

Az előadáson szerepelt: sztochasztikus folyamat (időtengely  $\mathbb{N}$  vagy  $\mathbb{Z}$ ), trajektóriái, idősorok. Erősen ill. gyengén stac. folyamat. Független, azonos eloszlású val. változók illetve ezek összegéből képzett folyamat (véletlen bolyongás). Fehér zaj, mozgó átlag és autoregresszív folyamatok. Különbség korábbi évektől: a fehér zajról mindig felteszem, hogy 0 a várható értéke.

### Sztochasztikus folyamatok 3. gyakorlat

1. Legyen  $Z_t := \xi$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  valamely fix  $\xi$  val. változóra. Tegyük fel, az egyszerűség kedvéért, hogy  $\xi$  diszkrét értékkeszletű.

Ez egy erősen stacionárius folyamat (rövid meggondolás, nem bizonyítjuk precízen). Ha  $E\xi^2 < \infty$ , akkor gyengén is stacionárius. Számítsuk ki az  $R_Z(\cdot)$  kovarianciafüggvényt !

Emlékeztető: ha  $Y_t$  független, azonos eloszlású és  $EY_t = 0$ , akkor fehér zaj is, és gyengén stac.  $R_Y(0) = D^2Y_1$ ,  $R_Y(k) = 0$ ,  $k \neq 0$ . Érdekes összevetni az előző folyamattal: két véglet, ott minden időpontban ugyanazt látjuk, itt a különböző időpontokban független dolgokat látunk.

2. Tekintsük a (szimmetrikus) véletlen bolyongást (azaz  $X_0 = 0$ ,  $X_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$ ,  $t \geq 1$ , ahol  $\varepsilon_t$  független,  $P(\varepsilon_1 = \pm 1) = 1/2$ ). Ellenőrizzük, hogy  $X_t$  *nem* stacionárius folyamat !
3.  $t$  idő elteltével kb. milyen messze lesz  $X_t$  a 0-tól a fenti feladatnál ? Erre pontos választ nem tudunk adni a jelenlegi eszközeinkkel, de belátható, hogy léteznek  $C_1, C_2$  konstansok, hogy elég nagy  $t$ -re  $P(C_1\sqrt{t} \leq |X_t| \leq C_2\sqrt{t}) \geq 0.99$  (persze ide  $1 - \varepsilon$  is írható). Bizonyítás: centrális határeloszlás tételből jön ki, hogy  $X_t/\sqrt{t}$ -nek van sztenderd normális határeloszlása.
4. Legyen most  $P(\varepsilon_t = 1) = p > 1/2 > 1 - p = P(\varepsilon_t = -1)$ . Lássuk be, hogy ekkor  $X_t$  a végtelenbe tart (azaz minden  $\varepsilon > 0$ ,  $N > 0$  esetén elég nagy  $t$ -re  $P(X_t > N) \geq 1 - \varepsilon$ ). (Megint a CHT miatt.) Vegyük észre, hogy az előző esetben ( $p = 1/2$ ),  $X_t$  eloszlása mindig szimmetrikus, tehát (bár  $|X_t|$  bármilyen nagy lehet), nem tart  $\infty$ -be, mert lehet negatív és pozitív is. Viszont  $p > 1/2$ -nél tényleg  $\infty$ -be tart.

5. Legyen  $\varepsilon_t$  fehér zaj,  $D^2\varepsilon_0 = 1$ . Legyen  $m > 0$  egész. Számítsuk ki az

$$X_t = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^m \varepsilon_{t-i}$$

mozgó átlag folyamat kovarianciafüggvényét !

6. Számítsuk ki az alábbi mozgó átlag folyamat kovarianciafüggvényét:

$$X_t = 2\varepsilon_t - 5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

ahol  $\varepsilon_t$  fehér zaj,  $D^2(\varepsilon_t) = 2$ . (Itt rámutathatunk arra az általános szabályszerűségekre, hogy ha  $X$  olyan mozgó átlag, melyet a fehér zaj  $n$  egymást követő tagjából keverünk ki, akkor mindig  $R_X(k) = 0$ ,  $|k| > n$ -re.)

7. Legyen  $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  stacionárius autoregresszív folyamat, ahol  $E\varepsilon_t = 3$ ,  $D^2\varepsilon_t = 1$  és  $\varepsilon_t$  független sorozat. Számoljuk ki  $D^2X_t$ -t és  $EX_t$ -t. (Egyenletet lehet felírni mindkét mennyiségre, használni kell, hogy  $\varepsilon_{t+1}$  független  $X_t$ -től (hiszen ez utóbbi a  $\varepsilon_k$ ,  $k \leq t$ -k összege) és független valváltozók szórásnégyzete összeadódik.)
8. Legyen most  $X_t = 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  stacionárius autoregresszív folyamat melyre  $EX_t = 0$  és  $D^2X_t = 5$ . Mennyi  $E\varepsilon_t$ ,  $D^2\varepsilon_t$  ?
9. Elhangzott, egyelőre bizonyítás nélkül, hogy ha  $X_{t+1} = \phi X_t + \varepsilon_{t+1}$  stac. autoregresszív ahol  $|\phi| < 1$ , akkor  $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$ . Ezt felhasználva számoljuk ki (végtelen sorokkal) az  $X_t$  kovarianciafüggvényét.
10. Legyenek  $A, B$  független val.változók, 0 várható értékkel és egységnyi szórásnégyzettel. Lássuk be, hogy bármely  $\theta \in \mathbb{R}$  esetén

$$Z_t = A \sin(\theta t) + B \cos(\theta t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

gyengén stac. folyamat. Számítsuk ki a kovarianciafüggvényét ! (A várható érték konstans 0. A kovarianciák: trigonometrikus azonosság kell hozzá, hiszen

$$\text{cov}(Z_t, Z_s) = \sin(\theta t) \sin(\theta s) + \cos(\theta t) \cos(\theta s) = \cos(\theta(t-s)),$$

hiszen  $EAB = EAE B = 0$  a függetlenség miatt. Ez csak a  $t-s$  különbségtől függ, ezért  $Z$  stac. a folyamat és  $R_Z(k) = \cos(\theta k)$ .)

11. Tekintsük az

$$X_t = \frac{1}{m+1}X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

stacionárius autoregresszív folyamatot, ahol  $\varepsilon_t$  IID (azaz független, azonos eloszlású) 0 várható értékű és 4 szórásnégyzetű sorozat,  $m > 0$  pedig adott konstans. Legyen  $W_t$  egy másik IID sorozat, 0 várható értékkel és 9 szórásnégyzettel. Tegyük fel, hogy a  $W_t$  sorozat független  $\varepsilon_t$  sorozattól (ebből következőleg  $X_t$ -től is). Adjuk meg a  $Z_t := X_t + W_t$  sorozat  $R_Z$  kovarianciafüggvényét. Számoljuk ki az

$$U_t = Z_t - \frac{1}{m+1}Z_{t-1}$$

folyamat  $R_U$  kovarianciafüggvényét is. Ezek után próbáljuk meg kitalálni, milyen típusú folyamat az  $U$ ! [Megoldási javaslat: használjuk, hogy független dolgok kovarianciája 0 és a kovariancia bilineáris. Ismerjük fentebbről az autoregresszív folyamat  $R_X$  kovarianciafüggvényét. Az előadásról tudjuk  $R_W$ -t is (nagyon egyszerű). Mindezekből könnyen kiszámolható  $R_Z$ . Ha már megkaptuk  $R_Z$ -t, akkor  $R_Z$  segítségével (megintcsak a cov bilinearitását kihasználva) kiszámolható  $R_U$  is.]

**Megoldásvázlat, utolsó feladat:** Legyen  $m = 5$ . Először legyen  $k \neq 0$ , akkor

$$\text{cov}(Z_0, Z_k) = \text{cov}(X_0 + W_0, X_k + W_k) = \text{cov}(X_0, X_k),$$

mivel az  $X$ -ek a  $W$ -ktől függetlenek és  $W_0$  is független  $W_k$ -től. Ha  $k = 0$  akkor megmarad  $D^2X_0 + D^2W_0$ . Tehát, az órán tanultak alapján  $k \neq 0$ -ra:

$$R_Z(k) = R_X(k) = \frac{4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{|k|}}{1 - 1/36},$$

ha pedig  $k = 0$ :

$$R_Z(0) = R_X(0) + R_W(0) = \frac{4}{1 - 1/36} + 9.$$

Ezek után  $k \geq 2$  esetén:

$$\begin{aligned} R_U(k) &= \text{cov}(Z_0 - (1/6)Z_{-1}, Z_k - (1/6)Z_{k-1}) = \\ &= R_Z(k) - (1/6)R_Z(k - (-1)) - (1/6)R_Z(k - 1 - 0) + (1/36)R_Z(k - 1 - (-1)) = \\ &= R_X(k) - (1/6)R_X(k + 1) - (1/6)R_X(k - 1) + (1/36)R_X(k) = 0, \end{aligned}$$

némi számolgatással.

Ha  $k = 1$ , akkor a fentiekből:

$$R_U(1) = \frac{37}{36}R_Z(1) - (1/6)[R_Z(2) + R_Z(0)] = -1.5,$$

és

$$R_U(0) = \frac{37}{36}R_Z(0) - (1/6)[R_Z(1) + R_Z(-1)] = 13.24.$$

Mivel  $R_U(k) = 0$  ha  $|k| \geq 2$ , ezért mozgó átlag folyamattal van dolgunk (bár az nem világos, hogy mi most a fehér zaj).