

Teljesen hasonló módon

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = -j\omega\varepsilon E_y,$$

amiből pedig azonnal következik, hogy

$$E_y = \eta H_x^+ e^{-j\beta z} - \eta H_x^- e^{j\beta z}.$$

A fenti átalakításokban kihasználtuk, hogy a hullámmellenálásra (karakterisztikus impedancia) vonatkozó összefüggés a következő:

$$\eta = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_{rel}}{\varepsilon_{rel}}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_{rel}}{\varepsilon_{rel}}}.$$

Amiből pedig látható, hogy a vákuum hullámmellenállása $\eta = 120\pi \approx 377\Omega$.

Összesítve tehát az síkhullámok általános megoldása:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z) &= (E_x^+ e^{-j\beta z} + E_x^- e^{j\beta z})\mathbf{i} + (E_y^+ e^{-j\beta z} - E_y^- e^{j\beta z})\mathbf{j} \\ \mathbf{H}(z) &= \left(\frac{E_x^+}{\eta} e^{-j\beta z} - \frac{E_x^-}{\eta} e^{j\beta z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{E_y^+}{\eta} e^{-j\beta z} - \frac{E_y^-}{\eta} e^{j\beta z}\right)\mathbf{j} \end{aligned}$$

2.13.1. Síkhullámok terjedése különböző közegekben

A síkhullámok esetében a fent levezetett egyenletek akkor és csak akkor érvényesek, ha vákuumban terjed a hullám. Amint más közegekről beszélünk (vezetők belsejében), akkor már a közeget jellemezhetjük úgy, hogy veszteségmentes vagy veszteséges, attól függően,

hogy a vezetés(σ) értéke mekkora. Továbbá $j\omega\varepsilon_0$ kifejezés $\sigma + j\omega\varepsilon$ összefüggésé bonyolódik. Ekkor a fent bemutatott Maxwell-egyenleteket ki kell egészíteni a következőkkel:

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{\varepsilon\mu} \rightarrow \gamma = j\omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)},$$

ahol γ a terjedési együttható vagy másnéven tényező, amit úgy kapunk meg, ha az imaginárius egységgel szorozzuk a β -t. A karakterisztikus impedancia is változik közegben:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}}.$$

Kiszámolható az admittancia ($Y(j\omega)$) és impedancia ($Z(j\omega)$) hányadosának négyzetgyökeként is.

Látható, hogy $\sigma = 0$ esetén visszkapjuk a vákuumra vonatkozó egyenleteket, tehát a vákuum veszteségmentes (egyszerű) közeg. Amennyiben azonban $\sigma \neq 0$, úgy a síkhullámok egyenletei jelentősen nem változnak, csupán a β , azaz

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)},$$

illetve a fent említett karakterisztikus impedancia.

A síkhullámok, ha két közeg határoló felületéhez érnek, akkor három dolog történhet velük:

- Egy részben áthaladnak, részben visszaverődnek
- Veszteségmentesen áthaladnak, nem verődnek vissza egyáltalán
- Teljesen visszaverődnek

2.14. Távvezetékek

A távvezeték reprezentálható áramköri elemként is. Vegyünk a vezetékből egy dx , egységnyi hosszúságú szakaszt. Ezt jellemezhetjük valamilyen Y (*admittancia*) és Z (*impedancia*) értékekkel. Az adott egységnyi vezetékemben, a bemeneti áramot jelölje $I(x)$, bemeneti feszültséget jelölje $U(x)$, és a kimeneti áramot, illetve feszültséget jelölje $I(x)+dI(x)$ és $U(x)+dU(x)$. Ekkor a következő egyenletek érvényesek lesznek:

$$-dU(x) = ZdxI(x),$$

illetve

$$-dI(x) = YdxU(x).$$

2.14.1. Távíróegyenletek

Rendezzük az utolsó két egyenletet, ekkor kapunk két elsőrendű, homogén, lineáris differenciálegyenletből álló rendszert

$$\begin{aligned}\frac{-dU(x)}{dx} &= ZI(x) \\ \frac{-dI(x)}{dx} &= YU(x)\end{aligned}$$

Ezek a távíróegyenletek ezen egyenletek megoldásai a következők:

$$U(x) = U^+ e^{-j\beta x} + U^- e^{j\beta x},$$

illetve

$$I(x) = I^+ e^{-j\beta x} + I^- e^{j\beta x}.$$

A terjedési tényező itt

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{ZY},$$

ahol az α a csillapítás mértéke.

A "hullámellenállás" pedig

$$\eta = \sqrt{\frac{Z}{Y}}.$$

Fontos megjegyezni azonban, hogy a fenti összefüggések csak ideális vezető esetén értendő, azaz, ha a generátor belső ellenállását és a fogyasztó ellenállását zérusnak tekintjük (viszont ekkor nincs csillapítás!).

Ha a hosszegységre eső impedanciát áramköri ekvivalensként egy induktivitással, az ugyanerre az egységre eső admittanciát pedig áramköri ekvivalensként egy kapacitással helyettesítjük, akkor megkapjuk az ideális, veszteségmentes távvezetékét.

2.14.2. Hullámterjedés és reflexió távvezetékekben

Eddig ideális távvezetésekről beszéltünk, amelyet úgy is modellezhetünk, mint egy generátor, és egy fogyasztó áramköre, ahol a generátor belső ellenállása és a fogyasztó impedanciája is nulla (vagy végtelen hosszú vezetékről beszélünk, de ez fizikailag és mérnökiileg nem releváns).

Azonban, ha véges hosszú vezetékét lezárunk egy tetszőleges impedanciával, akkor három eset lehetséges:

- A) A lezáró impedancia véges, de nem nulla.
- B) A "lezáró impedancia" azonosan zérus.
- C) A lezáró impedancia értéke végtelen. (Tehát szakadással helyettesítjük).

A) Ha a lezáró impedancia (fogyasztó) véges, de nem nulla, akkor az elektromágneses hullám, amint eléri a fogyasztót, reflektálódik a reflexiós tényező (Γ) függvényében, amely megadja, hogy a beeső hullámok mekkora hányada reflektálódik. A reflexiós tényező az alábbi képletből számolható:

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}.$$

A hullámmellenállás csak akkor adja meg a vezeték tetszőleges pontjában mért feszültség és áram viszonyát, ha abban a vezetékben csak egyirányú hullám halad. Ez vagy végtelen vezetékben fordulhat elő, vagy, ha a lezáró impedanciát pontosan a hullámmellenállással megegyező értékűnek választjuk. Ekkor a generátor által közölt teljes energia a lezáró ellenállásban emésztődik fel.

B) Ebben az esetben a reflexiós tényező értéke -1, a feszültség ellenkező fázisban, az áram pedig azonos fázisban verődik vissza. Az eredő feszültség és az áramerősség állóhullámot alkot, tehát az amplitúdó eloszlása a vezetékben szinuszos, és ezen eloszlás csúcspontjai és zérusai az időben állandóak maradnak.

C) Ezesetben a vezetéket egy kondezátorral zárjuk le. A B)-hez hasonlóan itt is állóhullámot kapunk, de észrevehetjük azt, hogy egy $x=d$ hellyel arrébb "toltuk" a feszültségmaximumát, ami annyit tesz, mintha a vezetéket "meghosszabbítottuk" volna, a B)-ben tárgyalt vezetékhez képest.

2.15. A síkhullámok refrakciója. Snellius-Descartes törvény és Fresnel-egyenletek

Előfordulhat, hogyha egy határoló felületre érkezik egy elektromágneses hullám, és transzmittálódik, akkor nem az eredeti terjedési irányában halad tovább, hanem elhajlik, idegen szóval refraktálódik.

Az érkező elektromágneses hullám beesési merőlegessel bezárt beesési, illetve transzmittált hullám által szintén a merőlegessel bezárt szögek közötti összefüggést adja meg a Snellius-Descartes törvény, miszerint

$$\frac{\sin\vartheta_i}{\sin\vartheta_t} = \frac{\beta_i}{\beta_t} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}$$

Majd, ha a beesési, és továbbhaladó hullámokat felbontjuk a határoló réteggel párhuzamos és arra merőleges összetevőkre, és mindkettőre külön-külön felírjuk a reflexiós(Γ) és transzmissziós(T) koefficiienst, akkor a következőket kapjuk:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\hat{E}_{\parallel m}^r}{\hat{E}_{\parallel m}^i} = \frac{\eta_2 \cos\vartheta_t - \eta_1 \cos\vartheta_i}{\eta_1 \cos\vartheta_i + \eta_2 \cos\vartheta_t}$$

$$T_{\parallel} = \frac{\hat{E}_{\parallel m}^t}{\hat{E}_{\parallel m}^i} = \frac{2\eta_2 \cos\vartheta_i}{\eta_1 \cos\vartheta_i + \eta_2 \cos\vartheta_t},$$

illetve

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\hat{E}_{\perp m}^r}{\hat{E}_{\perp m}^i} = \frac{\eta_2 \cos \vartheta_i - \eta_1 \cos \vartheta_t}{\eta_1 \cos \vartheta_t + \eta_2 \cos \vartheta_i}$$

$$T_{\perp} = \frac{\hat{E}_{\perp m}^t}{\hat{E}_{\perp m}^i} = \frac{2\eta_2 \cos \vartheta_i}{\eta_1 \cos \vartheta_t + \eta_2 \cos \vartheta_i},$$

ahol

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$$

Ezek pedig az úgynevezett Fresnel-egyenletek, amelyeket tehát a Snellius-Descartes törvényből vezettünk le.

3. Kvantummechanika

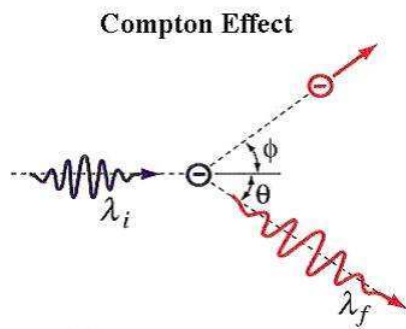
A klasszikus fizika minden, amit Max Planck 1900. december 14-ei fekete testről szóló cikke előtt tudtunk a világról. Innentől számtjuk a kvantummechanika korát.

3.1. Az anyagok kettős természete

A fényről sokáig azt hitték, hogy részecske, ám Maxwell merész kijelentése, miszerint a fény elektromágneses hullám (ami egyébként levezethető a Maxwell-egyenletekből) egy új problémakört nyitott meg.

3.1.1. A foton, mint "kettős természet"

Arthur Holly Compton 1922-ben röntgen (x-ray) kvantumokat ütköztetett elektronokkal. Az ütközés során a röntgen-kvantum az álló elektront meglöki, kinetikus energiát ad át, a fénykvantum energiát veszít és szóródik. (10. ábra)



10. ábra.

Az energia megmaradása:

$$hf + m_0c^2 = hf' + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}c^2,$$

ahol h a Planck-állandó és

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} Js.$$

A momentum megmaradása:

$$\frac{hf}{c} = \frac{hf'}{c} \cos\vartheta + mv \cos\phi.$$

A fénykvantum ("foton") energiája:

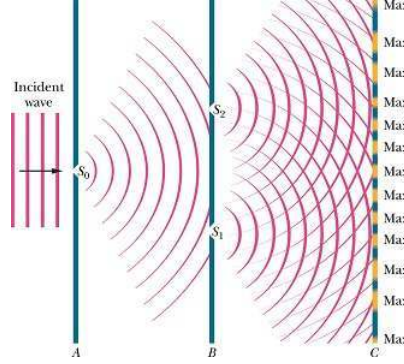
$$hf' = \frac{hf}{1 + \frac{hf}{m_0c^2}(1 - \cos\vartheta)},$$

illetve hullámhossza az ütközés után:

$$\Delta\lambda = \frac{c}{f'} - \frac{c}{f} = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\vartheta).$$

Ennek kísérleti igazolása *Wilson-chamber*-ben (ködkamra) történt. A részecsketrajektóriák nagy pontossággal igazolták a fénykvantum részecske szerű viselkedését.

A fény egy elektromágneses hullám, tehát interferenciát mutat (Young kísérlet, 11. ábra). Azonban a fény részecske is, mert ütközéskor testként viselkedik (Compton-szóródás, 10. ábra).



11. ábra.

Amennyiben a fény hullám, akkor frekvenciája, terjedési sebessége és hullámhossza van, azaz frekvenciája és hullámszám-vektora van: $(\omega, \mathbf{k})$. Azonban, ha a fény részecske, akkor energiája és momentuma van: $(E, \mathbf{p})$. Mivel a fény mindkét tulajdonsággal rendelkezik, ezért azt mondjuk, hogy a fény "kettős-természetű" (angolul: wavicle. A megnevezés Richard Feynmantól származik). Ugyanaz a foton az egyik kísérletben részecskeként, a másikban hullámként viselkedik.

Mint hullám, elmondható róla, hogy

$$\omega = 2\pi f,$$

és

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n},$$

ahol $\mathbf{n}$ a hullám terjedési irányával megegyező egységnyi hosszú normálvektor.

Az alábbi két egyenlet teremt kapcsolatot a részecske és hullám természet között:

$$E = \hbar\omega = hf,$$

illetve

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = \frac{h}{\lambda} \mathbf{n},$$

ahol $\hbar$ a redukált Planck-állandó, azaz:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

3.1.2. Az elektron hullámtermészete

Sir Joseph John Thomson katódsugárcső kísérletéből kiderült, hogy az atomok nem oszthatatlanok, továbbá az is kiderült, hogy elektronokra "bontható" az atom. Ekkor részecskének gondolták még az elektront, és ezen természete vitán felül állt. Azonban 1924-ben Louis de Broglie felvetette, hogy - a fényhez hasonlóan - az elektronnak is van hullámtermészete. Az eleinte abszurd ötlet 3 évvel később realitássá vált, ugyanis kimutatták, hogy kristályrácsan áthaladva az elektron is ugyanolyan elhajlasképet mutat, mint a szerkezetileg hasonló optikai rácsan áthaladó fény. Claus Jönsson, svéd fizikus elvégezte a Young-féle két rés kísérletet is az elektronnal, és teljesen azonos elhajlasképet kapott, mint amit Young is kapott 1799-ben.

De Broglie azt feltételezte, hogy az elektron-hullám csoportsebessége megegyezik az elektronnal, mint részecske sebességével, a hullámhossza pedig - hasonlóan a fotonhoz - fordítottan arányos a lendületével, azaz

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

és

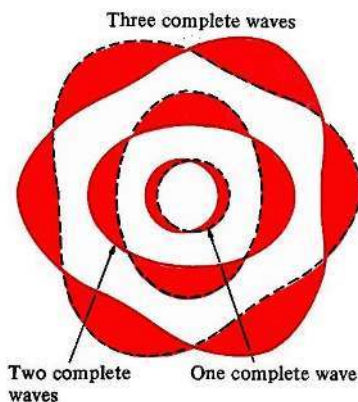
$$p = mv = \hbar k = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda}$$

Továbbá de Broglie szerint az atomi elektronpályák hossza mindig a hullámhossz egész számú többszöröse (12. ábra):

$$mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi},$$

ahol $n = 1, 2, \dots$ lehet. Most tekintsük az előző két egyenletet, és fejezzük ki a kerületet a hullámhosszal:

$$2r_n \pi = n\lambda.$$



12. ábra.

Látható, hogyha körpályának képzeljük el az elektronpályát, akkor tényleg megegyeznek a kerületek a hullámhossz egész számú többszöröseivel.

A hullámtermészet kísérleti igazolása (két rés kísérlet) teljesen egyértelműen bebizonyította, hogy az elektron nem csak részecske természetű, hisz, amennyiben "golyók" lennének az elektronok, úgy a réseken áthaladó elektronok képe megegyezett volna az egyik résen áthaladó és a másik résen áthaladó golyók képének összegével, ám nem ezt tapasztalták, tehát valahol interferenciának kellett keletkeznie, ami viszont a hullám sajátos tulajdonsága.

Az elektronra is igazak a fotonra felírt összefüggések a hullám $(\omega, \mathbf{k})$ - és részecsketermészet $(E, \mathbf{p})$ között:

$$E = hf = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega$$

$$\mathbf{p} = \frac{h}{\lambda}\mathbf{n} = \frac{h}{2\pi}\mathbf{k} = \hbar\mathbf{k}.$$

Fontos megjegyezni, hogy nem csak az elektronnak és a fotonnak van hullámtermészete, hanem mindennek. Ezt a tényt protonok, neutronok, He atom és C_{60} molekula esetén kísérletileg is bebizonyították.

3.2. A fekete test sugárzása

Általános tapasztalat, hogy minden gáz, folyadék és szilárd anyag -273 Kelvinnél magasabb hőmérsékleten elektromágneses hullámokat sugároz, másnéven sugárzást emittál.

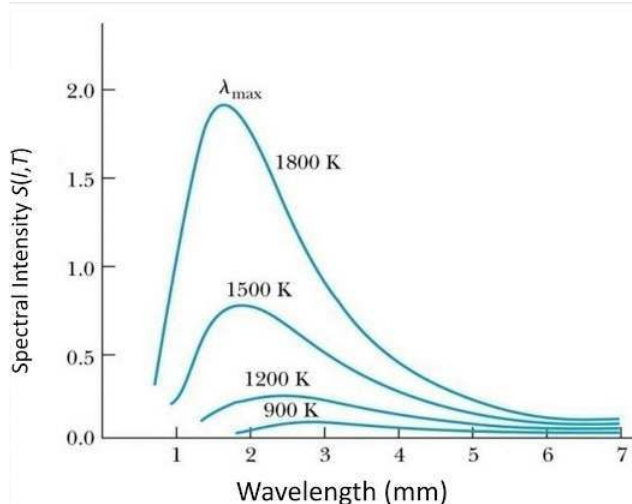
A minden sugárzást elnyelő (abszorbeáló), úgy nevezett fekete test (13. ábra) sugárzása független a sugárzó test anyagától, illetve alakjától.



13. ábra.

Azért nyel el minden sugárzást, mert a fényforrás csak egy nagyon kis résen tud bejutni a test belsejébe, és ott a folyamatos visszaverődésekkor energiát veszít, és matematikailag nagyon kicsiny az esélye, hogy a hullám bármikor pontosan úgy érkezzon a réshez, ahogy befele érkezett, tehát pongyolán megfogalmazva "sosem jön ki".

A kísérletekben rögzített hőmérsékleten mérték a felületegységen (vagy hullámhosszon) hullámhosszegységre eső kisugárzott intenzitást, amit $S(\lambda, T)$ -vel jelölünk. A mérések után a következő görbét kapták:



14. ábra.

A mérésekkel kapcsolatban több megfigyelés, illetve törvény született

1. Wien-törvény
2. Stefan-Boltzmann-törvény
3. Planck-törvény

Wien megfigyelése, vagy törvénye kimondja, hogy a görbe maximumhelyének és a hőmérsékletnek (amin a kísérletet elvégezték) szorzata állandó, és

$$\lambda_{\max} T = 2.898 \cdot 10^{-3} mK.$$

Stefan-Boltzmann-törvény azt mondja ki, hogy a felületegységen sugárzott összteljesítmény az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával nő, tehát

$$\frac{P(T)}{A} = \sigma T^4 = \frac{\int_0^\infty S(\lambda, T) d\lambda}{A},$$

ahol a paraméter értéke

$$\sigma = 5.6705 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Planck a méréseket próbálta zárt alakban leírni. Tudták, hogy az ideális fekete test, minden színt tökéletesen elnyel, és minden színt sugároz. Az intenzitás csak a hőmérséklettől függ, a test alakjától, illetve anyagától nem.

Planck talált rá egy formulát, amely egyszerű, és csupán egyetlen paramétertől függ, amelyet a mért görbékre való illesztéssel határozott meg, ez a Planck állandó.

Feltette, hogy a sugárzást az üregben lévő "oszcillátorok", az üreg rezonáns módusai nyelték el, és sugározták vissza a kis nyíláson át.

Adott T hőmérsékleten, egyensúlyban, minden szabadságfokra $\frac{1}{2}kT$ energia jut, ahol k a Boltzmann-állandó. A módusok száma a frekvencia négyzetével arányosan nő, ez az ultraibolya paradox.

A mérésekkel egyező formula azonban egy komoly "gondra" mutatott rá, ugyanis csak úgy sikerült megegyeznie a mérésekkel, hogy Planck feltette, hogy az oszcillátorok csak "kvantált" energiájúak lehetnek, mégpedig

$$E = nh, n = 0, 1, 2..$$

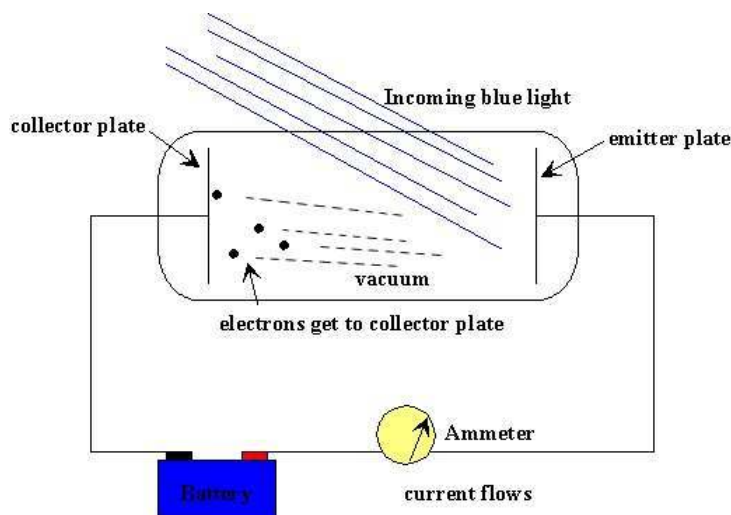
Ezek után pedig a formula:

$$S(\lambda, T) = \frac{2\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}.$$

3.3. Fényelektromos jelenség

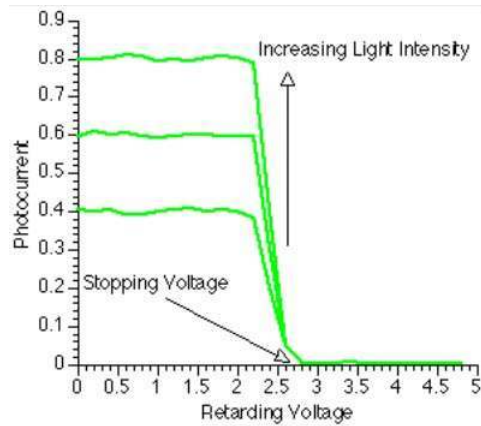
Amennyiben egy monokromatikus fénnel világítunk meg egy fémfelületet, akkor a fémfelületből elektronok lépnek ki, ez a fényelektromos jelenség. Ezeket az elektronokat hívjuk "fotoelektronoknak". (15. ábra).

Monokromatikusnak hívunk minden olyan hullámot, amelynek a frekvenciája állandó.



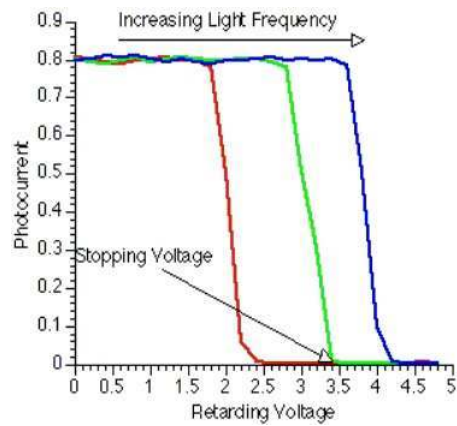
15. ábra.

Megfigyelhető, hogy a kilépő elektronok maximális energiája nem függ a megvilágító fény intenzitásától, csupán a frekvenciájától (színétől). A fény intenzitásának növelésével azonban a kilépő elektronok száma növekszik (16. ábra).



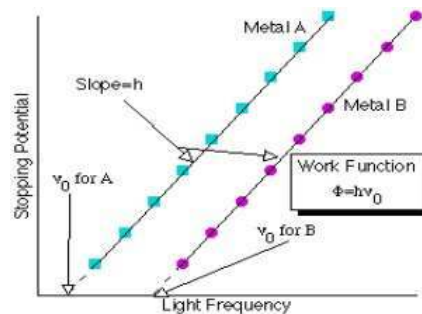
16. ábra.

Észrevehetjük azt is, hogy a fékező feszültség növelésével az anódra eljutó elektronok száma csökken, illetve, ha a feszültség eléri a zárófeszültség értékét (és meghaladja azt), akkor nem ér el egyetlen elektron sem a katódról az anódra (17. ábra).



17. ábra.

Ez a zárófeszültség a megvilágító fény frekvenciájával lineárisan változik (18. ábra).



18. ábra.

Az elektromágneses síkhullám "energiacsomagokban" terjed, és az f frekvenciájú csomag

energiája:

$$E = hf.$$

A fény c sebességgel repülő hf energiájú "részecskéként" ütközik a fémfelületbe, amennyiben pedig van elég energiája, úgy behatol és kiüt egy elektront. Az energia megmaradása:

$$hf \geq \frac{1}{2}mv^2 + E_W,$$

ahol E_W az elektron "kilépési" munkája, a jobb oldal másik tagja pedig a kilépő elektron kinetikus energiája.

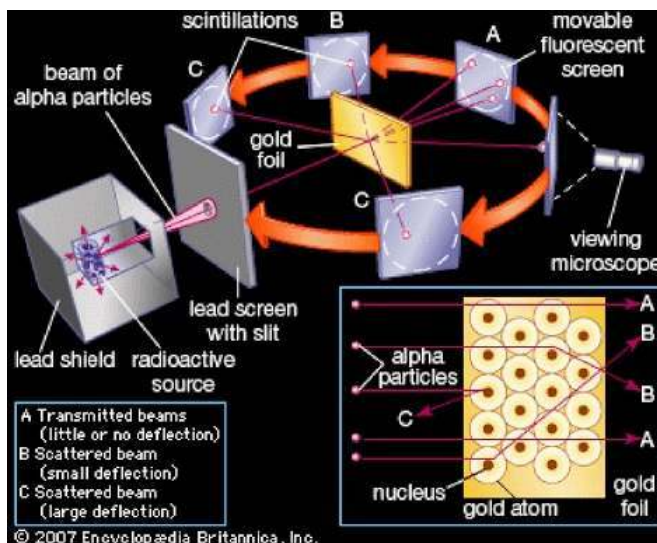
Záró feszültség esetén ez a következőképpen módosul:

$$q_e U_r = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = hf - E_W.$$

Einstein szerint a fény fotoelektromos hatása miatt a fény részecskéként működik, tehát sugárzás "túsugárzás", azaz hullámcsomagokban terjed, és a fenti összefüggések igazak rá. Ezt egyébként Selényi Pál cáfolta meg, aki bebizonyította, hogy a fény sugárzása gömb-sugárzás.

3.4. Az atommag

1911-ben Ernest Rutherford felfedezte az atommagot. Rutherford kísérletileg bebizonyította, hogy az atomban lévő pozitív töltés egy kis magban koncentrálódik, melynek átmérője nagyjából $10^{-5}nm$, így 10000-szer kisebb, mint az atom átmérője, vagyis $0.1nm$, azaz $1\text{\AA}$ (Ångström). A kísérletet az alábbi ábra szemlélteti:



19. ábra.

A kísérletben radioaktív He atomból "nyert" sugarakkal bombázott egy aranyfóliát. A lemez köré pedig ernyőket tett, hogy vizsgálja a becsapódó részecskéket. Azt vette észre,

hogy a részecskéknél 98%-a akadálytalan áthaladt a fólián, míg 2% jelentősen elhajlott. Továbbá a részecskék 0.01%-a visszaverődött.

Ez alapján négy dolgot foglalmazhatunk meg:

1. Az atomban van egy kicsi atommag. Az atommag térfogata 10^{-15} -ed része az egész atom térfogatának
2. Majdnem a teljes atomtömeg az atommagban koncentrálódik
3. Az atommag töltése pozitív. Az elektronok negatív töltése neutralizálja az atomot.
4. Az elektronok az atommag körüli üres térben keringenek.

3.5. Bohr-féle atommodell

A fizikusok közül Bohr volt az első, aki "teljes" atommodellt épített, mégpedig a legegyszerűbb atomra, a hidrogénre. Bohr szerint az atom egy klasszikus, a Naprendszerünkhöz hasonló, "planetáris" rendszer, azaz

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^2}{r_n^2} = m \frac{v_n^2}{r_n},$$

viszont a pályák perdülete

$$mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi}, n = 1, 2, \dots$$

Az atom foton abszorpció, illetve emisszió során kibocsát, vagy elnyel fotont, így egy elektronja eggyel alacsonyabb, vagy magasabb energiaszintre ugrik, vagyis

$$hf = E_{n2} - E_{n1}.$$

Hidrogén atom esetén a pályák sugarai, illetve energiái:

$$r_n = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} n^2$$

$$E_n = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0 h^2} \frac{1}{n^2}.$$

Ennek bizonyítása teljesen mechanikus. Induljunk ki az első posztulátumból, vagyis abból, hogy az atom planetáris rendszer, majd ezt alakítsuk a következők szerint:

$$mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi} = \left(\frac{mv_n^2}{r_n} \right) \frac{r_n^2}{v_n} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} \right) \frac{r_n^2}{v_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{v_n}.$$

Most pedig írjuk fel a kapott eredményt

$$n \frac{h}{2\pi} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{v_n},$$

amiből kifejezve v_n -t

$$v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} \frac{1}{n}.$$

Most fejezzük ki a perdületből

$$mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi}$$

a pálya sugarát. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$r_n = \frac{nh}{2\pi mv_n} = \frac{nh}{2\pi m \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h} \frac{1}{n}} = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m e^2} n^2.$$

Ezekből az eredményekből pedig, ha felírjuk a hidrogén atom összenergiáját, ami a kinetikus és potenciális energiák összege, akkor a következő összefüggésre jutunk:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} - \frac{me^4}{4\varepsilon_0 h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}.$$

3.6. Vonalas spektrum

A newtoni, illetve maxwelli fizikából ismerjük, hogy az atommag körüli gyorsulva mozgó töltés, vagyis elektron sugároz, mint egy körantenna. Azonban, ha a körmozgást végző elektron energiát veszítene, úgy fokozatosan közelednie kéne az atommaghoz, míg végül bele nem zuhanna. A sugározva keringő elektron által kisugárzott energia frekvenciája folytonosan változik tehát.

A kísérletek viszont azt mutatják, hogy az atomok (tiszta gázok) sugárzásának spektruma "vonalas", tehát diszkrét frekvenciákon megy végbe a sugárzás. Amennyiben pedig az atom eléri a legkisebb energiája, úgy nevezett "ground state" állapotot, akkor megszűnik sugározni. Stacionárius sajátállapotokban az elektron nem sugároz. Ez is egy jelentős lépés volt a klasszikus fizikától a kvantumfizikáig.

3.7. Schrödinger-egyenlet

Erwin Schrödinger által megalkotott egyenlet sok választ adott az addigi nyitott kérdésekre a kvantummechanikában. Célja az volt, hogy egy hullámfüggvénnyel leírja az elektront.

Az elektron hullámszerűen (is) viselkedik, és interferenciát mutat (ami szuperpozíció-szerű), ezért a hullámfüggvény lineáris. A hullámfüggvény a térbeli változásokat köti össze az időbeli változásokkal.

Adott egy részecske (elektron), ennek van m_e tömege és q_e töltése. Továbbá potenciáljával adott egy erőter, amelyben mozog az elektron. Ekkor a következő egyenletet nevezzük időfüggő Schrödinger-egyenletnek:

$$\mathbf{H}\Psi = j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Ψ az elektron hullámfüggvénye (igazából az egyenlet ismeretlene), és $\mathbf{H}$ a Hamilton-operátor, ami az elektron összenergiája, tehát:

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + E_{pot},$$

ahol

$$\frac{E_{kin}}{\mathbf{k}^2} = \frac{\hbar^2}{2m}.$$

hiszen

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

és

$$\mathbf{p}^2 = (m_0\mathbf{v})^2. \quad (15)$$

3.7.1. A Schrödinger-egyenlet megoldása változók szétválasztásával

A fenti egyenletet a változók szétválasztása módszerével oldhatjuk meg. Ugyan ez egy erős, de működő feltételezés, hisz azt jelenti, hogy a $\Psi(\mathbf{r}, t)$ függvény felírható egy időtől függő, helytől nem, illetve egy helytől függő, időtől nem függő tag szorzataként, vagyis

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r})\phi(t).$$

Ezt most helyettesítsük vissza az időfüggetlen egyenletbe, és használjuk fel a Hamilton-operátorra vonatkozó összefüggést:

$$\phi\mathbf{H}\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{pot}\right)\Psi\phi = j\hbar\Psi\frac{d\phi}{dt}.$$

Az egyenlet bal oldalán azért emeltük ki a csak időtől függő ϕ tagot, mert amiatt, hogy csak az időtől függ, a Hamilton-operátor szempontjából csak egy konstans, és lineáris operátorként a konstans szorzó kihozható az operátor elé.

Ezek után, ha osztjuk az utolsó egyenletet Ψ -vel és ϕ -vel, akkor a következő egyenletre jutunk:

$$j\hbar\frac{1}{\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{\Psi}\mathbf{H}\Psi.$$

Az egyenlet egyenlő lesz egy konstanssal, hiszen egy csak időtől függő, és egy csak helytől függő függvény akkor lesz egyenlő egymással, ha azok azonosan egyenlőek valamilyen konstanssal.

Így tehát az eredeti időfüggő Schrödinger-egyenletünk két, már jóval könnyebb, és kezelhetőbb egyenletre esik szét:

$$j\hbar\frac{1}{\phi}\frac{d\phi}{dt} = E,$$

illetve

$$\frac{1}{\Psi} \mathbf{H} \Psi = E.$$

Az előbbi egyenletet kicsit rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\phi}{dt} = -j \frac{E}{\hbar} \phi,$$

aminek a megoldása:

$$\phi(t) = e^{-j \frac{E}{\hbar} t}.$$

A megoldásban a C konstanstól eltekintünk, azt a teljes megoldásnál fogjuk meghatározni.

3.7.2. Az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet

A másik egyszerűsített egyenletet pedig átrendezve

$$\mathbf{H} \Psi = E \Psi.$$

Ez tehát az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet. Ehhez az egyenlethez analitikus módon is eljuthatunk, ha egy sima Helmholtz-féle hullámegyenletből indulunk ki, amely a következő alakú:

$$\nabla^2 \Psi = -k^2 \Psi,$$

ahol $\nabla^2 = \Delta$.

A $\Psi(\mathbf{r}, t)$ függvényre mindig igaz az alábbi összefüggés:

$$\int_V \Psi^* \Psi dV = 1,$$

hiszen a

$$\Psi^* \Psi = |\Psi|^2$$

jelentése valószínűség, és V pedig az adott konfigurációs tér, így hát annak a valószínűségnek, hogy a konfigurációs térben van az elektron egynek kell lennie.

A Ψ hullámfüggvény jellemzi a rendszert, és egy komplex értékű függvény, tehát Ψ^* függvény ennek konjugáltja.

3.8. A kvantummechanika Schrödinger-féle posztulátumai

Schrödinger posztulátumai a következők:

1. A fizikai rendszer állapota a hullámfüggvény (Ψ). A hullámfüggvény a konfigurációs tér $q_1, q_2, q_3, \dots, q_f$ koordinátáitól és az időtől függő, egyértékű, komplex függvény, mely folytonos és analitikus.

2. Annak a valószínűsége, hogy a részecskét a konfigurációs tér egy dV térfogatában találjuk

$$\Psi\Psi^*dV,$$

amiből pedig következik, hogy

$$\int_{\mathcal{R}} \Psi\Psi^*dV = 1,$$

azaz Ψ négyzetesen integrálható függvénye a konfigurációs tér változóinak.

3. Minden megfigyelhető L mennyiséghez egy $\mathbf{L}$ operátor rendelünk. Amennyiben egy makroszkopikus műszerrel mérjük az L fizikai mennyiséget, akkor a mérés eredménye mindig a $\mathbf{L}$ operátor egyik sajátértéke lesz, ahol

$$\mathbf{L}\Psi = \lambda\Psi.$$

4. Amennyiben a fizikai rendszer állapot Ψ és L mennyiséget mérjük $\mathbf{L}$ adott operátorral, akkor a mérés várható értéke

$$\langle L \rangle = \int_V \Psi^*\mathbf{L}\Psi dV,$$

szórása pedig

$$\Delta L = \sqrt{\langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2}.$$

5. A zárt rendszer hullámfüggvénye az időfüggő Schrödinger-egyenlet szerint fejlődik:

$$\mathbf{H}\Psi = j\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

3.9. A posztulátumok következményei

A fenti Schrödinger-posztulátumoknak két következményét tárgyaljuk a fejezetben:

- Heisenberg-féle határozatlansági reláció
- Ehrenfest-tétel

Azonban mielőtt ezeket diszkutálnánk, előbb vizsgáljuk meg a kvantummechanikai méréseket.

3.9.1. Kvantummechanikai mérés

Minden megfigyelhető fizikai mennyiséghez (L) egy operátort rendelünk, legyen ez $\mathbf{L}$. Amennyiben egy makroszkopikus műszerrel mérjük ezt a mennyiséget, azt tapasztaljuk, hogy a mérés eredménye mindig, és minden körülmények között az $\mathbf{L}$ operátor egyik sajátértéke lesz

$$\mathbf{L}\Psi = \lambda\Psi,$$

ahol λ az $\mathbf{L}$ operátor sajátértéke.

Fontos megjegyezni, hogy a klasszikus dinamikai mennyiségek a hely és lendület koordináták függvényei:

– Kinetikus energia:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2m}p.$$

– Lendület:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

– Energia:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2m_i} \langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i \rangle + E_{pot}$$

Úgy rendelünk operátorokat dinamikai mennyiségekhez, hogy a klasszikus kifejezésekbe behelyettesítjük a hely és a lendület operátorait.

Az alábbiakban pár példát találhatunk:

1. Helykoordináta:

$$\mathbf{x} \rightarrow x : \mathbf{x}\Psi = x\Psi.$$

2. Lendület:

$$p_x = m\dot{x} \rightarrow \mathbf{p} = -j\hbar \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \mathbf{p} = -j\hbar \nabla \rightarrow \mathbf{p}\Psi = -j\hbar \nabla \Psi.$$

3. Lendület:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = -j\hbar(\mathbf{r} \times \nabla).$$

4. Összenergia:

$$E = E_{kin} + E_{pot} \rightarrow \mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + E_{pot}.$$

A negyedik pontban bemutatott $\mathbf{H}$ operátor a Hamilton-operátor.

3.9.2. A mérés várható értéke:

Ha a fizikai rendszer állapota Ψ , és az L mennyiséget figyeljük, mely az $\mathbf{L}$ operátorral írható le, akkor L várható értéke a következő:

$$\langle L \rangle = \int_V \Psi^* \mathbf{L} \Psi dV.$$

3.9.3. A mérés szórása

A fenti feltételek adottak, tehát a rendszer állapota ugyancsak Ψ és L mennyiséget figyeljük, akkor ennek szórása - melyet ΔL -el jelölünk - megegyezik a következővel:

$$\Delta L = \sqrt{\langle L^2 \rangle - \langle L \rangle^2}.$$

3.9.4. A várható érték időbeli függése

Vegyük az előbb említett feltételeket tehát Ψ , L legyen adott. Vizsgáljuk a várható érték időbeni változását, és azt tapasztaljuk, hogy

$$\frac{d\langle L \rangle}{dt} = \frac{j}{\hbar} \int_V \Psi^* (\mathbf{H}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{H}) \Psi dV.$$

Ennek bizonyítása nem nehéz. Induljunk ki a várható érték definíciójából:

$$\langle L \rangle = \int_V \Psi^* \mathbf{L} \Psi dV,$$

majd vegyük mindkét oldal időszerinti deriváltját:

$$\frac{d\langle L \rangle}{dt} = \int_V \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \mathbf{L} \Psi + \Psi^* \mathbf{L} \frac{\partial \Psi}{\partial t} dV.$$

Ekkor a Schrödinger-egyenletet felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} \mathbf{H} \Psi,$$

illetve

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = \frac{j}{\hbar} (\mathbf{H} \Psi)^*,$$

amit visszahelyettesítve a várható értékről szóló egyenletbe és kihasználva, hogy az operátorok lineárisak:

$$\frac{d\langle L \rangle}{dt} = \frac{j}{\hbar} \int_V \Psi^* (\mathbf{H}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{H}) \Psi dV,$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$(\mathbf{H}\Psi)^* = \Psi^* \mathbf{H}^* = \Psi^* \mathbf{H}.$$

Az integrandusban található operátorszorzatok különbségét úgy hívjuk, hogy kommutátor, és jelölése $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$, ahol $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ lineáris operátorok. Amennyiben

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A} = 0,$$

úgy a két operátor kommutál, tehát a szorzásban, ha felcseréljük őket egymással, nem változtatunk az eredményen.

Egy mérés várható értéke akkor marad állandó az időben, ha a mérendő L mennyiség $\mathbf{L}$ operátora kommutál a $\mathbf{H}$ Hamilton-operátorral.

3.9.5. Ehrenfest-tétel

A tétel kimondja, hogy a lendület várható értékének idő szerinti deriváltja egyenlő az erő várható értékével.

Ennek bizonyítása mechanikus. Vegyük egy részecske lendületének $\mathbf{p}$ operátorát, és tegyük fel, hogy az erőter a potenciáljával adott. Ekkor az előbb bemutatott összefüggés a lendület várható értékének változására a következő:

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{j}{\hbar} \int_V \Psi^* [\mathbf{H}, \mathbf{p}] \Psi dV$$

Mivel ismerjük a Hamilton-operátort

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E_{pot},$$

és a lendület operátorát

$$\mathbf{p} = -j\hbar \nabla,$$

ezért kiszámíthatjuk a $[\mathbf{H}, \mathbf{p}]$ -t:

$$[\mathbf{H}, \mathbf{p}] = -\frac{\hbar}{j} \nabla E_{pot}.$$

Ezután, ha ezt visszahelyettesítjük az lendület várható értékének változásáról szóló egyenletbe, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{j}{\hbar} \int_V \Psi^* \left(-\frac{\hbar}{j} \nabla E_{pot}\right) \Psi dV = \int_V \Psi^* (-\nabla E_{pot}) \Psi dV = \langle -\nabla E_{pot} \rangle = \langle F \rangle.$$

Ez egy elég szoros kapcsolat a Newton-mozgásegyenlettel.

3.9.6. Heisenberg-féle határozatlansági reláció

Vegyünk egy L és egy M fizikai mennyiséget, rendre $\mathbf{L}$ és $\mathbf{M}$ operátorokkal. Vegyük továbbá ezek kommutátorát, $[\mathbf{L}, \mathbf{M}]$ -et. Ezt a két mennyiséget most egyszerre figyeljük meg.

A két mennyiség egyidejű megfigyelésének szórása eleget tesz a következő egyenlőtlenségnek:

$$\Delta L \Delta M \geq \left| \frac{1}{2} \int_V \Psi^* [\mathbf{L}, \mathbf{M}] \Psi dV \right|.$$

Ez a Heisenberg-féle határozatlansági reláció, mely kimondja, hogy ha két fizikai mennyiség operátorai nem cserélhetők fel, akkor a két mennyiség egyidejű megfigyelése pontosságának objektív korlátja van.

Ez azt jelenti, hogyha az egyik mennyiség szórását csökkentjük, akkor a másik mennyiség szórása növekedni fog, és fordítva.

Amennyiben a két fizikai mennyiség operátorai kommutálnak, úgy nincs korlátja a megfigyelés pontosságának.

3.9.7. A hely és lendület együttes mérésének pontossági korlátja

Vegyünk egy helykoordinátát (x), és az azonos irányú p_x lendületkoordinátát. Számoljuk ki először a hely ($\mathbf{x}$) és lendület ($\mathbf{p}$) operátorok hatását a Ψ hullámfüggvényre:

$$(\mathbf{p}_x \mathbf{x} - \mathbf{x} \mathbf{p}_x) \Psi(x, y, z) = \frac{\hbar}{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x \Psi) - x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right).$$

Ebből pedig látható, hogy

$$[\mathbf{p}_x, \mathbf{x}] = \frac{\hbar}{j}.$$

Ezek után, ha helyettesítünk az eredeti egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$\Delta x \Delta p_x \geq \left| \frac{1}{2} \int_V \Psi^* [\mathbf{p}_x, \mathbf{x}] \Psi dV \right| = \left| \frac{1}{2} \int_V \Psi^* \frac{\hbar}{j} \Psi dV \right| = \frac{\hbar}{2} \left| \int_V \Psi^* \Psi dV \right| = \frac{\hbar}{2}$$

Tehát a helykoordináta és a vele azonos irányú lendületkoordináta mérésének pontosságára vonatkozó reláció a következő:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}.$$

3.10. Az elektron spektruma

Alapvetően kétféle elektron létezik, kötött és szabad elektron. A kötött (például egy potenciáldobozba zárt elektron) egy állóhullám, míg a szabad elektron hullámcsomagként viselkedik.

A hullámfüggvény meghatározásához meg kell oldanunk a Schrödinger-egyenletet. Először az egyszerűbb esettel foglalkozunk, vagyis amikor az elektron kötött. A doboz, mint erőter a következő potenciállal írható le

$$E_{pot}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in (0, a) \\ \infty & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor a változók szétválasztása miatt tudjuk, hogy

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) \phi(t)$$

és

$$\phi(t) = e^{-j \frac{E}{\hbar} t}.$$

Az időfüggetlen Schrödinger-egyenlet a doboz belsejében a következő:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = E \Psi.$$

Ennek a megoldása

$$\Psi = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

A peremfeltételek ($\Psi(0) = \Psi(a) = 0$) felhasználásával meghatározhatjuk a konstansokat

$$\Psi(0) = 0 = B,$$

illetve

$$\Psi(a) = A \sin(ka) \rightarrow k = \frac{n\pi}{a}, n = 1, 2, \dots$$

Ekkor a Ψ_n felírható a következőképp:

$$\Psi_n = A_n \sin(k_n x),$$

ahol

$$k_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Ezután a ϕ és Ψ függvények szorzataként előáll a $\Psi(x, t)$ hullámfüggvény:

$$\Psi(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-j\frac{E}{\hbar}t}.$$

A_n -t úgy határozzuk meg, hogy a hullámfüggvény abszolútértékének konfigurációs téren vett integrálja egyet kell adjon:

$$\int_0^a A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{A^2}{2} \int_0^a 1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a}x\right) dx = \frac{A^2}{2} \left[x - a \frac{\sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right)}{2n\pi} \right]_0^a = \frac{A^2}{2} a = 1.$$

Az egyenletet rendezve pedig megkapjuk az A együtthatót:

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}}.$$

Tehát a $\Psi_n(x, t)$ megoldás:

$$\Psi_n(x, t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-j\frac{E}{\hbar}t} & \text{ha } x \in (0, a) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

3.10.1. A dobozba zárt elektron megengedett energiái

Az energiát felírhatjuk úgy, mint a kinetikus és potenciális energia összegeként:

$$E = E_{kin} + E_{pot}.$$

Mivel a dobozban a potenciális energia zérus, ezért az elektron lehetséges energiaszintjei meg fognak egyezni az elektron kinetikus energiáival, azaz:

$$E_n = E_{n_{kin}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{h^2}{8ma^2} n^2, n = 1, 2, \dots$$

A legkisebb energiaszint $n=1$ esetén van

$$E_1 = \frac{h^2}{8ma^2}, \quad (16)$$

és a további kvantált energiák ennek n^2 -szeresei.

Magától értetődően az n . energiaszinthez az n . hullámfüggvény tartozik.

3.10.2. Háromdimenziós dobozba zárt elektron hullámfüggvényei és energiaértékei

A Ψ hullámfüggvény meghatározásához meg kell oldanunk a Schrödinger-egyenletet, amit továbbra is a változók szétválasztása módszerrel tehetünk meg legkönnyebben, hisz ekkor tudjuk, hogy

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r})\phi(t),$$

és

$$\phi(t) = e^{-j\frac{E}{\hbar}t}.$$

Mielőtt azonban rátérnénk a $\Psi(\mathbf{r})$ meghatározására, adjuk meg a konfigurációs téren a potenciált:

$$E_{pot}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in (0, a), y \in (0, b), z \in (0, c) \\ \infty & \text{különben} \end{cases}$$

Innetől csak az időfüggetlen Schrödinger-egyenletet kell megoldanunk, ami a következő:

$$\mathbf{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = E\Psi.$$

Ekkor továbbra is a változók szétválasztása módszerét használva felírhatjuk $\Psi(\mathbf{r})$ -t a következő szorzatalakban:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z).$$

Amennyiben erre elvégezzük a második differenciálképzést, azt kapjuk, hogy

$$\Delta(\Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z)) = \Psi_2(y)\Psi_3(z)\frac{d^2\Psi_1(x)}{dx^2} + \Psi_1(x)\Psi_3(z)\frac{d^2\Psi_2(y)}{dy^2} + \Psi_1(x)\Psi_2(y)\frac{d^2\Psi_3(z)}{dz^2}.$$

Ezek után, ha a kapott időfüggetlen Schrödinger-egyenletbe behelyettesítjük az imént kapott kifejezést, és végigosztunk $\Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z)$ -el, illetve rendezzük az egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\Psi_1(x)}\frac{d^2\Psi_1(x)}{dx^2} + \frac{1}{\Psi_2(y)}\frac{d^2\Psi_2(y)}{dy^2} + \frac{1}{\Psi_3(z)}\frac{d^2\Psi_3(z)}{dz^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}E.$$

Ezután bontsuk az E -t három összetevőre

$$E = E_1 + E_2 + E_3,$$

és akkor kaptunk 3 különálló, egy-dimenziós, időfüggetlen *Schrödinger-egyenletet*

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi_1(x)}{dx^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2}E_1\Psi_1(x) \\ \frac{d^2\Psi_2(y)}{dy^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2}E_2\Psi_2(y) \\ \frac{d^2\Psi_3(z)}{dz^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2}E_3\Psi_3(z) \end{aligned}$$

Ezen egyeletek megoldása(i) rendre:

$$\Psi_1(x) = A \sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right), n_1 = 1, 2, \dots$$

$$\Psi_2(y) = B \sin\left(\frac{n_2\pi}{b}y\right), n_2 = 1, 2, \dots$$

$$\Psi_3(z) = C \sin\left(\frac{n_3\pi}{c}z\right), n_3 = 1, 2, \dots$$

Tehát ebből felírhatjuk ezek szorzatával a $\Psi(\mathbf{r})$ -t:

$$\Psi(r) = \Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z) = D \sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n_2\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n_3\pi}{c}z\right).$$

D meghatározása a következő egyenletből történik:

$$D^2 \int_0^a \int_0^b \int_0^c \sin^2\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{n_2\pi}{b}y\right) \sin^2\left(\frac{n_3\pi}{c}z\right) dz dy dx = 1.$$

Mivel az integrandus változók szerint rendezhető (hiszen szeparábilisen elvégezhető a hármas integrál külön-külön, de nem szorzatonként felírva), így az integrál kiszámítása meg-egyezik azzal, mintha 3 integrál szorzataként írnánk fel, amikből az egyik:

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^a 1 - \cos\left(\frac{2n_1\pi}{a}x\right) dx = \frac{1}{2} \left[x - a \frac{\sin\left(\frac{2n_1\pi}{a}x\right)}{2n_1\pi} \right]_0^a = \frac{1}{2}a,$$

és ezt felhasználva, és tudván azt, hogy a másik két integrál is teljesen hasonló ehhez, azt kapjuk, hogy:

$$\int_0^b \sin^2\left(\frac{n_2\pi}{b}y\right) dy = \frac{1}{2}b$$

illetve

$$\int_0^c \sin^2\left(\frac{n_3\pi}{c}z\right) dz = \frac{1}{2}c.$$

Ekkor mivel tudjuk, hogy a teljes integrál az előző három integrál szorzata, ezért azt kapjuk ezeket behelyettesítve, hogy:

$$D^2 \frac{1}{8} abc = 1,$$

amiből megkapjuk a D -t a

$$D = \sqrt{\frac{8}{abc}}$$

alakban.

Mindezek után tehát a háromdimenziós dobozba zárt elektron hullámfüggvénye(i):

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n_2\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n_3\pi}{c}z\right) e^{-j \frac{E_{n_1 n_2 n_3}}{\hbar} t},$$

ahol

$$E_{n_1 n_2 n_3} = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right)$$

az elektron megengedett energiaértékei.

A hullámfüggvény csak a dobozban egyezik meg a kiszámolttal, a dobozon kívül természetesen azonosan zérus.

3.10.3. Elfajuló stacionárius sajátállapotok

Tegyük fel, hogy $a=b=c$ (tehát a doboz szimmetrikus, méghozzá egy kocka). Ekkor az energiaértékek így alakulnak:

$$E_{n_1 n_2 n_3} = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{h^2}{8ma^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

Az elektron állapotát a sajátfüggvény határozza meg. Ez esetben azonban egynél több sajátfüggvény is tartozhat egy energiaszinthez (sajátértékhez). A fent említett konfigurációs téren

- a "ground-state" állapot E_1 energiájához $(1,1,1)$ kvantumszámú sajátfüggvény tartozik,
- a következő $E_2 = 2E_1$ energiaszinthez három sajátfüggvény tartozik: $(2,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$,
- ...
- az $E_6 = \frac{14}{3}E_1$ energiaszinthez hat különböző sajátfüggvény tartozik: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$.

Amennyiben az elektronra mágneses tér is hat (ez szinte mindig így van), akkor minden (n_1, n_2, n_3) kvantumszám hármashoz még két különböző "spin-kvantumszámú" sajátfüggvény tartozik $+\frac{1}{2}$ és $-\frac{1}{2}$:

$$\Psi_{+\frac{1}{2}} = \Psi_{n_1 n_2 n_3} \Psi_s \left(+\frac{1}{2} \right),$$

illetve

$$\Psi_{-\frac{1}{2}} = \Psi_{n_1 n_2 n_3} \Psi_s \left(-\frac{1}{2} \right)$$

Így minden energiaszinthez kétszer annyi sajátállapot tartozik.

Ezek alapján a Ψ sajátfüggvényekből a spektrum kiszámítható, ha Fourier-transzformáljuk a hullámfüggvényeket.

3.10.4. Több elektron a dobozban

Tegyük fel, hogy ezután nem csak egy elektront vizsgálunk a dobozban, hanem "bedobunk" egy másikat is. Akkor a már megismertetett energiaszintek egyikére fog kerülni, és hullámfüggvénye olyan lesz, hogy ne egyezzen a már vele azonos energiaszinten lévő elektron hullámfüggvényével (amennyiben van vele azonos energiaszinten lévő elektron).

Az elektronok a Hund-szabály és Pauli-elv szerint próbálnak rendeződni, tehát nincs két olyan elektron, amelynek a hullámfüggvénye megegyezik, és törekednek a minimális energiaszintre való helyezkedésre, továbbá igyekeznek párosítatlanul maradni.

3.10.5. Szabad elektron. A hullámcsomag

Vegyünk egy erőmentes teret - tehát ne "zárjuk be" az elektront egy dobozba, vagy gömbbe, vagy bármilyen más zárt térrészbe, és ne hassunk rá semmilyen erővel. Ekkor a Schrödinger-egyenlet az alábbi formát ölti:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi = E \Psi.$$

Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Psi = -k^2 \Psi,$$

ahol

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE},$$

tehát

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m} k^2.$$

A Schrödinger-egyenlet megoldásai:

$$\Psi_k = A_k e^{jkx}.$$

A $\Psi(x, t)$ -t megkaphatjuk, ha kiszámoljuk az alábbi integrált:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_k e^{j\left(kx - \frac{E}{\hbar}t\right)} dk,$$

Ez lesz a szabad elektron hullámfüggvénye.

Az A_k hullámcsomag meghatározható a következőképp is:

$$A(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t) e^{-j\left(kx - \frac{E}{\hbar}t\right)} dx.$$

Vegyük észre, hogy A_k és Ψ egymásnak Fourier-transzformáltjai!

3.10.6. Hullámcsomag a helykoordinátákkal és lendületkoordinátákkal

Tegyük fel, hogy a hullámfüggvényünk az alábbi alakú ($t=0$ pillanatban):

$$\Psi(\mathbf{r}, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{j \frac{p_0}{\hbar} x} & \text{ha } x \in (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Amennyiben ezt a függvényt Fourier-transzformáljuk, megkapjuk az $A(k, t)$ realizációt. Ekkor, felhasználjuk, hogy

$$p = \hbar k \rightarrow k = \frac{p}{\hbar},$$

és ezt helyettesítve egy csak lendülettől (és időtől) függő hullámcsomagot kapunk.

A hely- és lendületkoordinátákkal megadott hullámcsomagot a Fourier-transzformáció köti össze. Figyelni kell azonban a lendületkoordinátákkal adott reprezentációból helykoordinátákra való áttérésnél, ugyanis

$$dp = \hbar dk \rightarrow dk = \frac{dp}{\hbar},$$

továbbá arra is, hogy a helyettesítési integrálás miatt a momentum szerinti integráláskor az integrálási határok is változnak

$$-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \rightarrow p_0 - \frac{\hbar}{a} < p < p_0 + \frac{\hbar}{a}$$

Amennyiben $\Delta x = \frac{a}{2}$ és $\Delta p = \frac{\hbar}{a}$ választással élünk, akkor megkapjuk a Heisenberg-féle határozatlansági relációt a hely és momentumkoordináták operátora esetében:

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (17)$$

A hullámcsomagot különböző hullámszámú (lendületű) komponensekből állítjuk össze.

3.11. Hidrogén és hidrogénszerű atomok

Egy pozitív töltésű atommag környezetében az egy-elektron problémának egzakt, analitikus megoldása van. Az elektron az atommag gömbszimmetrikus Coulomb erőterében mozog, tehát a potenciál itt

$$E_{pot} = q_e U = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

A Schrödinger-egyenlet így a következőképpen alakul:

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi = 0.$$

Az E -re és Ψ -re vonatkozó sajátérték problémát most tekintsük gömbi koordinátákkal, mivel

$$\Delta\Psi = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi},$$

ahol

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

illetve

$$\frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi} = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Így pedig Ψ redukálható három darab közönséges differenciálegyenlet szorzatára, azaz

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)\vartheta(\vartheta).$$

Ezek után pedig a három különálló differenciálegyenlet a következő:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\vartheta}\frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} &= -m^2 \\ \frac{1}{\vartheta}\sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{d\vartheta}\right) + \lambda\sin^2\vartheta &= m^2 \\ \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2}r^2\left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right) - \frac{\lambda}{r^2}\right]R &= 0.\end{aligned}$$

Ezek megoldásai rendre

$$\begin{aligned}\Phi_m(\varphi) &= e^{jm\varphi} \\ \vartheta_l^m(\vartheta) &= P_l^m(\cos\vartheta) \\ R_{nl}(\rho) &= A_{nl}e^{-\rho}(2\rho)^l L_{n+1}^{2l+1}(2\rho),\end{aligned}$$

ahol

$$\rho = \frac{Zr}{a_0},$$

és

$$a_0 = \frac{\epsilon_0\hbar^2}{\pi me^2} \cong 0.0528nm.$$

Az n . energiaszint

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0\hbar^2n^2}, n = 1, 2, ..$$

Ezekből tehát a teljes hullámfüggvény, azaz a Schrödinger-egyenlet megoldása:

$$\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi) = Ae^{-\rho}(2\rho)^l L_{n+1}^{2l+1}(2\rho)P_l^m(\cos\vartheta)e^{jm\varphi}.$$

A konstans meghatározható az alábbi formulával:

$$A \int_0^\infty r^2 \left[\int_0^\pi \sin\vartheta \left(\int_0^{2\pi} \Psi_{nlm}^* \Psi_{nlm} d\varphi \right) \right] dr = 1$$

Egy n atomszámhoz

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

különböző sajátfüggvény tartozik, mert l 0-tól n -ig vehet fel értékeket, míg m $2l+1$ értéket vehet fel, hiszen $|m| \leq l$.

Ezen kívül minden n, l, m kvantumszám-hármashoz két-két spin kvantumszám is tartozik

$$\begin{aligned} \Psi_{+\frac{1}{2}} &= \Psi_{nlm} \Psi\left(+\frac{1}{2}\right) \\ \Psi_{-\frac{1}{2}} &= \Psi_{nlm} \Psi\left(-\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Így tehát az összes lehetőséget még dupláznunk kell, azaz összesen $2n^2$ a lehetséges sajátállapotok száma 1-1 energiaszinthez.

3.12. A testek kvantummechanikája

A testek atommagokból és elektronokból épülnek fel. Ahhoz, hogy ezeket általánosan tudjuk vizsgálni, előbb az egy-elektron problémát kell megoldanunk több atommag esetén. Ezt úgy tudjuk, hogy képzeletben "kiszivattyúzzuk" az elektronokat az anyagból, majd egyesével tesszük azokat vissza, így elérve az egyensúlyi állapotot.

Az atomoknak diszkrét energia szintjei vannak, de ezek felhasadnak s, p, d, f pályákra, amelyeket az elektronok fokozatosan be tudnak tölteni. Amennyiben egy kristály N darab Z rendszámú atomból épül fel, akkor a kettő szorzata adja meg a kristályban lévő elektronok számát. Fontos azonban megjegyezni, hogy $T=0K$ -en igaz csak, hogy minden energiaszint a Fermi-szintnek megfelelően van betöltve, egyébként ez nem igaz. Amint nem abszolút nulla hőmérsékleten vagyunk, úgy az elektronok a Fermi-Dirac statisztika szerint töltik be az elektronpályákat.

"Soft-matter"-ről, vagyis "lágytestről" akkor beszélhetünk, ha egy anyag könnyen változtatja formáját, fizikai tulajdonságait például hőingadozásra, vagy hőközlésre. Ezek általában folyékony anyagok, folyékony kristályok, membránok stb. A testek másik nagy halmaza a szilárdtestek.

4. Statisztikus és szilárdtest fizika

Mint az előző fejezet végén láthattuk a való életben, és a mérnöki gyakorlatban nem csupán egy-elektron problémák vannak, nem potenciáldoboz van, és nem egyszerű körülmény. Ezek leírását nagyban segíti a statisztikus fizika, ahol N db részecske (elektron) viselkedését írjuk le.

4.1. Mikro- és makroállapotok

Tegyük fel, hogy egy rendszer hullámfüggvény Ψ , akkor a rendszer Ψ mikroállapotban van. Általában viszont az energiaszintek elfajulóak, tehát egy E energiaszinten több különböző hullámfüggvény, így mikroállapot van.

Egy testben az elektronok különböző energiákon helyezkednek el. Így az $N(E)$ jelölés a rendszer markoállapotait adja meg. Az energia-sajátértékeket E_n -nel, a mikroállapotok számát Z_n -nel, az elektronpopulációkat pedig N_n -nel jelöljük.

Általánosan elmondható, hogy zárt rendszer esetén az elektronok száma és a rendszer összenergiája állandó, vagyis

$$\sum_i N_i = N$$
$$\sum_i N_i E_i = E_0.$$

4.2. A statisztikus fizika posztulátumai

A zárt rendszerre a következők igazak:

- Minden mikroállapot egyformán valószínű.
- A rendszer "gyorsan" konvergál a legvalószínűbb makroállapothoz. Ez az egyensúly.
- A makroállapot valószínűsége arányos az őt megvalósító mikroállapotok számával.

4.3. Fermionok, bozonok és megkülönböztethető testek

Először is nézzük, hogy a fermionok, bozonok és a megkülönböztethető testek között mi az eltérés.

Vegyünk egy azonos részecskékből (pl. elektronok) álló rendszert. Két azonos részecske esetén a sajátérték-probléma megoldható, és ha felcseréljük egymással a két részecskét, akkor a sajátértékek nem változnak, tehát a Ψ hullámfüggvények közötti eltérést csak egy állandóval való szorzás jelentheti. Tegyük fel, hogy ez az állandó a^2 , és legyen $a^2=1$, azaz létezik egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus hullámfüggvény-pár, hiszen $a_1=1$, illetve $a_2=-1$. A részecske megfigyelései azonban csak $\Psi^*\Psi$ -től függnék.

Ez azt jelenti, hogy a részecskék felcserélése nem változtat a mérés eredményén, ami a klasszikus fizikához képest egy lényeges különbség. Abban ugyanis minden egyes részecske

”történetét” egymástól függetlenül végigkísérhetjük, ám a kvantummechanikában ez nincs így.

Amennyiben két részecske hullámfüggvénye átlapolódott, úgy a két részecske már megkülönböztethetetlen lesz. A természetben kétféle részecske létezik: bozonok és fermionok. A bozonok állapotfüggvénye szimmetrikus, és a spinkvantumszámuk egész szám $(0, \pm 1)$, míg a fermionok állapotfüggvénye antiszimmetrikus, és spinkvantumszámuk $\pm \frac{1}{2}$. Fermionok közé tartoznak például az elektronok, míg a bozonok közé a fotonok.

Ezek után pedig nézzük meg, hogy a bozonok, fermionok és megkülönböztethetetlen testek makroállapotait előállító mikroállapotok számát hogy kaphatjuk meg

A fermionok mikroállapotainak számát a Fermi-Dirac statisztika írja le. A Z mikroállapotban N db fermion $\binom{Z}{N}$ féleképpen lehet. Egy makroállapotot realizáló mikroállapotok száma: $N_i(E_i)$. Ebből a statisztikát a

$$w_{FD} = \prod_i \binom{Z}{N} = \prod_i \frac{Z_i!}{N_i!(Z_i - N_i)!}$$

kifejezés adja meg, ami tulajdonképpen egy ismétlés nélküli kombináció.

A bozonok makroállapotait előállító mikroállapotok számát a Bose-Einstein statisztika írja le. Az $N_1, N_2, \dots, N_i, \dots$ eloszlást megvalósító mikroállapotok számát egy ismétléses kombináció írja le, amely a következő:

$$w_{BE} = \prod_i \binom{N_i + Z_i - 1}{N_i} = \prod_i \frac{(N_i + Z_i - 1)!}{N_i!(Z_i - 1)!}.$$

A megkülönböztethető testek statisztikáját a Maxwell-Boltzmann statisztika írja le, ezt szokás klasszikus statisztikának is nevezni:

$$w_{MB} = \frac{N!}{\prod_i N_i!} \prod_i Z_i^{N_i}.$$

4.3.1. Fermionok egyensúlyi állapota

A fermionok egyensúlyi állapotára beláthatjuk, hogy a legvalószínűbb makroállapotban lesz az egyensúly. Induljunk ki a Fermi-Dirac statisztikából, vegyük annak természetes alapú logaritmusát, hiszen az eredeti statisztika maximuma ugyanott lesz, ahol a logaritmusának maximuma. Ekkor, ha alkalmazzuk a logaritmus azonosságait, a következőt kapjuk:

$$\ln w_{FD} = \sum_i (\ln Z_i! - \ln (Z_i - N_i)! - \ln N_i!).$$

Mielőtt azonban továbbmennénk, használjuk fel a Stirling-közelítést, miszerint

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

ha n elég nagy. Ebből pedig következik, hogy

$$\ln n! \approx n \ln \frac{n}{e} = n \ln n - n \approx n \ln n.$$

Ezt helyettesítve a statisztika logaritmuásba az

$$\ln w_{FD} = \sum_i \left(Z_i \ln Z_i - (Z_i - N_i) \ln (Z_i - N_i) - N_i \ln N_i \right)$$

összefüggéshez jutunk. A függvénynek pedig azt a maximumát keressük, amely eleget tesz az állandósági feltételeknek, azaz annak, hogy a zárt rendszer összenergiája és elektronjainak száma állandó.

Vezessük be α és β paramétereket a következőképpen:

$$\ln w = \ln w + \alpha \left(N - \sum_i N_i \right) + \beta \left(E_0 - \sum_i N_i E_i \right).$$

Ekkor, ha alkalmazzuk a Lagrange-multiplikátor módszerét, a szélsőérték-probléma megoldása:

$$\frac{\partial}{\partial N_i} \left[\ln w + \alpha \left(N - \sum_i N_i \right) + \beta \left(E_0 - \sum_i N_i E_i \right) \right] = 0, i = 1, 2, \dots$$

amiből pedig következik, hogy

$$\frac{\partial}{\partial N_i} \ln w - \alpha - \beta E_i = 0, i = 1, 2, \dots$$

A statisztika logaritmusának N_i szerinti parciális deriváltjai a következők:

$$\frac{\partial}{\partial N_i} \ln w = \ln (Z_i - N_i) - \ln N_i,$$

és az egyenletünk egzakt formájában:

$$\ln \frac{Z_i - N_i}{N_i} - \alpha - \beta E_i = 0$$

alakot ölti.

Ebből, ha kifejezzük N_i -t, azt kapjuk, hogy

$$N_i^{FD} = \frac{Z_i}{e^{\alpha + \beta E_i} + 1}.$$

4.3.2. Fermi-függvény

Az eddigiek ismeretében meghatározhatjuk a Fermi-függvényt is. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\beta = \frac{1}{k_b T}$$

$$\alpha = -\frac{E_F}{k_b T},$$

ahol k_b a Boltzmann-állandó, melynek értéke $1.38 \cdot 10^{-23} \frac{Ws}{K}$, T az abszolút hőmérséklet, és E_F a Fermi (energia)szint. Ezekkel a jelölésekkel élve az N_i -re vonatkozó függvényünk a következő:

$$N_i^{FD} = \frac{Z_i}{e^{\alpha + \beta E_i} + 1} = Z_i \frac{1}{e^{\frac{E_i - E_F}{kT}} + 1},$$

és ez a Fermi-függvény. Amennyiben abszolút $0K$ -en vagyunk, úgy a függvény két értéket vehet fel:

$$f_{T=0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{ha } E < E_F \\ 0 & \text{ha } E > E_F \end{cases}$$

4.4. Az elektronok makroállapota

Vegyünk először a legegyszerűbb esetet, amikor $T=0K$, és tegyük fel, hogy az energiaszint alacsonyabban van, mint a Fermi szint, tehát $E < E_F$. Ekkor az elektronok számát - amelyekre teljesül az előbbi feltétel - az

$$N(E) = na^3 = \frac{\pi}{3} \frac{1}{E_0^{\frac{3}{2}}} E^{\frac{3}{2}}$$

összefüggés adja meg. Ennek tudatában pedig ki tudjuk számolni, hogy mennyi elektron van az E és $E+dE$ energiaszintek között:

$$dN = N(E + dE) - N(E) = \frac{dN}{dE} dE = \frac{\pi}{2E_0^{\frac{3}{2}}} E^{\frac{1}{2}} dE.$$

Most pedig tekintsük azt az esetet, amikor a hőmérséklet nem abszolút nulla fok. Ekkor a fenti összefüggés változik

$$dN = \rho(E) dE = \frac{\pi}{2E_0^{\frac{3}{2}}} \frac{E^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1} dE,$$

majd, ha felhasználjuk, hogy $E_0 = \frac{h^2}{8ma^2}$, akkor a kifejezésünket a következő alakban is írhatjuk:

$$dN = \frac{4\pi V (2m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{E^{\frac{1}{2}}}{e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1} dE.$$

A fent definiált ρ sűrűségfüggvényt más alakokban is írhatjuk. A Fermi-Dirac statisztikának ezen kívül két másik sűrűségfüggvénye van. Az egyik az elektronok eloszlását adja meg a sebességkomponensek függvényében, azaz

$$\rho(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = 2V \left(\frac{m}{h} \right)^3 \frac{1}{e^{\frac{E - E_F}{kT}} + 1} dv_x dv_y dv_z,$$

míg a másik a v és $v+dv$ közé eső sebességű elektronok számát adja meg:

$$dN = \rho(v)dv = 8\pi V \left(\frac{m}{h}\right)^3 v^2 \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} dv.$$

Ezekből pedig látható, hogy a makroállapotok száma nem más, mint a mikroállapotok sűrűségének és a betöltés valószínűségének a szorzata, ahol a betöltés valószínűsége a Fermi-függvény, míg a mikroállapotok sűrűségét háromféle módon is megadhatjuk.

4.5. Sommerfeld-féle kádmodell

Vegyünk egy ideális vezetőt. A vezetőnek a vezetési és a vegyérték sávja közel van egymáshoz (vagy már épp átlapolódik), és valencia sávját betöltik az elektronok. Tegyük fel, hogy abszolút nulla fokon vagyunk. Ekkor a kádmodell megmutatja, hogy az elektronok legnagyobb megtalálási valószínűsége, tehát a ρ maximuma a Fermi szintnél lesz, és odáig a valencia sáv alsó energiájától egészen a Fermi szintig növekedni fog a megtalálási valószínűség, viszont a Fermi szint feletti energiaszinteken nem lesz egyáltalán elektron.

Most tegyük fel, hogy nem abszolút nulla fokon vagyunk, tehát $T > 0$. Ekkor azonban észrevehetjük, hogy a sűrűségfüggvény torzul, és nem csak, hogy maximuma nem a Fermi szint közelében lesz, de ezen energiaszint feletti energiákon is képes elhelyezkedni az elektron.

Sommerfeld-féle kádmodell esetén a vezetők Fermi szintje $T = 0$ esetén kiszámolható, a következő formulával:

$$E_{F0} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Szigetelők esetében azonban a valenciasáv és a vezetési sáv közötti "rés", úgynevezett "gap" jelentős, így az elektronok nem tudnak "felugrani" a vezetési sávba, ezért nem vezetnek a szigetelők. Szigetelők esetén is meghatározható a Fermi szint, mégpedig a vezető és a valenciasáv energiaszintjének számtani átlagaként:

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2}.$$

Kilépési munkának nevezzük azt az W munkát, mely egy elektron a fémből a vákuumba történő eltávolításához szükséges. A kilépési munkát az elektronok a fémből való kirepülésük során végzik a pozitív többlettöltés és az elektronok között levő vonzási erők ellen. Ezenkívül a W munka az előzőleg kirepült és az éppen kirepülő elektron között fennálló taszító erők ellen is végződik, melyek a fém felülete körül "elektronfelhőt" hoznak létre. A kilépési munka a fém kémiai természetétől és a felületének állapotától függ. A kilépési munka a fém Fermi szintje (E_F) és a vákuumszint (E_B) közötti energiatávolság. Elektronvolt (eV) egységben adják meg.

4.6. Termikus elektronemisszió

Adott egy fém, amelyet külső forrással melegítünk. Ekkor egy bizonyos idő után a fémfelületről ki fognak lépni elektronok, ha teljesítik az ehhez szükséges feltételt. Először

is tegyük fel, hogy a fémfelület határa x tengelyre merőleges, és válasszunk ki ezen egy egységnyi felületet. Ahhoz, hogy az elektron kilépjen a fémből a következőnek kell teljesülnie:

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq E_B,$$

Ezt egy másodperc alatt a fémbe lévő összes v_x sebességkomponenssel rendelkező elektronok közül azok érik el, amelyek egy v_x hosszúságú hasáb belsejében vannak.

A felületegységen időegységenként kilépő elektronok számát jelöljük J_t -vel és

$$J_t = Ne. \quad (18)$$

Az elektronok kilépése a Sommerfeld-féle kádmodell alapján történik. Az elektronok száma egy egységnyi térfogatban

$$dN_{V=1} = \frac{2m^3}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} dv_x dv_y dv_z,$$

míg v_x térfogatban

$$dN_x = v_x \frac{2m^3}{h^3} \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} dv_x dv_y dv_z$$

Ezek után felírhatjuk a felületegységen időegység alatt kilépő elektronok számát az

$$N = \frac{2m^3}{h^3} \int_{v_{xB}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_x}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} dv_z dv_y dv_x = \frac{4\pi k_B^2 m}{h^3} T^2 e^{-\frac{E_B-E_F}{kT}}.$$

Ezt pedig (18)-ba behelyettesíthetjük és megkapjuk a Richardson-Dushman formulát:

$$J_t = \frac{4\pi k_B^2 m e}{h^3} T^2 e^{-\frac{E_B-E_F}{kT}}.$$

4.6.1. A katód működése

A katód is termikus elektronemisszióra épül. A fémet (például wolframszál) külső energiabefektetéssel melegítjük, amely hatására elektronokat emittál. Általában egy eszközben anóddal együtt "szerepel", amely a kibocsátott elektronokat abszorpcióval "befogadja". A legtöbb vákuumcsőben ezt alkalmazzák.

A katód melegíthető közvetlenül, vagy közvetetten. Előbbi esetben például egy wolframszál a filamentum, és ez közvetlenül forrósodik, és "lövi" ki magából az elektronokat, míg utóbbi esetben a filamentum nem maga a katód, az csak felhevített állapotban melegíti a katódot, ami ezáltal "kilövi" az elektronokat. Utóbbi mellett szól, hogy itt szeparálva van az elektromos potenciál a vákuum csőtől.

4.7. Kontakt potenciál

Illesszünk össze két, nem azonos fémet, legyen ez A és B . Ekkor azt vesszük észre, hogy feszültségszétkülönbség jön létre a két fém között. Ennek magyarázata az, hogy a sávméret

szerint a vezetőknek vagy a valencia, illetve vezetési sávja csak részben betöltött, vagy az, hogy a kettő átlapolódik. Mindkét esetben üres helyek vannak a sávokban. A fémek esetében ezek az elektronok (a vezetési sáv elektronjai) képesek elmozdulni. A két érintkező fém elektronjainak állapotai eltérnek egymástól, továbbá a szabad elektronok (vegyértékelektronok) száma is különbözik a fémekben, tehát az elektronkoncentráció is.

Mivel a közös határ az elektronok számára átjárható, ezért a nagyobb energiaszintű elektronokat tartalmazó fémből időegység alatt több elektron jut át, mint amennyi ellenkező irányból érkezik, ezért viszonylag rövid időn belül beáll egy egyensúly, amikor is mindkét fémbe azonos lesz az elektronkoncentráció.

Emiatt az elektronvándorlás miatt mérhető potenciálkülönbség a fém két vége között. Az értéke erősen hőmérsékletfüggő, és a két fémnek azonos hőmérsékletűnek kell lennie.

4.8. Sajátvezetésű félvezetők

A sajátvezetésű félvezetőket szokás szerkezet, vagy intrinsic félvezetőnek is hívni. Jellegzetességük, hogy $T=0$ esetén nincsenek ugyan elektronok a vezetési sávban, de amint melegítjük a fémét már lesznek, azonban ezek a valenciasávból jönnek, tehát maguk mögött "lyukakat" hagynak.

Nagyszámú vezetési sávbeli elektron és nagyszámú valencia sávbeli lyuk makro állapota hasonló a vezetők vezetési sávbeli állapotához.

A lyukak "virtuális" részecskék pozitív töltéssel és "effektív" tömeggel.

Az elektronállapotok sűrűségét a vezetési sávban a következő kifejezéssel tudjuk számolni:

$$g_n(E) = \frac{4\pi V (2m_{eff}^{(n)})^{\frac{3}{2}}}{h^3} \sqrt{E - E_{C0}} = K_n \sqrt{E - E_{C0}},$$

míg a lyukállapotok sűrűségét a valencia a sávban a következővel:

$$g_p(E) = \frac{4\pi V (2m_{eff}^{(p)})^{\frac{3}{2}}}{h^3} \sqrt{E_{V0} - E} = K_p \sqrt{E_{V0} - E}$$

Ez lényegében azt jelenti, hogy minél inkább távolodunk vezetési sáv legkisebb, illetve a valencia sáv legmagasabb energiaszintjétől, úgy növekszik az elektronok megtalálási valószínűsége.

Az elektronpopuláció sűrűségét a vezetési sávban megadhatjuk a következőképp:

$$n = \int_{E_C}^{\infty} g_n(E) f(E) dE = K_n \int_{E_C}^{\infty} \sqrt{E_{V0} - E} \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} dE \cong N_C e^{\frac{E_F-E_C}{kT}},$$

ahol

$$N_C = K_n \frac{\sqrt{\pi (kT)^3}}{2} = 2 \frac{(2\pi m_{eff}^{(n)} kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3}.$$

Ezek után pedig meghatározzuk a lyukpopulációt a valenciasávban. Először is nézzük, hogy a lyukra vonatkozó valószínűség mennyi:

$$f_p(E) = 1 - f(E) = 1 - \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{E_F-E}{kT}} + 1},$$

ebből pedig a lyuksűrűség a vegyérték sávban:

$$p = K_p \int_{-\infty}^{E_V} \sqrt{E_V - E} \frac{1}{e^{\frac{E_F - E}{kT}} + 1} dE \cong N_V e^{\frac{E_V - E_F}{kT}}$$

és

$$N_V = K_p \frac{\sqrt{\pi(kT)^3}}{2} = 2 \frac{(2\pi m_{eff}^{(p)} kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3}$$

4.8.1. Töltés-neutralitás elve és a Fermi-szint

Sajátvezetésű félvezetőkben érvényes a töltés-neutralitás elve, vagyis pontosan annyi elektron van a vezetési sávban, mint amennyi lyuk a valencia sávban. Ennek magyarázata, hogy az összes elektron a valencia sávból "ugrott fel" a vezetési sávba, ezért maga mögött minden elektron 1-1 "lyukat" hagyott, tehát számuknak megegyezőnek kell lennie.

Ebből pedig levezethetjük az intrinsic félvezetők Fermi-szintjét, hiszen

$$n = N_C e^{\frac{E_F - E_C}{kT}} = p = N_V e^{\frac{E_V - E_F}{kT}}.$$

Osszunk le a kapott kifejezésben, hogy a következő összefüggésre jussunk:

$$\frac{N_V}{N_C} = e^{\frac{E_F - E_C}{kT} - \frac{E_V - E_F}{kT}}.$$

Ezután vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát

$$\ln \frac{N_V}{N_C} = \frac{E_F - E_C}{kT} - \frac{E_V - E_F}{kT},$$

és fejezzük ki az E_F Fermi szintet:

$$E_F = \frac{E_V + E_C}{2} + \frac{1}{2} kT \ln \frac{N_V}{N_C} = \frac{E_V + E_C}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_{eff}^{(p)}}{m_{eff}^{(n)}}.$$

Végezetül pedig határozzuk meg a negatív töltéshordozók (elektronok) számát:

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{E_C - E_V}{2kT}}.$$

4.9. Adalékolt félvezető anyagok

Az előbbieken megismert intrinsic (másnéven sajátvezetésű) anyagok mellett van egy másik típusa a félvezetőknek, az adalékolt félvezetők. Adalékolással ugyanis növelhető a vezetése az adott anyagnak. Adalékolás alatt azt értjük, mikor az anyag kristályrácsában lévő néhány atomot olyan atomra cserélünk, amelynek a valenciasávjában több/kevesebb elektron van, mint az eredetinek.

Amennyiben a hozzáadott atom vegyértéksávjában több elektron van, mint a kristályrács többi atomjának vegyértéksávjában, akkor n-típusú vezetéről, fordított esetben pedig p-típusúról beszélünk.

Az előző alfejezetben kiszámoltuk a saját vezetésű félvezetők Fermi-szintjét. Adalékolással ez a szint a vezetési sáv (n-típusú), illetőleg a valencia sáv (p-típusú) felé tolható el. Előbbi esetben donorszintnek, míg utóbbi esetben akceptorszintnek is nevezhetjük ezt a szintet. Ugyanis n-típusú adalékoláskor azok az elektronok, amelyek "feleslegesként" maradnak (több az elektron, mint amennyinek lennie kéne) a tiltott sávba helyezkednek el, mégpedig közel a vezetési sávhoz, és ezért kis energiával is felgerjeszthetők a vezetési sávba, míg p-típus esetében "lyukakat" (elektronhiányos helyeket) találhatunk a valencia sávban (hisz kevés az elektron a "megszokotthoz" képest), és ezeket a helyeket betölthetik az érkező elektronok.

Fontos megjegyezni, hogy ebben az esetben a töltés-neutralitás elve kissé változik. Ugyanis ezesetben nem csak a negatív töltéshordozók és "lyukak" számáról szól az egyenlőség, hanem figyelembe kell venni, hogy mekkora mennyiségű atomot adalékolunk az eredeti anyagunkba, továbbá az akceptor és donor atomokból származó negatív töltéshordozókat, illetve "lyukakat".

Mindezek mellett külön kell vizsgálnunk az n-típusú és a p-típusú vezetők töltés-neutralitását.

Amennyiben p-típusú adalékolt félvezetőről beszélünk, úgy az elektronok megtalálási valószínűsége - az intrinsictől eltérően - nem egyenlő nagyságú a vezetési és valencia sávban, hanem az utóbbiban nagyobb, míg n-típusú vezetés esetén a vezetési sávban nagyobb az elektronok megtalálási valószínűsége.

A p- és n-típusú félvezetők közti különbségeket az alábbi táblázat tartalmazza:

n-típus	-	p-típus
$n_n = p_n + N_d - n_d$	Töltés-neutralitás elve	$n_p + n_a = p_p$
$E_F = E_C + k_B T \ln \frac{N_d}{N_C}$	Fermi-szint	$E_F = E_V + k_B T \ln \frac{N_V}{N_a}$
$n_n \approx N_d$	Többségi töltéshordozó	$p_p \approx N_a$
$p_n = \frac{N_C N_V}{N_d} e^{\frac{E_V - E_C}{k_B T}} = \frac{n_i p_i}{n_n}$	Kisebbségi töltéshordozó	$n_p = \frac{N_C N_V}{N_a} e^{\frac{E_C - E_V}{k_B T}} = \frac{n_i p_i}{p_p}$
$n p = n_i p_i = N_C N_V e^{\frac{E_V - E_C}{k_B T}} \sim C T^3 e^{\frac{E_V - E_C}{k_B T}}$		

4.9.1. Kontakt potenciál adalékolt félvezetők esetén

Amennyiben összeérintünk egy p-, illetve n-típusú adalékolt félvezetőt, úgy köztük is kontaktpotenciál lép fel, ahogy a 4.7. fejezetben már láttuk. Ezesetben azonban termikus egyensúly beálltakor a két különböző anyag Fermi-szintje kiegyenlítődik.

Általánosságban elmondhatjuk tehát, hogy a termikus egyensúlyban lévő p-n dióda, n-p-n, illetve p-n-p átmenetű bipoláris tranzisztor Fermi-szintje is kiegyenlítődik, habár összeérintéskor a Fermi-szintek nincsenek egyhelyen, és csak a kontaktpotenciál miatti töltésvándorlással áll be az egyensúly.

4.10. Töltéshordozók mozgatása külső elektromos térrel

A külső elektromos tér erejének nagyságát a

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

egyenlettel adhatjuk meg. Amennyiben szeretnénk felírni a Newton-féle mozgásegyenletet az anyagbeli elektronra, úgy a következőt kapjuk:

$$\mathbf{F}_{\text{belső}} + \mathbf{F}_{\text{külső}} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

ahol a csak külső erőkre vonatkozó egyenlet:

$$\mathbf{F}_{\text{külső}} = m_{\text{effektív}} \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

és $m_{\text{effektív}}$ az elektron effektív tömege.

Az erőmentes térben mozgó, másnéven szabad elektronok effektív tömege megegyezik az elektron "rendes" tömegével. A szabad elektron csoportsebessége megegyezik az elektron, mint részecske sebességével, ebből felírhatjuk a következőt:

$$v = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\pi}{h} \frac{dE}{dk},$$

ahol kihasználtuk, hogy

$$E = hf,$$

illetve

$$\omega = 2\pi f.$$

Ezek után, ha felírjuk, hogy

$$\frac{dE}{dt} = Fv = \frac{2\pi}{h} F \frac{dE}{dk},$$

vagyis, hogy az elektromos erőter nagyságának időbeli megváltozása megegyezik az elektronra ható erő és az elektron sebességének szorzatával, továbbá felhasználjuk, hogy

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dk} \frac{dk}{dt},$$

akkor az előbbieket értelmében kifejezhetjük az erő nagyságát:

$$F = \frac{h}{2\pi} \frac{dk}{dt}.$$

Ezek után írjuk fel az elektron gyorsulását:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{h} \frac{d}{dt} \left(\frac{dE}{dk} \right) = \frac{2\pi}{h} \frac{d^2 E}{dk^2} \frac{dk}{dt}.$$

Használjuk fel a Newton-mozgásegyenletet, amiből tudjuk, hogy a gyorsulás megegyezik az erő és a tömeg hányadosával. Helyettesítsük a gyorsulásra és erőre az előbb kiszámolt képleteinket, és fejezzük ki az effektív tömeget. Azt kapjuk, hogy

$$m_{\text{effektív}} = \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{d^2 E}{dk^2}.$$

4.11. A félvezetők töltéshordozóinak dinamikája

A félvezetőkben nagy számú elektron mozog, az egymás közti kölcsönhatásukat pedig elhanyagolhatjuk. A félvezetőkben lévő áramlásokat a vezetési sáv elektronjainak és a pozitív töltésűnek titulált fiktív részecskék, másnéven lyukak mozgásával írhatjuk le.

A részecskék áramlása lehet külső tér hatására létrejövő, és lehet töltéshordozók koncentrációgradiense által hajtott. Előbbit vezetési (sodródási) áramnak nevezzük, míg utóbbit diffúziós áramnak.

Általános tényként tudjuk, hogy minden anyag az egyensúly felé törekszik, és a benne lévő változások addig mennek végbe (spontán, külső erők hatása nélkül) míg az egyensúly be nem áll. Azonban, ha kimozdítjuk az egyensúlyból az anyagot, akkor az ezután igyekszik visszaállni az egyensúlyi állapot felé, ezt nevezzük relaxációnak.

4.11.1. Gerjesztés és rekombináció

Elektron-lyuk párokat létrehozhatunk úgy, ha egy-egy elektront gerjesztünk egy magasabb energiaszintre (azaz a vezetési sávba gerjesztjük), ekkor egy "lyukat" hagy maga mögött.

Az elektron-lyuk párok azonban képesek rekombinálódni, azaz a valencia sávban lévő "lyukat" egy elektron betölteni. A rekombináció során a vegyérték sávba (le)ugró elektron fotont bocsáthat ki, ezt hívják sugárzásos rekombinációnak.

4.11.2. Differenciális Ohm-törvény a félvezetőkben

Tegyük fel, hogy az adott félvezetőre elektromos teret kapcsolunk. Ekkor a lyukak a térerősség irányába, míg az elektronok azzal ellentétes irányba sodródnak.

Általános megfigyelés, hogy a fellépő áramsűrűség arányos a sodródó elektronok sebességének várható értékével, vagyis

$$\mathbf{J}_n = en\langle v_e \rangle,$$

ahol e az elektron töltése, míg n a félvezető (szabad) elektronjainak száma. Továbbá a vezetőképesség

$$\sigma_n = \frac{J_n}{|\mathbf{E}|} = en \frac{\langle v_e \rangle}{|\mathbf{E}|}.$$

A legutolsó egyenlet jobboldalán szereplő hányadost nevezzük mozgékonyiságnak, és

$$\mu_n = \frac{\langle v_e \rangle}{|\mathbf{E}|}.$$

A mozgékonyiséggal kifejezve a vezetőképesség és az áramsűrűség:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= en\mu_n \\ \mathbf{J}_n &= en\mu_n \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Az előbbiekben felírt egyenletek a negatív töltéshordókra (elektron) vonatkoznak, de ugyanezeket felírhatjuk a "lyukakra" is:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= ep\mu_p \\ \mathbf{J}_p &= ep\mu_p\mathbf{E}.\end{aligned}$$

Egy adott félvezető fajlagos vezetőképessége a fiktív pozitív részecskékre és elektronokra vonatkozó vezetések összege, tehát

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p).$$

Mindezeket felhasználva a differenciális Ohm-törvényt tehát írhatjuk a következőképp is:

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = e(n\mu_n + p\mu_p)\mathbf{E} = en_0\tilde{\mu}\mathbf{E},$$

ahol

$$\tilde{\mu} = \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{n_1 + n_2}.$$

További eltérések lehetnek a különböző félvezetők között, ezt a következő táblázat tartalmazza:

szerkezeti (intrinsic)	n-típusú	p-típusú
$\sigma_i = en_i(\mu_n + \mu_p)$	$\sigma_n = en_n\mu_n$	$\sigma_p = ep_p\mu_p$

Saját vezetési félvezetőben tudjuk, hogy

$$p_i = n_i = 2\left(\frac{2\pi m_{\text{effektív}}k_BT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\Delta E}{2k_BT}},$$

amivel a táblázatban megadott képletet felírhatjuk a következő alakban is:

$$\sigma_i = en_i(\mu_n + \mu_p) = 2e\left(\frac{2\pi m_{\text{effektív}}k_BT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} (\mu_n + \mu_p) e^{-\frac{\Delta E}{2k_BT}}.$$

4.11.3. Gunn-effektus

Bizonyos anyagokra, ha külső elektromos teret kapcsolunk, és azt növeljük, akkor azt tapasztalhatjuk, hogy a sodródó elektronok mobilitása csökken, ahogy növeljük az elektromos térerősséget. A két-kimenetű eszközök, melyek ilyen anyagból készülnek képesek a mikro-hullámú oszcillációra, melynek frekvenciáját nem a befoglaló hálózat, hanem az eszközben lévő anyag sajátossága határozza meg. Ezt az effektust hívjuk Gunn-effektusnak, felfedezője, J. B. Gunn után, aki 1963-ban észlelte a jelenséget. Azóta már létezik Gunn-dióda is, ami ezen az elven működik.

4.11.4. Transzportot leíró dinamikai egyenletek

A vezetési áramot létrehozó sodródást külső tér generálja, az előbbiekben bemutatott módon. Azonban a diffúziót a pozitív fiktív részecskék és a negatív töltéshordozók változása

által indukált koncentrációgradiens hajtja, általánosan felírható az elektronokra vonatkozó diffúziós kifejezés:

$$\mathbf{J}_n = -D_n \text{grad} n,$$

illetve a "lyukakra" vonatkozó:

$$\mathbf{J}_p = D_p \text{grad} p.$$

Az előző két kifejezésben szereplő n és p függvények helytől és időtől függenek, ahogy azt a félvezetőknél már láthattuk.

Mindezek ismeretében felírhatjuk a teljes áramsűrűsége(ke)t:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_n &= en\mu_n \mathbf{E} + eD_n \text{grad} n \\ \mathbf{J}_p &= ep\mu_p \mathbf{E} - eD_p \text{grad} p.\end{aligned}$$

4.12. Az anyagok és az elektromágneses tér kölcsönhatása

A termikus egyensúly beállta után az atomi rendszerek a környezetükkel fény kibocsátásával, vagy elnyelésével vannak kapcsolatban. Előbbit emisszióknak hívjuk, utóbbit abszorpcióknak nevezzük. Kétféle foton emissziót ismerünk: spontán és stimulált.

4.12.1. Emisszió és abszorpció

Tegyük fel, hogy egy atom elnyel egy "érkező" fotont. Ekkor egy elektronja magasabb energiaszintű pályára ugrik. Ezt egyébként egy (spontán) emisszió is követheti.

A spontán emisszió során egy (már gerjesztett) elektron "leugrik" egy alacsonyabb energiaszintű pályára, miközben fotont bocsát ki.

Azonban előfordulhat az is, hogy egy gerjesztett elektron elnyel még egy fotont, azonban a várakozásokkal ellentétben nem feljebb ugrik egy még magasabb energiájú orbitálra, hanem alacsonyabb energiájú pályára ugrik. Ez az úgynevezett stimulált, vagy másnéven indukált foton emisszió. Fontos megjegyezni, hogy ebben az esetben a fotonok koherensek, azaz térben és időben teljesen megegyezők.

4.13. Atomok termikus egyensúlyban

Az atomokra termikus egyensúlyban igaz, hogy az abszorpciók és emissziók száma egyenlő. A fotonok a Bose-Einstein statisztikát követik (hiszen bozonok), a frekvenciájuk függvényében felírt sűrűségfüggvény pedig a következő:

$$\rho(f) = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}.$$

Ezután pedig felírhatjuk az Einstein-féle abszorpciók

$$B_{12} N_1 \rho(f),$$

spontán emissziók

$$AN_2 = AN_1 e^{-\frac{hf}{k_B T}},$$

és stimulált emissziók

$$B_{21}N_2\rho(f) = B_{21}N_1 e^{-\frac{hf}{k_B T}}\rho(f)$$

számára vonatkozó összefüggéseket. Az atomok, mint megkülönböztethető részecskék Maxwell-Boltzmann statisztikát követnek. Azaz, felhasználva az előző három egyenlőséget, tudjuk, hogy

$$B_{12}\rho(f) = Ae^{-\frac{hf}{k_B T}} + B_{21}e^{-\frac{hf}{k_B T}}\rho(f),$$

és, ha ezután rendezzük a fenti egyenletet $\rho(f)$ -re, azt kapjuk, hogy

$$\rho(f) = \frac{A}{B_{12}e^{\frac{hf}{k_B T}} - B_{21}}.$$

Mivel a fotonok a fentiekben meghatározott Bose-Einstein statisztikát követik, ezért a két statisztikának meg kell egyeznie, azaz

$$B_{12} = B_{21} = B \quad (19)$$

egyenletet figyelembe véve

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi hf^3}{c^3}.$$

A (19)-et megnézve észrevehetjük, hogy az abszorpció és a stimulált emisszió "szimmetrikus".

4.14. Mérnöki alkalmazások

A fentiekben bemutatott fizikai jelenségeket a mérnöki tudományokban napjainkban egyre gyakrabban és jobban alkalmazzák.

4.14.1. A LASER és MASER

Az első LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) rubin szilárdtest laser volt, méghozzá háromszintű. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a legmagasabb (egyébként sávszerű) energiapályáról az elektronok spontán emisszióval "összeállnak" (diszkrét energiaszintre), majd stimulált emisszióval alacsonyabb energiaszintre ugranak.

Az emisszió után a kibocsátott energia a kristályban marad, felmelegíti azt, majd elkezd vibrálni. Ezután az elektronok még lentebbi energiaszintre ugranak spontán emisszió kíséretében, és ezzel sugárzást bocsátanak ki. A sugárzás hullámhossza a látható fény tartományába esik, innen ered a névben a "Light" tag.

Ezen kívül létezik MASER (Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation) is, amely hasonlóan működik, mint a LASER, de a kisugárzott nyaláb a mikrohullámú tartományba esik.

A háromszintű LASER/MASER mellett van négy szintű is, amikor a harmadik lépésben kicsit nagyobb energiaszintre "esnek" az elektronok, míg onnan "együtt" spontán emisszióval ugranak tovább egy - már ismét - sávszerű energiapályára.