

Sztochasztikus folyamatok 1. házi feladat megoldások

1. $\xi_i \sim N(m, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, 15$, ahol m ismeretlen, $\sigma = 2.5$ ismert. Az adatokból $\bar{\xi}_{15} = 11.89$ adódik. Tudjuk, hogy $\eta = \frac{\xi_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, ez az átlag standardizáltja.

a) Szimmetrikus konfidencia intervallum kell, így keressünk olyan a -t, melyre $P(|\eta| < a) = 0.99$, azaz $2\phi(a) - 1 = 0.99$. Ekkor $\phi(a) = 0.995$ és $a = 2.57$ adódik a normális eloszlás táblázatából. $P(|\frac{\xi_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}| < a) = P(|\eta| < a) = 0.99$, másrészt $|\frac{\xi_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}| < a \iff |m - \bar{\xi}_n| < a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \iff \bar{\xi}_n - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{\xi}_n + a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, így $[\bar{\xi}_n - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\xi}_n + a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] = [11.89 - 2.57 \frac{2.5}{\sqrt{15}}, 11.89 + 2.57 \frac{2.5}{\sqrt{15}}] = [10.23; 13.55]$ 99%-os biztonságu szimmetrikus konfidencia-intervallum az m várható értékre, vagyis a bor alkoholtartalmára.

b) A $[\bar{\xi}_n - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\xi}_n + a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ szimmetrikus konfidencia-intervallum hossza $2a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2$ egyenletből $\sqrt{n} = a\sigma = 2.57 * 2.5 = 6.425$ azaz $n = 41.28$ adódik. Így legalább 42 mérést kell végeznünk.

c) A feladat a) és b) részéhez hasonlóan σ továbbra is ismert, és $\eta = \frac{\xi_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, így ebben a részben is a normális eloszlás táblázatát kell használnunk. A különbség csak annyi, hogy nem szimmetrikus, hanem egyoldali konfidencia intervallumot keresünk. Kell $\gamma \in \mathbb{R}$, melyre $P(m \in (-\infty, \bar{\xi}_n + \gamma)) = 0.95$. Használjuk fel, hogy $m \in (-\infty, \bar{\xi}_n + \gamma) \iff m < \bar{\xi}_n + \gamma \iff m - \bar{\xi}_n < \gamma \iff \frac{m - \bar{\xi}_n}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\gamma}{\sigma/\sqrt{n}}$. Tehát kell $\gamma \in \mathbb{R}$, melyre $P(-\eta < \frac{\gamma}{\sigma/\sqrt{n}}) = 0.95$. Az egyszerűség kedvéért jelölje: $a = \frac{\gamma}{\sigma/\sqrt{n}}$. Ezzel $P(-\eta < a) = 0.95$. Mivel η standard normális eloszlású, és ez a 0-ra szimmetrikus eloszlás, ezért $-\eta$ is standard normális eloszlású, így $\phi(a) = 0.95$ és $a = 1.64$ adódik. Mivel $a = \frac{\gamma}{\sigma/\sqrt{n}}$, ezért $\gamma = a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.64 * 2.5/\sqrt{15} = 1.06$, azaz $(-\infty, \bar{\xi}_n + a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (-\infty, 11.89 + 1.06) = (-\infty, 12.95)$ megfelelő konfidencia intervallum. A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy ismert σ esetén a várható értékre, m -re vonatkozó szimmetrikus konfidencia intervallum $[\bar{\xi}_n - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{\xi}_n + a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$, ahol $2\phi(a) - 1 = 1 - \alpha$ a megbízhatósági szint. Egyoldali konfidencia intervallum pedig: $(-\infty, \bar{\xi}_n + a \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ vagy $(\bar{\xi}_n - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty)$, ahol $\phi(a) = 1 - \alpha$ a megbízhatósági szint.

2. Most m és σ is ismeretlen (utóbbit is csak a mintából tudjuk becsülni) így ebben a feladatban t eloszlást kell használnunk.

a) A várható értéket a mintaátlaggal becsülhetjük: $\bar{\xi}_6 = 15.8$, a szórást pedig a korrigált tapasztalati szórással: $s_6^* = 0.1532$.

b) Ismert, hogy $t = \frac{\bar{\xi}_n - m}{s_n^*/\sqrt{n}}$ közelítőleg $t(n-1)$. Így a szimmetrikus konfidencia intervallum ismeretlen szórás esetén $[\bar{\xi}_n - a \frac{s_n^*}{\sqrt{n}}, \bar{\xi}_n + a \frac{s_n^*}{\sqrt{n}}]$ alakú, ahol $P(|t| < a) = 1 - \alpha$ a megbízhatósági szint. 95%-os megbízhatósági szint esetén $1 - \alpha = 0.95$, azaz $\alpha = 0.05$. A szabadsági fok most $n - 1 = 5$, és kétoldali érték kell, így a t eloszlás táblázatából $a = 2.571$ adódik. Azaz a 95%-os szimmetrikus konfidencia intervallum a várható értékre:

$$[15.8 - 2.571 \frac{0.1532}{\sqrt{6}}, 15.8 + 2.571 \frac{0.1532}{\sqrt{6}}] = [15.64; 15.96].$$

99%-os megbízhatósági szint esetén $1 - \alpha = 0.99$, azaz $\alpha = 0.01$. A szabadsági fok most is $n - 1 = 5$, és kétoldali érték kell, így a t eloszlás táblázatából $a = 4.032$ adódik.

Azaz a 99%-os szimmetrikus konfidencia intervallum a várható értékre: $[15.8 - 4.032 \frac{0.1532}{\sqrt{6}}, 15.8 + 4.032 \frac{0.1532}{\sqrt{6}}] = [15.55; 16.05]$. Ez természetesen az előbbinél bővebb intervallum.

3. A titkárnő által egy-egy oldalon vétett hibák száma: $\xi_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $i = 1, \dots, 10$. A λ paraméter maximum likelihood becslését keressük. A likelihood függvény: $L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(\xi_i = x_i) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right]$, ahol $x_1, \dots, x_n$ az egy-egy oldalon vétett hibák száma. Most $n = 10$. A loglikelihood függvény: $H(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \ln L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \ln \prod_{i=1}^n \left[\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right] = \sum_{i=1}^n \ln \left[\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right] = \sum_{i=1}^n \left[x_i \ln \lambda - \ln(x_i!) - \lambda \right] = \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - n\lambda$. Így $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n = 0$, azaz $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}_n$. $\frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2} < 0$, így ez lokális maximum hely. A λ paraméter maximum likelihood becslése tehát: $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}_n = \bar{x}_{10} = 2,4$. Poisson eloszlásról lévén szó, a várható értéket és a szórást is ezzel becsülhetjük.
4. Itt a likelihood függvény: $L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}} \right]$. A loglikelihood függvény: $H(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \ln L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = n \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$. A $\frac{\partial H}{\partial m} = 0$ egyenletből $\hat{m} = \bar{x}_n$, a $\frac{\partial H}{\partial \sigma} = 0$ egyenletből $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m})^2}{n}}$ adódik. Így $\hat{m} = \bar{x}_n$ -t felhasználva $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}{n}}$ adódik. Azaz σ maximum likelihood becslése $\hat{\sigma} = s_n$, a (nem korrigált!) tapasztalati szórás. A konkrét értékekkel: $\hat{m} = \bar{x}_5 = 316$, $\hat{\sigma} = s_5 = 3.52$.
5. (Szorgalmi házi feladat.) b maximum likelihood becslése $\max\{x_1, \dots, x_n\}$. Ez nem tozítatlan becslés. $\frac{n+1}{n} \max\{x_1, \dots, x_n\} = \frac{6}{5} \max\{x_1, \dots, x_5\}$ torzítatlan becslés b -re.

Sztochasztikus folyamatok 2. házi feladat megoldások

1. $\xi_i \sim N(m, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, 18$, ahol $m = E\xi_i$ ismeretlen, $\sigma = D(\xi_i) = 2$ (cl) ismert. A feladat szerint a mérési adatokból $\bar{\xi}_{18} = 52$ (cl) adódott. A nullhipotézis $H_0 : m = m_0 = 50$ (cl), figyeljünk a mértékegységre, az ellenhipotézis $H_1 : m \neq 50$ (cl).

σ ismert, ezért egymintás u -próbát használhatunk. A H_0 nullhipotézis mellett $\xi_i \sim N(m_0, \sigma^2)$, ahol $m_0 = 50$, és így $u = \frac{\bar{\xi}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$. A megadott szignifikanciaszint 95%, így $1 - \alpha = 0.95$. Mivel kétoldali az ellenhipotézis, az elfogadási tartomány $E = [-a, a]$ alakú, ahol $P(u \in [-a, a]) = P(|u| < a) = 2\phi(a) - 1 = 0.95$ kell hogy teljesüljön. Így $\phi(a) = 0.975$ és a standard normális eloszlás táblázatából $a = 1.96$ adódik. Tehát $E = [-1.96, 1.96]$. Most $u = \frac{\bar{\xi}_{18} - m_0}{\sigma/\sqrt{18}} = \frac{52 - 50}{2/\sqrt{18}} = 4.24$. Azaz $u \notin E$, tehát H_0 -t elvetjük, vagyis 95%-os szignifikanciaszinten nem fogadható el az a feltételezés, hogy a gépsor szabványos mennyiséget tölt.

H_0 -t akkor vethetjük el, ha $u = 4.24 \notin E = [-a, a]$, azaz, ha $a < 4.24$. $a = 4.24$ esetén a szignifikanciaszint $2\phi(a) - 1 = 1$, mivel $\phi(4.24) = 1$ -nek tekinthető. Így minden szinten, azaz teljes biztonsággal elvethető az a feltételezés, hogy a gépsor szabványos mennyiséget tölt. (Azaz le kell állítanunk, és be kell újra állítanunk a gépsort, hacsak nem akarunk a vásárlókkal jótékonykodni.)

2. Mivel a valódi szórások ismertek, kétmintás u -próbát alkalmazhatunk. A nullhipotézis $H_0 : m_1 = m_2$, (a két város átlagos csapadékmennyisége megegyezik), az ellenhipotézis $H_1 : m_1 \neq m_2$.

H_0 teljesülése esetén $u = \frac{\bar{\xi}_n - \bar{\eta}_m}{\sqrt{\sigma_M^2/n + \sigma_L^2/m}} \sim N(0, 1)$. Itt n és m a megfelelő minták elemszáma. $u = \frac{35 - 28}{\sqrt{53/10 + 47/10}} = 2.21$. A megadott szignifikanciaszint 99% és H_1 kétoldali ellenhipotézis, így az elfogadási tartomány $E = [-a, a]$ alakú, ahol $P(|u| < a) = 2\phi(a) - 1 = 0.99$, azaz $\phi(a) = 0.995$, vagyis $a = 2.57$. Így $t = 2.21 \in E = [-2.57, 2.57]$, azaz H_0 -t elfogadjuk.

3. Arról a hipotézisről, hogy a két város csapadékmennyiségének szórása azonos-e, F -próba segítségével dönthetünk. Itt a nullhipotézis $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$, az ellenhipotézis $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$. Általában a következő próbastatisztikát használjuk: $F = \max\left\{\frac{s_M^2}{s_L^2}, \frac{s_L^2}{s_M^2}\right\}$. Ez a H_0 nullhipotézis mellett F -eloszlású $n - 1, m - 1$ szabadsági fokkal, ahol n és m a nevezőhöz illetve a számlálóhoz tartozó minta elemszáma. Jelen esetben $F = \frac{s_M^2}{s_L^2} = \frac{42}{38} = 1.11$, és F (9, 9) szabadságfokú. A táblázat szerint a megfelelő kritikus érték $c = 3.18$, azaz $P(F < c) = 0.95$. Mivel $F = 1.11 < c = 3.18$, ezért 95%-os szignifikanciaszinten elfogadjuk azt a hipotézist, hogy a két csapadékmennyiség szórása azonos. Miután teszteltük, hogy a két független mennyiség szórása azonosnak tekinthető, a várható értékek egyenlőségének vizsgálatára kétmintás t -próbát használhatunk (ugyanis a két szórás azonos, de NEM ISMERT.) A nullhipotézis $H_0 : m_1 = m_2$, (a két város átlagos csapadékmennyisége megegyezik), az ellenhipotézis $H_1 : m_1 \neq m_2$.

H_0 teljesülése esetén $t = \frac{\bar{\xi}_n - \bar{\eta}_m}{\sqrt{(n-1)s_M^2 + (m-1)s_L^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$ t eloszlású $n+m-2$ szabadságfokkal. Itt n és m a megfelelő minták elemszáma. t értéke most $t = \frac{35-28}{\sqrt{9 \cdot 42 + 9 \cdot 38}} \sqrt{\frac{10 \cdot 10 \cdot 18}{20}} = 2.475$. A megadott szignifikanciaszint 99% és H_1 kétoldali ellenhipotézis, így az elfogadási tartomány $E = [-a, a]$ alakú, ahol $P(|t| < a) = 0.99$. Másrészt t $n+m-2 = 18$ szabadságfokú. Így a t eloszlás táblázatából $a = 2.878$ és $E = [-2.878, 2.878]$. Mivel $t = 2.475 \in E$ H_0 -t elfogadjuk, azaz 99%-os megbízhatósági szinten állíthatjuk, hogy a két város átlagos csapadékmennyisége megegyezik. (Megjegyzés. 95%-os szignifikanciaszint esetén $a = 2.101$, így 95%-os megbízhatósági szinten már nem állíthatjuk, hogy a két város átlagos csapadékmennyisége megegyezik.)

4. A két minta (szervíz előtti és szervíz utáni értékek) **nem független**, így a két minta autónként vett különbségére, azaz a fogyasztás megváltozására kell egymintás próbát használnunk. Így a következő adatsort kapjuk: $-0.4, -0.6, -0.7, 0.0, -0.3$. Ehelyett érdekesebb a -1 -szeres értékéket tekinteni: $0.4, 0.6, 0.7, 0.0, 0.3$ ami azt adja meg, hogy mennyivel csökkent a fogyasztás. A mintaátlag $\bar{\xi}_5 = 0.4$, a korrigált tapasztalati szórásnégyzet illetve szórás: $s_5^{*2} = (0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.01)/(5-1) = 0.075$, $s_5^* = 0.274$.

A nullhipotézis $H_0 : m = 0$, (a szervíz előtti és utáni fogyasztás megegyezik), az ellenhipotézis $H_1 : m > 0$ (a szervíz után a fogyasztás csökkent).

Mivel a szórás nem ismert, csak becsülni tudtuk, t próbát kell használnunk.

A H_0 hipotézis mellett $t = \frac{\bar{\xi}_5 - 0}{s_5^*/\sqrt{5}}$ 4 szabadságfokú t eloszlású. Az adatok szerint $t = \frac{0.4-0}{0.274/\sqrt{5}} = 3.26$.

Az ellenhipotézis most egyoldali, H_1 alapján a kritikus tartomány $K = (a, +\infty)$ alakú, ahol $a > 0$. A 0.025 elsőfajú hibavalószínűséghez tartozó kritikus érték 2.776, azaz ekkor $t = 3.26 \in K$, így 97.5%-os szinten elvethetjük H_0 -t, azaz azt állíthatjuk, hogy a fogyasztás csökkent, vagyis a szervíz hatása szignifikáns.

Sztochasztikus folyamatok 3. házi feladat megoldások

1. $R_X(0) = D^2(X_t) = \sigma^2(1 + 9 + 4 + 16) = 90.$

$$R_X(1) = \text{cov}(\varepsilon_t + 3\varepsilon_{t-1} - 2\varepsilon_{t-2} + 4\varepsilon_{t-3}, \varepsilon_{t+1} + 3\varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + 4\varepsilon_{t-2}) = \sigma^2(1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4) = -33.$$

$$R_X(2) = \sigma^2(1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4) = 30.$$

$$R_X(3) = \sigma^2 \cdot 1 \cdot 4 = 12.$$

$$R_X(k) = 0, \text{ ha } k \geq 4.$$

$$R_X(k) = R_X(-k).$$

2. $R_Z(k) = \text{cov}(Z_0, Z_k) = \text{cov}(X_0 + W_0, X_k + W_k) = \text{cov}(X_0, X_k) = R_X(k),$

ha $k \neq 0$, mivel az X -ek a W -ktől függetlenek, és W_0 is független W_k -től.

$$R_Z(0) = D^2X_0 + D^2W_0 = R_X(0) + 9. \text{ Az órán tanultak alapján } k \geq 1 \text{ esetén}$$

$$R_Z(k) = R_X(k) = \frac{4\left(\frac{1}{m+1}\right)^k}{1 - \left(\frac{1}{m+1}\right)^2}$$

$$R_Z(0) = R_X(0) + 9 = \frac{4}{1 - \left(\frac{1}{m+1}\right)^2} + 9.$$

Ezek után $k \geq 2$ esetén:

$$\begin{aligned} R_U(k) &= \text{cov}\left(Z_0 - \frac{1}{m+1}Z_{-1}, Z_k - \frac{1}{m+1}Z_{k-1}\right) = \\ R_Z(k) - \frac{1}{m+1}R_Z(k - (-1)) - \frac{1}{m+1}R_Z(k - 1 - 0) + \left(\frac{1}{m+1}\right)^2 R_Z(k - 1 - (-1)) &= \\ R_X(k) - \frac{1}{m+1}R_X(k + 1) - \frac{1}{m+1}R_X(k - 1) + \left(\frac{1}{m+1}\right)^2 R_X(k) &= 0, \end{aligned}$$

némi számolgatással.

Ha $k = 0$ vagy 1 , akkor a fentiekből:

$$R_U(1) = \left(1 + \left(\frac{1}{m+1}\right)^2\right)R_Z(1) - \frac{1}{m+1}[R_Z(2) + R_Z(0)],$$

és

$$R_U(0) = \left(1 + \left(\frac{1}{m+1}\right)^2\right)R_Z(0) - \frac{1}{m+1}[R_Z(1) + R_Z(-1)].$$

Ezek $R_Z(k)$ fent megadott értékei alapján számolhatóak. Mivel $R_U(k) = 0$ ha $|k| \geq 2$, ezért mozgó átlag folyamattal van dolgunk (bár az nem világos, hogy mi most a fehér zaj).

Sztochasztikus folyamatok 4. házi feladat megoldások

1. Láttuk, hogy ha $|a| < 1$ és $b \neq -a$, akkor az

$$X_t - aX_{t-1} = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1}$$

ARMA folyamat létezik, és megkonstruáltuk kauzális végtelen mozgó átlag előállítását:

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} (a+b)a^{j-1}\varepsilon_{t-j}.$$

Így

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

ahol $\psi_0 = 1$, $\psi_j = (a+b)a^{j-1}$, ha $j \geq 1$. (Emlékeztető: ha $Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$ végtelen mozgó átlag, akkor $R_Z(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}$.) Így

$$R_X(0) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = \sigma^2 [\psi_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2] = \sigma^2 [1 + \sum_{j=1}^{\infty} [(a+b)a^{j-1}]^2] = \sigma^2 [1 + \frac{(a+b)^2}{1-a^2}].$$

$$R_X(1) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+1} = \sigma^2 [\psi_0 \psi_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \psi_{j+1}] = \sigma^2 [(a+b) + \sum_{j=1}^{\infty} (a+b)^2 a^{2j-1}] = \sigma^2 [a+b + \frac{(a+b)^2 a}{1-a^2}].$$

$$R_X(2) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+2} = \sigma^2 [\psi_0 \psi_2 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \psi_{j+2}] = \sigma^2 [(a+b)a + \sum_{j=1}^{\infty} (a+b)^2 a^{2j}] = \sigma^2 [(a+b)a + \frac{(a+b)^2 a^2}{1-a^2}].$$

$$R_X(k) = \sigma^2 [(a+b)a^{k-1} + \frac{(a+b)^2 a^k}{1-a^2}], \text{ ha } k \geq 1.$$

2. H_0 : a két készség független, H_1 : a két készség nem független.

Függetlenségvizsgálatot kell végeznünk. A próbastatisztika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{(\nu_{ij} - \frac{\nu_{i.}\nu_{.j}}{n})^2}{\frac{\nu_{i.}\nu_{.j}}{n}}.$$

Itt $n = 144$ a táblázat elemeinek összege, $\nu_{i.}$ -k a sor összegek (83, 51, 10), $\nu_{.j}$ -k az oszlop összegek (71, 50, 23). Így

$$\chi^2 = \frac{(35 - \frac{83 \cdot 71}{144})^2}{\frac{83 \cdot 71}{144}} + \dots + \frac{(1 - \frac{10 \cdot 23}{144})^2}{\frac{10 \cdot 23}{144}} =$$

$$0.857 + 0.048 + 1.696 + 0.59 + 0.004 + 2.11 + 0.868 + 0.624 + 0.223 = 7.02$$

jön ki a statisztika értékére. $r = s = 3$, hiszen mindkét szempont szerint az osztályok száma 3. Ezért a próbastatisztikának megfelelő χ^2 -eloszlás szabadsági foka $(r-1)(s-1) = 4$, a táblázat alapján $c = 9.49$ a 95%-os szinthez tartozó kritikus érték (e fölött utasítunk el). Mivel a statisztika értéke, 7.02 a kritikus érték alatt van, elfogadjuk a nullhipotézist. Megj. A 90%-os megbízhatósági szinthez tartozó kritikus érték 7.78. Így még 90%-os szinten is elfogadhatjuk a nullhipotézist, azaz a két készség 90%-os szinten is függetlennek tekinthető.

3. H_0 : a tetraéder szabályos, H_1 : a tetraéder nem szabályos.

Illeszkedésvizsgálatot kell végeznünk. A lehetséges dobott értékek: 1, 2, 3, 4.

A próbastatisztika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i},$$

ahol $n = 100$, mivel 100-szor dobunk, $p_i = 1/4$, $np_i = 25$, $i = 1, \dots, 4$ elméleti valószínűségek és gyakoriságok felelnek meg a nullhipotézisnek.

ν_i , $i = 1, \dots, 4$ az 1, 2, 3, 4-es dobások valódi száma. A próbastatisztikának megfelelő χ^2 -eloszlás szabadsági foka $4 - 1 = 3$, a táblázat alapján $c = 11.35$ a 99%-os szinthez tartozó kritikus érték (e fölött utasítunk el). Így feladatunk olyan nemnegatív egész ν_i , $i = 1, \dots, 4$ értékeket találni, melyek összege 100, és amelyekre a próbastatisztika értéke $c = 11.35$ alatt illetve $c = 11.35$ felett van. A következők pl. megfelelőek:

1. $\nu_1 = 21, \nu_2 = 24, \nu_3 = 26, \nu_4 = 29$. Ekkor

$$\chi^2 = \frac{(21 - 25)^2}{25} + \frac{(24 - 25)^2}{25} + \frac{(26 - 25)^2}{25} + \frac{(29 - 25)^2}{25} = 1.36,$$

ez kisebb mint a kritikus érték, így a nullhipotézist itt 99%-os szinten elfogadjuk.

2. $\nu_1 = 48, \nu_2 = 9, \nu_3 = 12, \nu_4 = 31$. Ekkor

$$\chi^2 = \frac{(48 - 25)^2}{25} + \frac{(9 - 25)^2}{25} + \frac{(12 - 25)^2}{25} + \frac{(31 - 25)^2}{25} = 39.6,$$

ez nagyobb mint a kritikus érték, így a nullhipotézist itt 99%-os szinten elutasítjuk.

Sztochasztikus folyamatok 5. házi feladat megoldások

1.

$$X_t + \frac{1}{20}X_{t-1} - \frac{1}{20}X_{t-2} = 2\varepsilon_t - \frac{3}{5}\varepsilon_{t-1} - \frac{1}{5}\varepsilon_{t-2},$$

azaz $A(z)X_t = B(z)\varepsilon_t$, ahol $A(z) = 1 + 1/20z - 1/20z^2$, $B(z) = 2 - 3/5z - 1/5z^2$. $A(z) = 0$ acsa. ha $z^2 - z - 20 = 0$, azaz $z = 5$ vagy $z = -4$. $A(z)$ gyökeinek abszolút értéke nagyobb mint 1, így az ARMA folyamat stabil. $B(z) = 0$ acsa. ha $z^2 + 3z - 10 = 0$, azaz $z = 2$ vagy $z = -5$. $B(z)$ gyökeinek abszolút értéke nagyobb mint 1, így az ARMA folyamat invertálható.

a) Rekurzió egy lépéses előrejelzésre:

$$B(z)\hat{X}_{t+1} = (B(z) - \beta_0 A(z))X_{t+1}.$$

$\beta_0 = 2$, így

$$B(z) - \beta_0 A(z) = 2 - \frac{3}{5}z - \frac{1}{5}z^2 - 2(1 + \frac{1}{20}z - \frac{1}{20}z^2) = -\frac{7}{10}z - \frac{1}{10}z^2.$$

Tehát

$$(2 - \frac{3}{5}z - \frac{1}{5}z^2)\hat{X}_{t+1} = (-\frac{7}{10}z - \frac{1}{10}z^2)X_{t+1},$$

azaz

$$2\hat{X}_{t+1} - \frac{3}{5}\hat{X}_t - \frac{1}{5}\hat{X}_{t-1} = -\frac{7}{10}X_t - \frac{1}{10}X_{t-1},$$

vagyis a keresett rekurzió:

$$\hat{X}_{t+1} = \frac{3}{10}\hat{X}_t + \frac{1}{10}\hat{X}_{t-1} - \frac{7}{20}X_t - \frac{1}{20}X_{t-1}.$$

b) Ha két lépésre akarjuk előrejelezni a folyamatot, akkor a rekurziót a köv. egyenlet adja meg

$$B(z)\hat{X}_{t+2} = (B(z) - (\psi_0 + \psi_1 z)A(z))X_{t+2},$$

ahol ψ_0 és ψ_1 a köv. egyenletből határozható meg:

$$B(z) = A(z)(\psi_0 + \psi_1 z + \sum_{j=2}^{\infty} \psi_j z^j),$$

azaz

$$2 - \frac{3}{5}z - \frac{1}{5}z^2 = (1 + \frac{1}{20}z - \frac{1}{20}z^2)(\psi_0 + \psi_1 z + \sum_{j=2}^{\infty} \psi_j z^j).$$

Innen $2 = \psi_0$ és $-3/5 = \psi_1 + 1/20\psi_0$, azaz $\psi_1 = -7/10$. Ebből

$$B(z) - (\psi_0 + \psi_1 z)A(z) = -\frac{13}{200}z^2 - \frac{7}{200}z^3$$

adódik. (Megj. Itt a konstans és elsőfokú tagoknak ki kell esnie.) Tehát

$$(2 - \frac{3}{5}z - \frac{1}{5}z^2)\hat{X}_{t+2} = (-\frac{13}{200}z^2 - \frac{7}{200}z^3)X_{t+2},$$

amiből

$$\hat{X}_{t+2} = \frac{3}{10}\hat{X}_{t+1} + \frac{1}{10}\hat{X}_t - \frac{13}{400}X_t - \frac{7}{400}X_{t-1}$$

a keresett rekurzió kétlépéses előrejelzés esetén.

2. Vegyük az

$$X_t + \frac{1}{20}X_{t-1} - \frac{1}{20}X_{t-2} = 2\varepsilon_t$$

egyenlet mindkét oldalának kovarianciáját X_t -vel, ebből

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_t + \frac{1}{20}X_{t-1} - \frac{1}{20}X_{t-2}, X_t) &= \text{cov}(2\varepsilon_t, X_t) = \text{cov}(2\varepsilon_t, \psi_0\varepsilon_t) = \\ &= 2\psi_0\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = 2\psi_0\sigma^2 = 12 \end{aligned}$$

adódik. (Figyelem: itt majdnem mindenki lehalgyta a 2-es szorzót a jobb-oldalon, és lemásolta változtatás nélkül azt, ami a gyakorlaton levő feladat megoldásában szerepelt.) A baloldali kovariancia kifejtéséből

$$R_X(0) + \frac{1}{20}R_X(1) - \frac{1}{20}R_X(2) = 12$$

adódik. Vegyük most az eredeti egyenlet kovarianciáját X_{t-1} -gyel, ebből

$$\text{cov}(X_t + \frac{1}{20}X_{t-1} - \frac{1}{20}X_{t-2}, X_{t-1}) = \text{cov}(2\varepsilon_t, X_{t-1})$$

azaz

$$R_X(1) + \frac{1}{20}R_X(0) - \frac{1}{20}R_X(1) = 0$$

adódik hiszen ε_t és X_{t-1} független.

Tudjuk, hogy léteznek olyan $C_1, \dots, C_p$ konstansok, hogy

$$R_X(k) = \sum_{j=1}^p \left(\frac{1}{g_j}\right)^{|k|},$$

ahol p az $A(z) = 1 + 1/20z - 1/20z^2$ gyökeinek száma, azaz most $p = 2$, és $g_1 = -4$, $g_2 = 5$ az $A(z)$ polinom gyökei. Így $R_X(0) = C_1 + C_2$, $R_X(1) = (-1/4)C_1 + (1/5)C_2$, $R_X(2) = (-1/4)^2C_1 + (1/5)^2C_2 = 1/16C_1 + 1/25C_2$. Így a fentiekből a köv. két egyenlet adódik:

$$(C_1 + C_2) + \frac{1}{20}(-\frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{5}C_2) - \frac{1}{20}(\frac{1}{16}C_1 + \frac{1}{25}C_2) = 12,$$

és

$$(-\frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{5}C_2) + \frac{1}{20}(C_1 + C_2) - \frac{1}{20}(-\frac{1}{4}C_1 + \frac{1}{5}C_2) = 0.$$

Azaz $C_1 \frac{315}{320} + C_2 \frac{504}{500} = 12$ és $C_1(-\frac{15}{80}) + C_2 \frac{24}{100} = 0$, amiből $C_1 = 6.77$ és $C_2 = 5.29$. Tehát

$$R_X(k) = \left(-\frac{1}{4}\right)^{|k|}6.77 + \left(\frac{1}{5}\right)^{|k|}5.29.$$

Sztochasztikus folyamatok 6. házi feladat megoldások

1.

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \sigma^2 \left| \frac{B(e^{it})}{A(e^{it})} \right|^2 = \sigma^2 \left| \frac{1 - \frac{1}{2m}e^{it}}{1 - \frac{1}{3}e^{it}} \right|^2 = \sigma^2 \frac{(1 - \frac{1}{2m}e^{it})(1 - \frac{1}{2m}e^{-it})}{(1 - \frac{1}{3}e^{it})(1 - \frac{1}{3}e^{-it})} = \\ &= \sigma^2 \frac{1 - \frac{1}{m} \cos t + \frac{1}{4m^2}}{1 - \frac{2}{3} \cos t + \frac{1}{9}}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}R_X(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_X(u) e^{iuk} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-m|u|} e^{iuk} du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} e^{-m|u|} e^{iuk} + \overline{\int_0^{\pi} e^{-m|u|} e^{iuk}} \right] du = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\pi} e^{-m|u|} e^{iuk} du = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{(-m+ik)u}}{-m+ik} \right]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{(-m+ik)\pi} - 1}{-m+ik} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{[e^{(-m+ik)\pi} - 1](-m-ik)}{m^2 + k^2} = \\ &= \frac{1}{\pi(m^2 + k^2)} \operatorname{Re} [(e^{-m\pi}(\cos k\pi + i \sin k\pi) - 1)(-m-ik)] = \frac{-m}{\pi(m^2 + k^2)} [e^{-m\pi}(-1)^k - 1]\end{aligned}$$

3. Létezik kauzális MA(∞) előállítás, acsa, ha $\int_{-\pi}^{\pi} |\ln e^{-1/u^2}| du < \infty$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln e^{-1/u^2}| du = 2 \int_0^{\pi} 1/u^2 du = 2 \left[-\frac{1}{u} \right]_0^{\pi} = +\infty. \text{ Így nem létezik kauzális MA}(\infty) \text{ előállítás.}$$

Sztochasztikus folyamatok 7. házi feladat megoldások

1. Egy példa a sok közül, amit írtatok, és tetszett:

4 város között személyvonat közlekedik, A,B; B,C illetve C,D között van vasúti pálya. Egy ellenőr utazik a városok között a következő átmenetvalószínűség mátrix szerint:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/10 & 1/10 & 8/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mindig csak vasúton szomszédos városba tud utazni, indőnként kicsit megpihen, illetve időnként lustaságból nem megy tovább, és valamelyik (A,C vagy D) városban időzik. D városban az állomáson van egy játékterem, és kalauzunk szenvedélyes játékos, így, ha odaérkezik, akkor nem tud ellenálni a kísértésnek, és a nap hátralevő részét a játékteremben tölti.

2. a) $p = 1/2$, $q = 1/4$.

b) 1.mo.

$$P(X_2 = 1 | X_0 = 2) = p_{2,1}^{(2)} = p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} + p_{23}p_{31} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{8}.$$

2.mo

$$\Pi^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/8 & 1/8 \\ 3/8 & 19/48 & 11/48 \\ 1/6 & 11/36 & 19/36 \end{pmatrix},$$

így $P(X_2 = 1 | X_0 = 2) = (\Pi^2)_{2,1} = 3/8$.

c) A ML homogén, így $P(X_5 = 1 | X_3 = 2) = P(X_2 = 1 | X_0 = 2) = 3/8$.

d) Ha X_0 eloszlása $Q(X_0) = (2/10, 3/10, 5/10)$, akkor X_2 eloszlása

$$\begin{aligned} Q(X_2) &= Q(X_0)\Pi^2 = (2/10, 3/10, 5/10) \begin{pmatrix} 1/2 & 3/8 & 1/8 \\ 3/8 & 19/48 & 11/48 \\ 1/6 & 11/36 & 19/36 \end{pmatrix} = \\ &= (71/240, 499/1440, 103/288). \end{aligned}$$

e) Felhasználva a Markov tulajdonságot:

$$\begin{aligned} P(X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1) &= \\ P(X_0 = 3)P(X_1 = 2 | X_0 = 3)P(X_2 = 2 | X_1 = 2)P(X_3 = 1 | X_2 = 2) &= \\ P(X_0 = 3)p_{32}p_{22}p_{21} &= 5/10 \cdot 1/3 \cdot 1/4 \cdot 1/2 = 1/48. \end{aligned}$$

f) Rajzoljuk le a ML átmenetgráfját! A gráfnak 3 csúcsa van $\{1, 2, 3\}$, és az i csúcsból a j csúcsba ($i = j$ is lehet) akkor rajzolunk irányított élet, ha az egy lépéses átmenetvalószínűség $p_{i,j} = (\Pi)_{i,j} > 0$. Mivel a Π mátrixban csak két elem $p_{1,3} = p_{3,1} = 0$, ezért az átmenetgráfban csak két irányított él $(1, 3)$ és $(3, 1)$ nincs berajzolva, és 7 irányított él van az ábrán: $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2),$

$(2,1),(2,3),(3,2)$ (e leírás helyett elég rajzolni). Az irreducibilitás azt jelenti, hogy az átmenetgráfban minden pontból minden pontba el lehet jutni irányított élek mentén. Ez a gráfból látszik, hogy teljesül (pl. 1-ből 3-ba el lehet jutni két lépéssel: $(1,2),(2,3)$ mentén, 1-ből 1-be egy lépéssel: az $(1,1)$ hurokél mentén, stb.). Így a ML irreducibilis. Ez a Π mátrixról is leolvasható, ugyanis Π -ben a főátló alatti és feletti mellékátlóban is csupa pozitív elemek vannak, és szerepelt az a tétel, hogy ilyenkor a ML irreducibilis. (Megj. Ez az irreducibilitásnak elégséges, de nem szükséges feltétele.)

g) A Markov lánc aperiodikus. Indoklás: legyen $L_i = \{n \in \mathbb{N}^+ : p_{i,i}^{(n)} > 0\}$, azaz L_i azon pozitív egész számok halmaza, ahány lépésben el lehet jutni i -ből i -be pozitív valószínűséggel. Most $L_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$, $L_2 = \{1, 2, 3, \dots\}$, $L_3 = \{1, 2, 3, \dots\}$, mivel a három hurokél miatt akárhány lépésben el lehet jutni i -ből i -be pozitív valószínűséggel. Az L_1 -ben szereplő számok legnagyobb közös osztója 1, így az 1 állapot aperiodikus. Az L_2 -ben szereplő számok legnagyobb közös osztója 1, így a 2 állapot is aperiodikus. Az L_3 -ben szereplő számok legnagyobb közös osztója 1, így a 3 állapot is aperiodikus. Mivel mindegyik állapot aperiodikus, ezért a ML is aperiodikus. Az aperiodicitás a Π mátrixról is leolvasható, mivel a főátlóban minden elem pozitív, ezért a ML aperiodikus. (Megj. (Tétel volt), hogy ha a ML irreducibilis, akkor elég egy állapotról tudni, hogy aperiodikus, ebből következik, hogy az egész ML is aperiodikus. Így, pl. (Tétel volt) ha a főátló alatti és feletti mellékátlóban csupa pozitív elemek vannak, és a főátlóban legalább egy elem pozitív, akkor a ML irreducibilis és aperiodikus. Azonban van olyan ML is, amelyre nem teljesül, hogy a főátló alatti és feletti mellékátlóban csupa pozitív elemek vannak, és a főátlóban legalább egy elem pozitív, és a ML mégis irreducibilis és aperiodikus.)

Megj. zh-ban, vizsgában indokolni kell, hogy a ML irreducibilis ill. aperiodikus, ha ezt állítjuk, persze az indoklás lehet rövid, de helytálló.

átmenetvalószínűség mátrix szerint:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/10 & 1/10 & 8/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sztochasztikus folyamatok 8. házi feladat megoldások

1. A játékot leíró Markov-lánc állapottere $S = \{0, 1, 2, 3\}$, átmenetvalószínűség mátrixa

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Irreducibilis a ML, mivel pl. van egy 0,1,2,3,0 irányított kör a ML gráfjában, így minden pontból minden pontba el lehet jutni pozitív valószínűséggel. Mivel $p_{00} > 0$ (azaz van egy hurokél is), a ML aperiodikus is.

$\underline{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ eloszlás stacionárius eloszlás, ha $\underline{p}\Pi = \underline{p}$ avagy $\Pi^T \underline{p}^T = \underline{p}^T$. Ezt átrendezve $(\Pi - E)^T \underline{p}^T = \underline{0}^T$ adódik, azaz

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az együttható mátrix második sorához az első hozzáadva

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

majd a harmadikhoz a másodikat hozzáadva

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Az első három sort 3-mal szorozva a következő egyenletek adódnak (a negyedik egyenletből ugyanaz adódna mint a harmadikból):

$-p_0 + 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 0$, $-p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 0$, $-p_2 + 2p_3 = 0$ Ebből $p_2 = 2p_3$, $-p_1 + 4p_3 + 2p_3 = 0$, azaz $p_1 = 6p_3$, így $-p_0 + 12p_3 + 4p_3 + 2p_3 = 0$, azaz $p_0 = 18p_3$. Mivel $\underline{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ eloszlás, $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 27p_3 = 1$, ezért $p_3 = 1/27$, $p_2 = 2/27$, $p_1 = 6/27$, $p_0 = 18/27$. Egyensúlyi állapotban a pénzem várható értéke $0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 0 \cdot 18/27 + 1 \cdot 6/27 + 2 \cdot 2/27 + 3 \cdot 1/27 = 13/27$.

2. Irreducibilis a Markov lánc, mert minden állapotból minden állapotba el lehet jutni pozitív valószínűséggel. (Ez látszik a gráfjáról, ha lerajzoljuk.) A ML aperiodikus is, noha most nincs hurokél a gráfban. Mivel a ML irreducibilis, elég pl. az 1 állapotról belátni, hogy aperiodikus. 1-ből az 1-be vissza lehet térni 2 lépésben, 4 lépésben, 7, lépésben, stb. pozitív valószínűséggel. E számok legnagyobb közös osztója 1, így az 1 állapot aperiodikus.

3. Egy példa

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ennél több 0 nem lehet a mátrixban, ha irreducibilis és aperiodikus a ML. Ez valóban irreducibilis, ez leolvasható a gráfról, ahogy az is, hogy 1-ből az 1-be vissza lehet térni 3 lépésben is és 4 lépésben is, melyek legnagyobb közös osztója 1. Így az 1 állapot, és az irreducibilitás miatt az egész ML is aperiodikus.

4. A játék leírható egy ML-cal, melynek állapottere $S = \{A, B, C\}$, átmenetvalószínűség mátrixa

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

A gráfról látható, hogy irreducibilis a ML és aperiodikus is, mivel a gráfban van hurokél is. A stacionárius és egyben határeloszlás a fentiekhez hasonlóan határozható meg, $p_1 = 4/25, p_2 = 9/25, p_3 = 12/25$ adódik. Annak az esélye, hogy Botondnál van a kulcs $9/25$.

Mivel a ML stabil, ezért a π átmenetmátrix π^n hatványa konvergál egy olyan mátrixhoz, amelynek minden sorában a $p_1 = 4/25, p_2 = 9/25, p_3 = 12/25$ stacionárius eloszlás van. Ezt tapasztalhatjuk, ha nagy n -re kiszámoljuk π^n -t.

Sztochasztikus folyamatok 9. házi feladat

1. A Nagyesze professzor szobája előtt tekergő sor hosszát bináris modell segítségével írhatjuk le. Az érkezés valószínűsége most minden percben $q = 0.45$, a kiszolgálás valószínűsége $p = 0.5$. Az átmenetvalószínűségi mátrix:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a & r & b & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & r & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & r & b & 0 \dots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

ahol $a = (1-q)p = 0.55 \cdot 0.5 = 0.275$, $b = (1-p)q = 0.5 \cdot 0.45 = 0.225$, $r = 1-a-b = 0.5$. Mivel $q < p$, a rendszer stabil. A stacionárius eloszlás $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$, ahol $\omega_0 = 1 - q/p = 1 - 0.45/0.5 = 0.1$, $\omega_i = \omega_0(b/a)^i/(1-p) = 0.1(9/11)^i/0.5 = 0.2(9/11)^i$. Az átlagos sorhossz $EX_\infty = q(1-q)/(p-q) = 0.45 \cdot 0.55/0.05 = 4.95$. Annak a valószínűsége, hogy több mint három diák áll sorban: $P(X_\infty > 3) = 1 - P(X_\infty = 0) - P(X_\infty = 1) - P(X_\infty = 2) - P(X_\infty = 3) = 1 - \omega_0 - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = 1 - 0.1 - 0.164 - 0.134 - 0.109 = 0.492$

A bináris modellben érvényes a Little a formula, és az alapján az átlagos késleltetés: $\bar{D} = E(X_\infty)/E(\text{percenkénti érkezések száma}) = 4.95/0.45 = 11$, avagy $\bar{D} = (1-q)/(p-q) = 0.55/0.05 = 11$. Azaz átlagosan 11 percet kell várnia egy diáknak, hogy beírják a jegyét.

2. A folytonos idejű ML állapottere $S = \{M, L, N\}$. Mivel álagosan 3, 5 ill. 4 hónapig tartózkodik ezeken a helyeken, ezért a Q rátamátrix főátlójában rendre $q_{11} = -1/3$, $q_{22} = -1/5$, $q_{33} = -1/4$ áll. A rátamátrix sorösszegei 0-k. Mivel Marseille-ből mindig Nápolyba utazik, ezért $q_{12} = 0$ és $q_{13} = 1/3$. Lisszabonból kétszer olyan valószínű, hogy Marseille-be megy, mint hogy Nápolyba, így $q_{21} = 2q_{23}$, másrészt $q_{21} + q_{23} = -q_{22} = 1/5$, tehát $3q_{23} = 1/5$, azaz $q_{23} = 1/15$ és $q_{21} = 2/15$. Nápolyból egyforma valószínűséggel megy a másik két városba, így $q_{31} = q_{32}$, másrészt $q_{31} + q_{32} = -q_{33} = 1/4$, azaz $q_{31} = 1/8$ és $q_{32} = 1/8$. Tehát

$$Q = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/15 & -1/5 & 1/15 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

A ML átmeneti ráta grájában (ott húzunk be irányított éleket, ahol a Q mátrixban pozitív szám áll, hurokélek most nincsenek, ezt zh-ban vizsgában le kell rajzolni) minden csúcsból minden csúcsba el lehet jutni irányított úton, így a ML irreducibilis. A ML véges állapotterű, és ez a kettő együtt folytonos idejű ML esetén elég is a stabilitáshoz. Így létezik határeloszlás, ami az egyértelmű stacionárius eloszlás. Ez kielégíti a $\underline{p}Q = \underline{0}$ egyenletet. Ezt transzponálva a következőt kapjuk:

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/15 & 1/8 \\ 0 & -1/5 & 1/8 \\ 1/3 & 1/15 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A harmadik sorhoz az első sort hozzáadva ebből

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/15 & 1/8 \\ 0 & -1/5 & 1/8 \\ 0 & 3/15 & -1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adódik. Így két egyenletet kapunk (a harmadikból ugyanazt kapnánk, mint a másodikból): $-1/3p_1 + 2/15p_2 + 1/8p_3 = 0$, és $-1/5p_2 + 1/8p_3 = 0$. Így $p_3 = 8/5p_2$, $p_1 = 3(2/15p_2 + 1/5p_2) = p_2$, azaz $p_1 + p_2 + p_3 = p_2 + p_2 + 8/5p_2 = 18/5p_2 = 1$. Tehát $p_2 = 5/18$, $p_1 = 5/18$, $p_3 = 8/18$. Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott napon Lisszabonban van: $p_2 = 5/18$, ha tudjuk, hogy a három város valamelyikében van.

3. a) Mivel az autók érkezése percenkénti $\lambda = 4$ intenzitású Poisson folyamattal reprezentálható, ezért az érkezések között eltelt idő $Exp(\lambda)$ eloszlású, azaz annak a valószínűsége, hogy érkezik autó 10 másodperc=1/6 perc alatt:

$$1 - e^{-\lambda t/6} = 1 - e^{-4 \cdot 1/6} = 1 - e^{-2/3} = 0.487$$

- b) A 10 másodperc alatt érkező autók száma $Poisson(\lambda t/6) = Poisson(4/6)$ eloszlású. Így $P(\text{megússza a kalandot}) = P(0 \text{ vagy } 1 \text{ autó jön } 10 \text{ másodperc alatt}) = e^{-4/6} + 4/6 e^{-4/6} = 0.856$.

- c) Annak a valószínűsége, hogy érkezik autó 30 másodperc=1/2 perc alatt: $1 - e^{-\lambda t/2} = 1 - e^{-4 \cdot 1/2} = 1 - e^{-2} = 0.865$ Ha csak 30 másodperc alatt tud átvánszorogni az úton, de egy autót ki tud kerülni, akkor $P(\text{megússza a kalandot}) = P(0 \text{ vagy } 1 \text{ autó jön } 30 \text{ másodperc alatt}) = e^{-2} + 2e^{-2} = 0.405$.

- d) Most ment el egy autó. Mivel $Exp(4)$ eloszlású perc múlva jön a következő, ezért várhatóan 1/4 perc=15 másodperc múlva jön a következő.

- e) Most ment el egy autó. Annak az esélye, hogy a következő autó több mint 30 másodperc múlva érkezik $= e^{-\lambda t/2} = 1 - e^{-4 \cdot 1/2} = e^{-2} = 0.135$.

- f) Most ment el egy autó. A következő 2 percben várhatóan 4 érkezik, azaz az érkező autók száma $Poisson(2\lambda) = Poisson(8)$ eloszlású. Így annak a valószínűsége, hogy a következő 2 percben 5 autó érkezik $= 8^5/5! e^{-8} = 0.092$. Annak a valószínűsége, hogy a következő két percben 5 autó és az azt követő három percben 4 autó érkezik $= 8^5/5! e^{-8} \cdot 12^4/4! e^{-12} = 0.092 \cdot 0.005 = 0.00046$, hiszen diszjunkt intervallumokról van szó, és 3 perc alatt várhatóan 12 autó érkezik, azaz az érkező autók száma $Poisson(12)$ eloszlású.

- g) Annak a valószínűsége annak, hogy 2 percen belül 5 autó és 3 percen belül 7 autó érkezik = annak a valószínűsége, hogy 2 percen belül 5 autó és az azt követő 1 percen pedig 2 autó érkezik. (A vizsgált eseményt fel kell írni diszjunkt intervallumokról szóló események uniójaként, mert csak a diszjunkt intervallumokon való érkezések száma független.) Így a keresett valószínűség: $8^5/5! e^{-8} \cdot 4^2/2! e^{-4} = 0.092 \cdot 0.147 = 0.00135$.

- h) A d)-g) kérdésekre, ugyanaz a válasz akkor is, ha az utolsó autó 1 perce ment el, és akkor is ha nem láttuk, hogy mikor ment el az utolsó autó, mivel homogén Poisson folyamat szerint érkeznek az autók, azaz az érkezések között eltelt idő exponenciális, tehát örökifjú eloszlású.