

# Funkcionálanalízis

egyetemi jegyzet

2014. június 16.

# Tartalomjegyzék

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Alap terek</b>                                          | <b>1</b>  |
| 1.1. Metrikus tér . . . . .                                   | 2         |
| 1.2. Normált tér . . . . .                                    | 4         |
| 1.3. Skalárszorzat tér . . . . .                              | 5         |
| 1.4. Lényeges alap terek I. Sorozat terek . . . . .           | 6         |
| 1.5. Lényeges alap terek II. Függvényterek . . . . .          | 7         |
| <b>2. Metrikus tér topológiája</b>                            | <b>9</b>  |
| 2.1. Nyílt és zárt halmazok . . . . .                         | 9         |
| 2.2. Kompakt halmazok . . . . .                               | 9         |
| 2.3. Szeparábilis metrikus tér . . . . .                      | 12        |
| 2.4. Teljes metrikus tér . . . . .                            | 13        |
| <b>3. Lebesgue mérték és Lebesgue integrál</b>                | <b>16</b> |
| 3.1. Mérhető tér, mértéktér . . . . .                         | 16        |
| 3.2. Lebesgue mérték $\mathbb{R}$ -n . . . . .                | 17        |
| 3.3. Lebesgue mérték $\mathbb{R}^n$ -ben . . . . .            | 20        |
| 3.4. Mérhető függvények . . . . .                             | 21        |
| 3.5. Lebesgue-integrál. Bevezető gondolatok . . . . .         | 23        |
| 3.6. Lebesgue-integrál értelmezése . . . . .                  | 23        |
| 3.7. Lebesgue- és Riemann integrál összehasonlítása . . . . . | 26        |
| 3.8. $\mathcal{L}^p$ terek (Lebesgue terek) . . . . .         | 27        |
| 3.9. Általános $\mathcal{L}^p$ terek . . . . .                | 30        |
| <b>4. FOURIER analízis <math>\mathcal{L}^2</math>-ben</b>     | <b>32</b> |
| 4.1. Klasszikus Fourier sorfejtés. Ismétlés . . . . .         | 32        |
| 4.2. Ortonormált függvények . . . . .                         | 32        |
| 4.3. Ortogonalizáció, ON bázis konstrukciója . . . . .        | 35        |
| 4.4. Fourier sorfejtés $\mathcal{L}^2$ -ben . . . . .         | 38        |

|                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.5. Ortogonális polinom rendszerek . . . . .                         | 39        |
| <b>5. Absztrakt lineáris operátorok</b>                               | <b>45</b> |
| 5.1. Bevezetés . . . . .                                              | 45        |
| 5.2. Folytonosság, korlátosság . . . . .                              | 46        |
| 5.3. Banach algebra. Invertálhatóság . . . . .                        | 50        |
| 5.4. Operátor spektruma . . . . .                                     | 53        |
| 5.5. Duális tér . . . . .                                             | 57        |
| 5.6. Gyenge konvergencia . . . . .                                    | 60        |
| 5.7. Funkcionálok és operátorok Hilbert térben . . . . .              | 61        |
| <b>A. Appendix</b>                                                    | <b>65</b> |
| A.1. Kontrakció – fixpont tételek . . . . .                           | 65        |
| A.2. Elsőrendű DE megoldása a fixpont-tétel segítségével . . . . .    | 66        |
| <b>B. Általánosított függvények. (Disztribúciók)</b>                  | <b>69</b> |
| B.1. Lineáris funkcionálok a $C_0^\infty(\mathbb{R})$ téren . . . . . | 69        |
| B.2. Disztribúciók deriválása . . . . .                               | 71        |
| B.3. Általánosított függvények konvolúciója . . . . .                 | 74        |
| <b>C. Absztrakt operátorok alkalmazása egy QM példán</b>              | <b>76</b> |
| C.1. Fizikai példa . . . . .                                          | 76        |
| C.2. Matematikai modell és egy tétel . . . . .                        | 76        |
| C.3. Bizonyítás Hilbert térben (vázlat) . . . . .                     | 78        |
| <b>Irodalom</b>                                                       | <b>80</b> |

## Bevezetés

A Funkcionálanalízis szerves folytatása lesz az első évben tanult Matematikai Analízis I. és II. tárgyaknak. Akkor, első félévben, valós számsorozatokkal kezdtünk, majd egyváltozós valós függvényekkel folytattuk. Itt értelmeztük a folytonosságot, differenciálhatóságot, integrálszámítást. Második félévben mindezeket a fogalmakat kiterjesztettük a többváltozós, valós függvényekre, majd egy kicsit beletanultunk a vektorértékű, többváltozós függvények tudományába.

A Funkcionálanalízis egy olyan alapvető ága a matematikának, mellyel látszólag egészen különböző matematikai problémák egységes módon kezelhetők. A modern műszaki, fizikai problémák megoldásai elképzelhetetlenek a Funkcionálanalízis módszereinek alkalmazása nélkül. A Parciális differenciálegyenleteknél nélkülözhetetlenek az itt megtanulandó eszközök, és szinte nincs olyan mérnöki tudomány, ahol ne fordulnának elő parciális differenciálegyenletek.

A tárgy lényegét egészen tömören, megközelítőleg így foglalhatjuk össze: *a közöséges vektorok, a véges dimenziós Euklideszi tér fogalmát általánosítjuk*. Ennek segítségével egészen absztrakt halmazok – például sorozatok tere, függvény halmazok – vektortérként kezelhetők, ezeken sorozatok, függvények értelmezhetők. Általánosítjuk a határérték, folytonosság, derivált fogalmát, a jól ismert tételeket kiterjesztjük.

Valóban izgalmas és igen érdekes tudományterületbe kezdünk most.

## 1. Alap terek

Ebben a fejezetben bevezetjük azokat az alapvető "terek"-et, ahol dolgozni fogunk.

A Funkcionálanalízisben használt absztrakt terek az általános *topológikus tér*-től indulnak, egyre gazdagabb struktúrával:

Topológikus tér  $\ll$  Metrikus tér  $\ll$  Normált tér  $\ll$  Skalárszorzat tér

Ebben a felsorolásban balról jobbra haladva az *egyszerű* struktúra felől az *egyre bonyolultabb* struktúrákhoz jutunk.

Másrészt, éppen a struktúra "gazdagsága" miatt, a jobboldalon álló terekben sokkal könnyebb lesz tételeket bizonyítani, itt lesz "könnyű dolgozni" - de ezek a tételek sajnos nem feltétlenül lesznek igazak a tőlük balra álló terekben.

A konkrét feladat határozza meg, hogy melyik struktúrát tudjuk használni.

### 1.1. Metrikus tér

A *Topológikus tér* olyan általános fogalom, amire nem lesz szükségünk ebben a kurzusban. A *Metrikus terekkel* kezdünk.

**1.1. Definíció.** Adott egy  $M$  alaphalmaz (alaptér) és egy  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  függvény. Ezt metrikának nevezzük, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1.  $d(x, y) \geq 0$  - nem negatív.
2.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  - nem degenerált.
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  - szimmetrikus.
4.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  - háromszög egyenlőtlenség teljesül.

*Megjegyzés.* A fenti definícióban az  $M$  halmazon nincs semmiféle struktúra. Az elemeket nem tudjuk sem összeadni sem összeszorozni, nem tudunk sem nyújtani, sem forgatni. (Legalábbis most érdektelen mindez a metrikus tér szempontjából.)

#### Példák:

1.  $\mathbb{R}^n$  az alaptér. A metrika:

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2},$$

ha  $x = (x_1, \dots, x_n)$  és  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

2.  $M = \mathbb{C}$ , a metrika:  $d(z, w) = |z - w|$ .

3. Diszkrét metrika.

$M$  bármilyen halmaz. A metrika:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \neq y \\ 0 & \text{ha } x = y \end{cases}, \quad \forall x, y \in M.$$

4. Adott  $n \in \mathbb{N}$  rögzített természetes szám. Legyen  $M = \{n \text{ hosszúságú } 0-1 \text{ sorozatok}\}$ . Tehát  $M$  pontjai az  $n$  hosszú kódszavak:  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , ahol  $x_i \in \{0, 1\}$ .

A metrika azt méri, mennyiben különbözik két kódszó.

$$d(x, y) = \#\{i \mid x_i \neq y_i\}.$$

Pl.  $n = 5$  és  $x = (0, 0, 0, 1, 1)$ ,  $y = (1, 0, 0, 1, 0)$ . Ekkor a távolság  $d(x, y) = 2$ .

(Kódelméletből ismerős lehet a példa.)

1. Gyakorlat. Gondoljuk meg, hogy valóban metrika.

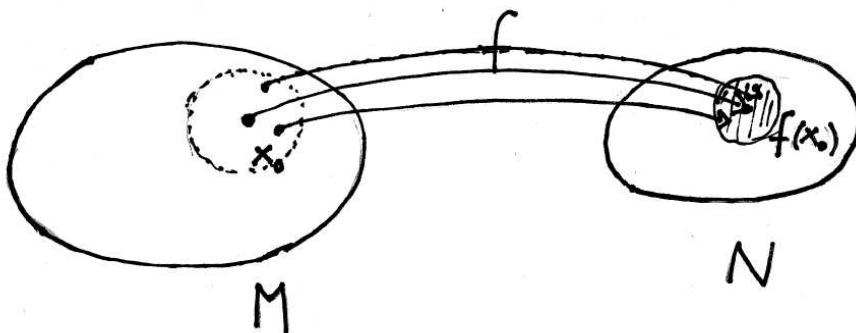
**1.2. Definíció.**  $(M, d)$  egy metrikus tér.  $(x_n) \subset M$  sorozat a térben. Azt mondjuk, hogy  $(x_n)$  konvergens és  $(x_n)$  határértéke  $x_0$ , ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists N$  melyre

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon \quad \text{ha} \quad n \geq N.$$

1. Feladat. Gondoljuk meg, hogy a  $(\mathbb{R}, d)$ , diszkrét metrikus térben melyek a konvergens sorozatok.

**1.3. Definíció.**  $M$  és  $N$  metrikus terek, hozzá tartozó metrikákkal:  $(M, d_M)$  és  $(N, d_N)$ . Adott egy függvény  $f : M \rightarrow N$ . Legyen  $x_0 \in M$  tetszőleges pont. Az  $f$  függvény folytonos  $x_0$ -ban, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists \delta > 0$  melyre

$$d_M(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$



2. Feladat. Gondoljuk meg, hogy ha a képtérben a diszkrét metrika van, akkor csak a konstans függvény folytonos.

3. Feladat. Ha az alaptérben a diszkrét metrika van, mikor lesz a függvény folytonos?

## 1.2. Normált tér

A most következő struktúrákban az alaptérrel feltesszük, hogy *vektortér*. Ez a fogalom jól ismert Lineáris algebrából. Nagyon röviden, egy  $V$  halmaz vektortér - más szóval *lineáris tér* - a  $\mathbb{K}$  test felett, ha az elemek között értelmezve van egy összeadás (+) művelet, és a skalárral-való-szorzás művelete:

$$\begin{aligned} v_1, v_2 \in V &\Rightarrow v_1 + v_2 \in V \\ v_1 \in V, \lambda \in \mathbb{K} &\Rightarrow \lambda v_1 \in V \end{aligned}$$

és ezekre a műveletekre bizonyos (ismert) tulajdonságok teljesülnek. A  $\mathbb{K}$  testről egyelőre feltesszük, hogy  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , a valós számtest.

**1.4. Definíció.**  $V$  egy vektortér. A *norma* egy olyan  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1.  $\|v\| \geq 0$  - nem negatív.
2.  $\|v\| = 0 \iff v = 0$  - nem degenerált.
3.  $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$  - multiplikatív.
4.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  - háromszög egyenlőtlenség teljesül.

Ekkor  $(V, \|\cdot\|)$  *normált tér*.

### Példák.

1.  $V = \mathbb{R}$ ,  $\|x\| = |x|$ .
2.  $V = \mathbb{R}^n$ ,

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Ez az *Euklideszi norma*, vagy *négyzetes norma*.

3.  $\mathbb{R}^n$ -ben további normák:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

**1.1. Állítás.** A  $(V, \|\cdot\|)$  normált tér egyben metrikus tér is az alábbi metrikával:

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in V.$$

2. Gyakorlat. Gondoljuk meg, hogy ez valóban metrika.

**Példa folytatatása:**  $\mathbb{R}^2$ -ben a frissen definiált normákhoz tartozó metrikák, ha  $x = (x_1, x_2)$  és  $y = (y_1, y_2)$ :

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$$

(Rajzoljuk fel.)

**1.2. Állítás.**  $(\mathbb{R}, d)$  legyen a valós számok halmaza a  $d$  diszkrét metrikával. Ekkor nem létezik olyan norma, melyre a metrika  $d(x, y) = \|x - y\|$  alakban felírható lenne.

4. Feladat. Igazoljuk ezt az Állítást.

### 1.3. Skalárszorzat tér

**1.5. Definíció.** Legyen  $V$  egy vektortér. Adott egy  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  művelet az alábbi tulajdonságokkal:

1.  $\langle v, v \rangle \geq 0$  - nemnegatív.
2.  $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$  - nem degenerált.
3.  $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  - multiplikatív.
4.  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$  - szimmetrikus.
5.  $\langle v, w + u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle$  - disztributív.

Ekkor  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  valós skalárszorzat tér.

**Komplex skalárszorzat tér** esetén a skalárszorzat műveletre  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , tehát  $\langle v, w \rangle$  nem feltétlenül valós szám. A szimmetria tulajdonság ebben az esetben így módosul:

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}.$$

**Példák:**

$$1. V = \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$2. V = \mathbb{C}^n, \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \overline{w_i}$$

(Itt már jóval kevesebb példát sorolunk fel...)

**1.3. Állítás.** Egy  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  skalárszorzat térben norma értelmezhető:

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}.$$

*Megjegyzés.* A Gyakorlatokon belátják, hogy a fenti állítás nem megfordítható. Van olyan norma, amihez nincs skalárszorzat. Például  $\mathbb{R}^n$ -ben csak  $\|x\|_2$  esetén van skalárszorzat, a  $\|x\|_1$  és  $\|x\|_\infty$  normák mellett nincs!

**1.4. Állítás.** (Ismétlés DM-ből.) Cauchy-Schwartz-Bunyakovszkij (CBS) egyenlőtlenség.

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

## 1.4. Lényeges alap terek I. Sorozat terek

Legyen  $V$  a számsorozatok tere. Ez lineáris tér, melynek pontjai számsorozatok:

$$x = (x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Ebben alterek:

1.  $c \subset V$ : konvergens sorozatok. Lehetséges norma  $c$ -ben:

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x_i|, i = 1, 2, \dots\}.$$

2.  $c_0 \subset c$ : nullsorozatok.

3.  $c_0$ -ban altér  $\ell^1$  ("kis el-egy") tér.

$$\ell^1 = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}.$$

A norma:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|.$$

4. Másik fontos sorozattér ("kis el-kettő"):

$$\ell^2 = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}.$$

Itt a norma

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}.$$

**1.6. Definíció.**  $p \geq 1$  esetén az  $\ell^p$  teret ("kis el-p") így értelmezzük:

$$\ell^p = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}.$$

A norma ebben a térben:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}.$$

Ha  $p = +\infty$ , akkor a  $\ell^\infty$  tér ("kis el-végtelen"):

$$\ell^\infty = \{(x_n) : \text{korlátos}\}, \quad \|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

*Kérdés.* A fenti  $\ell^p$  normált tér mikor skalárszorzat tér?

*Válasz.*  $p = 2$  esetén  $\ell^p$ -ben VAN skalárszorzat:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Ha  $p \neq 2$ , akkor nem skalárszorzat tér.

*Megjegyzés.* Pontosabban azt írhatjuk, hogy  $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N})$ . Ez az általános Lebesgue-tér egy speciális esete. Később fogunk erről tanulni.

## 1.5. Lényeges alap terek II. Függvényterek

Adott halmazon értelmezett valós vagy komplex értékű függvények összegét és skalárszorosát értelmezni tudjuk (pontonként). Legyen  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  rögzített intervallum. Az itt értelmezett korlátos függvények halmaza vektortér:

$$V = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exists B : |f(x)| \leq B, \quad \forall x\}.$$

A térben norma definiálható:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}. \quad (1)$$

3. Gyakorlat. Gondoljuk meg, hogy valóban norma.

Ebben a térben alteret alkotnak a folytonos függvények, melyet  $C[a, b]$  jelöl:

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{folytonos}\}.$$

$C[a, b]$ -ben skalárszorzat is definiálható:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

4. Gyakorlat. Gondoljuk meg, hogy valóban skalárszorzat.

A skalárszorzat a megszokott módon egy normát indukál:

$$\|f\| = \left( \int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2}$$

Látható, hogy az így kapott norma különbözik attól, amit (1)-ben definiáltunk. Ez utóbbit másképp is fogjuk jelölni, és elnevezése *négyzetes norma*:

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b f^2(x)dx \right)^{1/2} \quad (2)$$

Az (1)-ben definiált norma elnevezése *sup-norma*, jele  $\|\cdot\|_\infty$ . Általában  $\|f\|_\infty \neq \|f\|_2$ .

*Jelölés.*  $C^2[a, b]$ : az  $[a, b]$ -n értelmezett folytonos függvények tere a négyzetes normával.

*Kérdés:*  $C[a, b]$ -n a *sup-norma* skalárszorzatból származik-e?

5. Feladat. A Válasz NEM. Igazoljuk.

## Dimenzió

Normált térben és skalárszorzat térben az alap valamilyen  $V$  vektortér. A tér dimenziója  $n$ , ha van  $n$  elemű  $v_1, \dots, v_n$  lineárisan független vektorokból álló generátor rendszer.

**1.7. Definíció.** A  $V$  vektortér *dimenziója*  $+\infty$ , ha minden  $n$ -re van  $n$  db független vektor.

**1.1. Következmény.** Az eddig megismert alap példák általában végtelen dimenziósak, pl.

$$\dim(\ell^p) = +\infty, \quad \dim(C[a, b]) = +\infty$$

6. Feladat. Adjunk meg tetszőleges  $n$ -re  $n$  elemű lineárisan független elemet  $\ell^\infty$ -ben és  $C[a, b]$ -ben.

## 2. Metrikus tér topológiája

Ebben a fejezetben olyan alapfogalmakat vezetünk be, melyeket majd a bonyolultabb struktúrákban is használni tudunk. Célszerű tehát a legegyszerűbb struktúrát tekinteni most. Legyen  $(M, d)$  egy metrikus tér.

### 2.1. Nyílt és zárt halmazok

**2.1. Definíció.**  $x \in M$  középpontú,  $r > 0$  sugarú nyílt gömb

$$B_r(x) = \{y : d(x, y) < r\}.$$

**2.2. Definíció.** Adott  $E \subset M$ .  $x \in E$  belső pontja  $E$ -nek, ha van olyan  $r > 0$ , melyre  $B_r(x) \subset E$ .  $E \subset M$  nyílt halmaz, ha minden pontja belső pont.

**2.3. Definíció.**  $t \in M$  torlódási pontja  $E$ -nek, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -ra

$$B_\varepsilon(t) \cap E \neq \emptyset.$$

$E \subset M$  zárt halmaz, ha minden  $t$  torlódási pontját tartalmazza.

**Példák:**

1.  $M = \mathbb{R}$ , Euklideszi távolsággal. Ekkor  $[a, b]$  zárt,  $(a, b)$  nyílt.
2.  $M = C[a, b]$ .  $k > 0$  fix valós szám.

$$E = \{f : |f(x)| < k, \quad \forall x\} \quad \Rightarrow \quad E \subset C[a, b] \text{ nyílt}$$

$$E_0 = \{f : |f(x)| \leq k, \quad \forall x\} \quad \Rightarrow \quad E_0 \subset C[a, b] \text{ zárt}$$

**2.1. Állítás.** Egy  $E$  halmaz pontosan akkor nyílt, ha  $M \setminus E$  zárt.

7. Feladat. Lássuk be a fenti állítást.

### 2.2. Kompakt halmazok

**2.4. Definíció.**  $E \subset M$  korlátos, ha  $\forall x \in E$ -hez  $\exists r > 0$ , melyre  $E \subset B_r(x)$ .

**2.5. Definíció.**  $E \subset M$  egy részhalmaz a térben.

*Lefedése:* olyan részhalmazok halmaza, melyek uniója tartalmazza  $E$ -t.

- *nyílt lefedés*, ha a lefedő halmazok nyíltak,
- *véges lefedés*, ha a lefedő halmazok száma véges.

**2.6. Definíció.**  $E \subset M$  *kompakt* halmaz, ha minden nyílt lefedésből kiválasztható véges lefedés.

**Példa.**  $\mathbb{R}$ -ben  $E_1 = [0, 1]$  kompakt és  $E_2 = (0, 1]$  NEM kompakt.

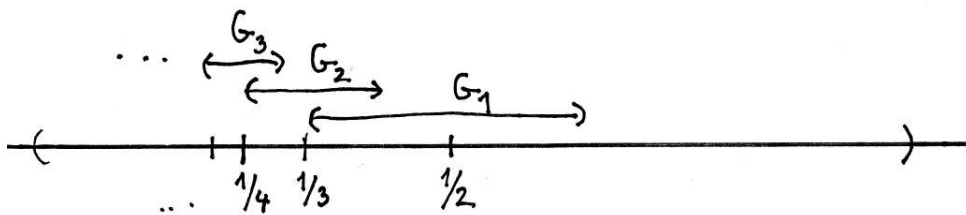
Belátjuk, hogy  $E_2$  NEM kompakt. Valóban, legyen

$$r_n = \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \quad G_n = B_{r_n} \left( \frac{1}{n} \right).$$

Ekkor  $(0, 1] \subset \bigcup G_n$ , és nem választható ki véges sok, ami lefedné.

8. Feladat. Fejezzük be a fenti bizonyítást. Miért nem választható ki véges lefedés a fenti példában?

1. ábra. A fenti Példabeli  $E_2 = (0, 1]$  halmaz nyílt fedése.



A fenti 2.6 Definíció alapján nem könnyű belátni egy konkrét halmazról, hogy valóban kompakt. Ezért egy másik kritériumot mondunk ki.

**2.7. Definíció.** Az  $E \subset M$  halmaz *sorozat kompakt* halmaz, ha minden  $(x_n) \subset E$  sorozatból kiválasztható konvergens  $(x_{n_k})$  sorozat, melynek határértéke  $E$ -beli:

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \in E.$$

**2.1. Tétel.** Tetszőleges metrikus térben egy  $E$  halmaz pontosan akkor kompakt, ha sorozat kompakt.

*Bizonyítás vázlat:* Indirekt. Tegyük fel, hogy  $M$  kompakt halmaz, és mégis van benne olyan sorozat, melynek nincs konvergens részsorozata. Jelölje ennek különböző pontjait  $y_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Ezek lefedhetők páronként *diszjunkt* nyílt gömbökkel, amihez hozzávéve a  $M \setminus \cup \{y_k\}$  halmazt egy nyílt lefedést kapunk - és nem választható ki belőle véges lefedés.

**2.2. Állítás.** Minden  $E \subset M$  kompakt halmaz korlátos.

9. Feladat. Lássuk be a fenti állítást.

**2.3. Állítás.** Minden  $E \subset M$  kompakt halmaz zárt.

10. Feladat. Lássuk be a fenti állítást.

Vajon megfordítható-e a fenti két állítás? Bizonyos esetben igen.

**2.2. Tétel.** (Heine-Borel tétel)  $\mathbb{R}^n$ -ben egy  $E \subset \mathbb{R}^n$  részhalmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.

*Bizonyítás.* A Bolzano-Weierstrass tételt Analízis I-ben beláttuk. Eszerint minden korlátos számsorozatból kiválasztható konvergens részsorozat. Ezért egy  $n$ -dimenziós korlátos pontsorozatból is kiválasztható konvergens részsorozat. Ennek határértéke a halmaz torlódási pontja, a zártság miatt halmazbeli.

Végtelen dimenzióban a Heine-Borel tétel nem igaz. Erre mutatunk egy példát.

**Példa.**  $C[0, 1]$ -ben tekintsük a zárt egységgörte:

$$B_1(0) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ folytonos, } \max |f(x)| \leq 1\}.$$

Ez korlátos és zárt is. Mégis, belátjuk, hogy nem kompakt. Megadunk egy olyan  $(f_n) \subset C[0, 1]$  sorozatot, melyre  $\|f_n\| = 1$  minden  $n$ -re.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = \frac{1}{n} \\ 0 & \text{ha } x \leq \frac{1}{n+1} \text{ vagy } x \geq \frac{1}{n-1} \\ \text{lineáris} & \text{ha } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \\ \text{lineáris} & \text{ha } x \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right) \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy a fenti sorozatnak nincs konvergens részsorozata. Tehát a zárt egységgör nem kompakt.

5. Gyakorlat. Lássuk be, ami "könnyen látható" a fenti példában.

*Megjegyzés:* Végtelen dimenzióban a kompakt halmaz szerepe az lesz, mint  $\mathbb{R}^n$ -ben egy korlátos, zárt halmaznak.

## 2.3. Szeparábilis metrikus tér

**2.8. Definíció.**  $(M, d)$  egy metrikus tér.  $A \subset B \subset M$  tetszőleges halmazok. Az  $A$  halmaz sűrűn van  $B$ -ben, ha

$$\forall x \in B \quad \forall \varepsilon > 0 : \quad \exists a \in A \quad d(x, a) < \varepsilon.$$

Ha  $A \subset M$  sűrű  $M$ -ben, akkor mindenütt sűrű.

**Példa.**  $\mathbb{R}$ -ben racionális számok halmaza  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  sűrű.

**2.9. Definíció.** Az  $(M, d)$  metrikus tér szeparábilis, ha létezik benne megszámlálható elemszámú mindenütt sűrű halmaz.

**Példák:**

1.  $(\mathbb{R}, d)$  diszkrét metrikával nem szeparábilis.
2.  $C[0, 1]$  szeparábilis.
3.  $C^2[0, 1]$  is szeparábilis.

Az utóbbiak az alábbi tétel alapján láthatók:

**2.3. Tétel.** (Weierstrass féle approximációs tétel). A polinomok tere

$$\mathcal{P}[0, 1] = \{p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ polinom}\}$$

sűrű  $C[0, 1]$ -ben.

Más szóval, ha  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény és  $\varepsilon > 0$  tetszőleges, akkor van olyan  $p$  polinom, melyre  $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$ .

(Ötlet a bizonyításhoz: Adott  $f$  függvényhez megkonstruálhatjuk az alábbi ú.n. Bernstein-polinomot:

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f(k/n) x^k (1-x)^{n-k},$$

ahol  $n \in \mathbb{N}$  tetszőleges. Megmutatható, hogy  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz létezik elegendően nagy  $n$ , melyre  $\|f - p_n\|_\infty < \varepsilon$ . Tehát  $\mathcal{P}[0, 1]$  sűrű  $C[0, 1]$ -ben.)

Legyen  $\mathcal{Q}[0, 1]$  a racionális együtthatós polinomok tere, ez megszámlálható számosságú.  $\mathcal{Q}[0, 1] \subset \mathcal{P}[0, 1]$  sűrű, ezért  $\mathcal{Q}[0, 1]$  sűrű  $C[0, 1]$ -ben is.

## 2.4. Teljes metrikus tér

**2.10. Definíció.**  $(x_n) \subset M$  *Cauchy sorozat*, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $N$  küszöbindex, melyre

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

**2.4. Állítás.** Ha  $(x_n)$  konvergens, akkor Cauchy sorozat.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $(x_n)$  konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Legyen  $\varepsilon > 0$  tetszőleges. Ekkor van olyan  $N$ , melyre

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon/2, \quad \forall n \geq N.$$

Ezért ha  $n, m \geq N$ , akkor a háromszögegyenlőtlenséget használva:

$$d(x_n, x_m) < d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

**2.11. Definíció.** Az  $M$  metrikus tér *teljes*, ha minden Cauchy sorozat konvergens.

**2.12. Definíció.**  $(V, \|\cdot\|)$  teljes normált tér *Banach-tér*.  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  teljes skalárszorzat tér *Hilbert-tér*.

### Példák.

1.  $\mathbb{R}^n$  teljes az ismert normákkal.
2.  $(\mathbb{R}, d)$  diszkrét metrikával teljes, hiszen minden Cauchy sorozat egy index után konstans, ezért konvergens.
3.  $C[a, b]$  vajon teljes-e?

lgén. Legyen  $(f_n) \subset C[a, b]$  Cauchy sorozat.

Ekkor  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists N$ , melyre  $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ . Ezért

$$\|f_n - f_m\| = \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

és emiatt MINDEN  $x$ -re

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Tehát rögzített  $x \in [a, b]$ -re az  $(f_n(x))$  számsorozat Cauchy sorozat, ezért létezik határértéke:

$$f_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Így  $f_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jól definiált függvény. Ráadásul  $f_0 \in C[a, b]$ , hiszen a supremum-norma-beli konvergencia ugyanaz, mint az egyenletes konvergencia.

11. Feladat. Lássuk be, hogy  $C[a, b]$ -ben a normabeli konvergencia egybeesik a függvények egyenletes konvergenciájával.

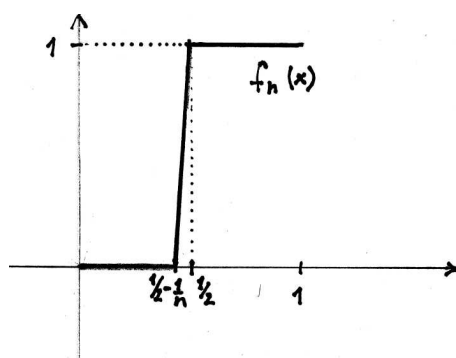
4.  $C^2[a, b]$  nem teljes. Itt a norma:

$$\|f - g\|_2 = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$$

**Példa.** Belátjuk be, hogy  $C^2[0, 1]$  nem teljes. Legyenek

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ 1 & \text{ha } x > \frac{1}{2} \\ \text{lineáris} & \text{ha } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ekkor könnyű számolással igazolható, hogy



$$\int_0^1 (f_n(x) - f_m(x))^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{azaz} \quad \|f_n - f_m\|_2 \rightarrow 0,$$

tehát ez a sorozat Cauchy sorozat. A határérték függvény, pontonként:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq 1/2 \\ 0 & \text{ha } x < 1/2 \end{cases}$$

Mivel  $f$  nem folytonos, ezért  $f \notin C^2[0, 1]$ !! Ennek a Cauchy sorozatnak nem létezik határértéke  $C^2[0, 1]$ -ben.

12. Feladat. Tekintsük  $C^2[-1, 1]$ -ben az alábbi függvényeket:

$$f_n(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \sqrt[n]{|x|}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Igazoljuk, hogy ez Cauchy sorozat, és nem konvergens.

13. Feladat. Lássuk be, hogy ennél több is igaz: a  $[0, 1]$ -n értelmezett négyzetesen integrálható függvények tere  $SEM$  teljes.

### 3. Lebesgue mérték és Lebesgue integrál

Az előző fejezet végén láttuk, hogy a  $[0, 1]$ -n értelmezett Riemann-integrálható függvények tere nem teljes. Ezért új integrálfogalom kellett. 1900 körül alkotta meg Henri LEBESGUE a mértékelméleten alapuló új integrálfogalmát. Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk a Lebesgue integrál bevezetésének legfontosabb lépéseit.

#### 3.1. Mérhető tér, mértéktér

Adott  $X$  egy tetszőleges halmaz. Az összes részhalmazok halmazát jelölje  $2^X$ . Legyen  $\mathcal{R} \subset 2^X$ ,  $X$  bizonyos részhalmazainak halmaza.

**3.1. Definíció.**  $\mathcal{R}$  algebra, ha teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1.  $X \in \mathcal{R}$ ,
2.  $A, B \in \mathcal{R}$  esetén  $A \cup B \in \mathcal{R}$ ,
3.  $A, B \in \mathcal{R}$  esetén  $A \setminus B \in \mathcal{R}$ .

**3.2. Definíció.** Az  $\mathcal{R}$  algebra  $\sigma$ -algebra, ha zárt a megszámlálható unióra is:

$$2. + \quad A_k \in \mathcal{R}, \quad k = 1, 2, \dots \text{ esetén } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$$

**3.3. Definíció.** Ha  $\mathcal{R} \subset 2^X$   $\sigma$ -algebra, akkor az  $(X, \mathcal{R})$  páros egy mérhető tér.  $\mathcal{R}$  elemei a mérhető halmazok.

**Példák.**

1.  $X$  tetszőleges halmaz, és  $\mathcal{R} = 2^X$ , összes részhalmazok halmaza.
2.  $X$  tetszőleges halmaz, és  $\mathcal{R} = \{\emptyset, X\}$ .
3.  $X = \mathbb{R}$ . A legszűkebb  $\sigma$ -algebra, ami tartalmazza a nyílt halmazokat BOREL  $\sigma$ -algebra, ennek jele  $\mathcal{B}$ . A  $\mathcal{B}$ -beli halmazok Borel-halmazok.

**3.4. Definíció.** A mérték egy olyan halmaz-függvény,  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  (azaz minden  $A \in \mathcal{R}$  esetén  $\mu(A) \geq 0$ , esetleg  $\mu(A) = +\infty$ ), mely  $\sigma$ -additív. Ez azt jelenti, hogy ha

$$A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{R}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

páronként diszjunkt halmazok, akkor

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

**3.5. Definíció.**  $(X, \mathcal{R}, \mu)$  mérték tér, ha  $\mathcal{R}$   $\sigma$ -algebra és  $\mu$  egy mérték.

**Példák.**

1. (folyt.)  $X$  tetszőleges,  $\mathcal{R} = 2^X$ ,  $A \in \mathcal{R}$  esetén legyen

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{ha véges elemszámú} \\ +\infty & \text{ha nem véges elemszámú} \end{cases}.$$

6. Gyakorlat. Lássuk be, hogy ez valóban mérték.

2.  $X$  véges vagy megszámlálható elemszámú,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ . A  $\sigma$ -algebra legyen  $\mathcal{R} = 2^X$ , az összes lehetséges részhalmazok halmaza. Adottak  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots \geq 0$  számok, melyekre  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ . A mérték:

$$A \subset X : \quad \mu(A) = \sum_{x_i \in A} p_i.$$

A következő példa már a Lebesgue mérték bevezetéséhez fog vezetni.

### 3.2. Lebesgue mérték $\mathbb{R}$ -n

Legyen  $X = \mathbb{R}$ . A mértéket és a mérhető halmazokat fokozatosan fogjuk definiálni.

1. lépés. Legyen  $\mathcal{I}$  a véges intervallumok halmaza. Ennek elemei:

$$I = \{x : a \leq x \leq b\}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

ahol a  $\leq$  reláció helyett  $<$  is lehet.  $\mathcal{I}$ -n mérték ("hosszúság"):  $m(I) = b - a$ .

2. lépés. Kiterjesztjük a mértéket az  $\mathcal{E}$  egyszerű halmazokra, ezeket így értelmezzük:

$$\mathcal{E} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A = \bigcup_{k=1}^n I_k, \quad I_k \in \mathcal{I} \text{ diszjunktak}\}$$

Ha  $A \in \mathcal{E}$ , akkor ennek mértéke legyen

$$m(A) = \sum_{k=1}^n m(I_k).$$

14. Feladat. Igazoljuk, hogy  $m$  valóban  $\sigma$ -additív  $\mathcal{E}$ -n. 7. Gyakorlat. Igazoljuk, hogy  $\mathcal{E}$  nem  $\sigma$ -algebra..

Mivel  $\mathcal{E}$  nem  $\sigma$ -algebra, ezért  $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, m)$  nem mérték tér

3. lépés.  $2^{\mathbb{R}}$ -n fogunk definiálni egy ú.n. külső mértéket. Ha  $A \subset \mathbb{R}$  tetszőleges halmaz, akkor legyen külső mértéke  $m^*(A)$ , amit így definiálunk:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}. \quad (3)$$

$$m^* : 2^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

8. Gyakorlat. Mutassuk meg, hogy  $m^*(A) = +\infty$  is lehet.

**3.1. Következmény.** Ha  $A \in \mathcal{E}$  egyszerű halmaz, akkor  $m^*(A) = m(A)$ .

9. Gyakorlat. Igazoljuk a fenti következményt.

DE - sajnos -  $m^*$  nem  $\sigma$ -additív. Szükség van még egy lépésre.

4. lépés. Amit eddig látunk:

$\mathcal{E}$ -n értelmezve van az  $m$   $\sigma$ -additív halmazfüggvény. Viszont  $\mathcal{E}$  nem  $\sigma$ -algebra

$2^{\mathbb{R}}$   $\sigma$ -algebra, viszont az  $m$  kiterjesztése már nem  $\sigma$  additív.

|                       |           |   |           |                             |
|-----------------------|-----------|---|-----------|-----------------------------|
| $\mathcal{E}$         | $\subset$ | ? | $\subset$ | $2^{\mathbb{R}}$            |
| nem $\sigma$ -algebra |           |   |           | $\sigma$ -algebra           |
| $m$ $\sigma$ -additív |           |   |           | $m^*$ nem $\sigma$ -additív |

A két véglet között VAN középút.  $\exists \mathcal{M}$   $\sigma$ -algebra, mely az egyszerű halmazokat tartalmazza:

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{M} \subset 2^{\mathbb{R}},$$

és  $m^*|_{\mathcal{M}} : \sigma$ -additív, azaz  $m^*$  megszorítása  $\mathcal{M}$ -re mérték, melyet Lebesgue mértéknek nevezünk. Ezt a konstrukciót nem mutatjuk be. A tankönyvben megtalálható, nem triviális.

**3.6. Definíció.**  $\mathcal{M}$  elemei az  $\mathbb{R}$ -beli Lebesgue-mérhető halmazok. Az  $m^*$  külső mérték megszorítása  $\mathcal{M}$ -re a Lebesgue mérték. Ezt  $m$  fogja jelölni.

*Kérdés.* Mik tartoznak  $\mathcal{M}$ -be? Milyenek a mérhető halmazok?

*Válasz.* Pontos választ nehéz adni. Egészen furcsa halmazok is mérhetőek.

Egyrészt, minden nyílt és minden zárt halmaz mérhető. Továbbá azok a halmazok, melyek nyílt és zárt halmazok megszámlálható uniója és metszeteként előállnak. (Ez azt jelenti, hogy  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ , bár  $\mathcal{B} \neq \mathcal{M}$ . Tehát a Borel halmazok mind mérhetőek, de nem minden mérhető halmaz Borel halmaz.)

Másrészt, VAN nem mérhető halmaz, bár nem könnyen konstruálható. (Egy ilyen példa a könyv Appendix részében található.)

**3.7. Definíció.** *Null-mértékű halmaz, melyre  $m(A) = 0$ . Jelölés:  $\mathcal{N}$ .*

$\mathcal{N}$  zárt a megszámlálható metszetre és unióra.  $\sigma$ -gyűrű, de nem  $\sigma$ -algebra, hiszen az alaphalmaz  $(\mathbb{R})$  nem null-halmaz. A mérték definíciója alapján  $m(A) = 0$  azt jelenti,

$$\inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k), A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\} = 0.$$

**3.2. Következmény.** *Ha  $A \in \mathcal{M}$  és  $m(A) = 0$ , akkor tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -ra megadható legfeljebb megszámlálható sok intervallum:  $I_k, k = 1, 2, \dots$  melyre:*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) < \varepsilon.$$

**3.3. Következmény.** *Ha  $A = \{x\} \in \mathcal{M}$  egy-elemű halmaz, akkor  $m(A) = 0$ . Ha  $A = \{x_1, \dots, x_n, \dots\} \subset \mathbb{R}$  megszámlálható elemszámú, akkor  $m(A) = 0$ .*

Van azonban olyan null-mértékű halmaz is, melynek számossága nem megszámlálható.

**Példa.** CANTOR halmaz. Több lépésben konstruáljuk meg.

0. lépés. Legyen  $C_0 = [0, 1]$ .

1. lépés. Legyen  $C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .

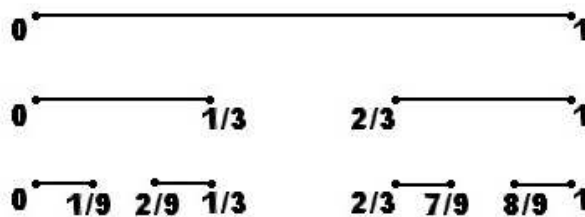
2. lépés. Legyen  $C_2 = C_1 \setminus (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \setminus (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ .

És így tovább... ami marad ...

**3.8. Definíció.**  $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$  a Cantor halmaz.

Mi marad? Egyrészt, minden lépésben a kihagyott intervallumok végpontjai:

$$0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \dots \in C.$$



2. ábra. A Cantor halmaz konstrukciójának első három lépése

De van más is.

15. Feladat. Igazoljuk, hogy pl.  $1/4\epsilon C$ .

**3.1. Állítás.** A Cantor halmaz alaptulajdonságai:

1.  $C$  zárt.
2.  $C$  számossága kontinuum.
3.  $C$  mérhető és  $m(C) = 0$ .

*Bizonyítás.* A zártság: minden  $k$  esetén  $C_k$  zárt. Zárt halmazok metszete zárt.

16. Feladat. Igazoljuk az állítás harmadik részét. (*Ötlet:* mennyi a kihagyott intervallumok össz-hossza?)

### 3.3. Lebesgue mérték $\mathbb{R}^n$ -ben

Általános eset, amikor  $X = \mathbb{R}^n$ . A mérték "jelentése"

$n = 1$ : hossz.

$n = 2$ : terület.

$n = 3$ : térfogat.

$n = 4$ : ...?

A konstrukció lépései teljesen hasonlóak az előző fejezetben elmondottakhoz. Egy  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$   $n$ -dimenziós intervallum mértéke legyen

$$m(I) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

$\mathcal{E}$  az egyszerű halmazok halmaza, amik véges sok diszjunkt intervallum uniójaként állnak elő. Ezekre a mérték kiterjesztése egyértelmű.  $A \subset \mathbb{R}^n$  esetén az  $m^*(A)$  külső mérték definíciója hasonló a (3) képlethez. A Lebesgue-mérték  $\mathbb{R}^n$ -ben is értelmezhető tehát, természetes módon.

### 3.4. Mérhető függvények

**3.9. Definíció.**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  függvény *mérhető*, ha minden  $a \in \mathbb{R}$  esetén az  $\{x : f(x) < a\} \subset \mathbb{R}^n$  halmaz Lebesgue mérhető.

A fenti definícióban a  $(-\infty, a)$  nyílt halmaz ösképet tekintjük.

**3.2. Állítás.** Az  $f$  függvény mérhetősége ekvivalens az alábbi állítások bármelyikével:

- $\forall a \in \mathbb{R}$  esetén  $\{x : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$  esetén  $\{x : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$
- $\forall a \in \mathbb{R}$  esetén  $\{x : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$

**3.4. Következmény.** Mérhető függvény esetén  $\forall a \in \mathbb{R}$ -ra  $\{x : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$

**3.3. Állítás.** Ha  $f, g$  mérhető függvények, akkor

- $f + g$  is mérhető.
- $f \cdot g$  is mérhető.
- $\min(f, g)$  is mérhető.

Ha  $(f_n)$  mérhető függvények sorozata, akkor  $(\inf f_n)$  és  $\lim(f_n)$  is mérhető.

*Bizonyítás.* (Vázlat) Belátjuk például, hogy  $f + g$  mérhető. Legyen  $a \in \mathbb{R}$ . Ekkor

$$\{x : f(x) + g(x) < a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x : f(x) < r\} \cap \{x : g(x) < a - r\}). \quad (4)$$

Ugyanis, ha  $f(x) + g(x) < a$  akkor  $f(x) < a - g(x)$ . Ezért  $\exists r$  racionális szám

$$f(x) < r \text{ és } r < a - g(x) \Rightarrow g(x) < a - r.$$

Ebből a (4) összefüggés következik.  $\{x : f(x) + g(x) < a\}$  előállítható megszámlálható sok mérhető halmaz uniójaként, tehát maga is mérhető.

**Példa.**  $E \subset \mathbb{R}^n$  mérhető. Legyen  $\chi_E$  az alábbi függvény:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

A  $\chi_E$  függvény mérhető. Ez az  $E$  karakterisztikus függvénye.

**3.10. Definíció.** Az  $f$  függvény *egyszerű*, ha  $R_f$  értékkészlete véges elemszámú. Ez azt jelenti, hogy  $R_f = \{y_1, \dots, y_n\}$ . Ekkor  $E_k = \{x : f(x) = y_k\}$  jelöléssel az  $f$  egyszerű függvény az alábbi alakban írható:

$$f = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \chi_{E_k}, \quad E_k \cap E_j = \emptyset, \quad y_k \in \mathbb{R}.$$

**3.4. Állítás.**  $f$  egyszerű függvény pontosan akkor mérhető, ha  $E_k \in \mathcal{M}$ .

*Megjegyzés.* Egyszerű függvény másik elnevezése lépcsős függvény.

**3.5. Állítás.** Ha  $f$  mérhető, akkor  $\exists(s_n)$  egyszerű függvények sorozata, melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$  egyenletesen. Továbbá, ha  $f$  nemnegatív, akkor monoton növő lépcsős függvényekből álló sorozat is létezik, melynek határértéke  $f$ .

**3.5. Következmény.** Az egyszerű függvények sűrűn vannak a mérhető függvények közt.

**Példa.** Ha  $f$  folytonos, akkor mérhető. Ez abból következik, hogy  $\forall a \in \mathbb{R}$  esetén  $E = \{x : f(x) < a\}$  nyílt halmaz, ezért mérhető is.

17. Feladat. Lássuk be az előző állítást. Igazoljuk, hogy ha  $f$  folytonos függvény, akkor  $E = \{x : f(x) < a\}$  nyílt halmaz minden  $a \in \mathbb{R}$  esetén.

**3.11. Definíció.**  $f, g$  mérhető függvények. Azt mondjuk, hogy  $f \sim g$  (ekvivalensek), vagy másképp  $f = g$  majdnem mindenütt (m.m.) ha

$$m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

$f = g$  m.m. nyilván ekvivalencia reláció.

10. Gyakorlat. Gondoljuk meg, hogy, ha  $f = g$  m.m. és  $g = h$  m.m., akkor  $f = h$  m.m.

**3.6. Állítás.** Ha  $f$  és  $g$  folytonosak és  $f = g$  m.m., akkor  $f(x) = g(x)$  minden  $x$ -re.

18. **Feladat.** Igazoljuk a fenti állítást.

Folytonosság nélkül nem igaz: ha  $f \sim g$ , akkor egyáltalán nem biztos, hogy  $f(x) = g(x) \forall x$  !!!

*Megjegyzés.* A mérhető függvények "majdnem" folytonos függvények.

**3.1. Tétel.** (Luzin)  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető függvény. Ekkor  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, melyre

$$m(\{x : f(x) \neq s(x)\}) < \varepsilon.$$

Tehát a mérhető függvényeken belül a folytonos függvények sűrűn vannak.

### 3.5. Lebesgue-integrál. Bevezető gondolatok

Az alaptér legyen  $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{M}$  pedig az  $[a, b]$ -beli mérhető halmazok összessége.

Alapvető gond a Riemann-integrálnál a határátmenet és integrál sorrendjének felcserélhetősége – illetve nem-felcserélhetősége. Nézzük a következő példát.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x = r_1, r_2, \dots, r_n \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol az  $[a, b]$  intervallumba eső racionális számok felsorolása  $\mathbb{Q} \cap [a, b] = \{r_1, r_2, \dots\}$ . Ekkor  $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ , Riemann integrálható. Mégis, a határérték függvény  $f \notin \mathcal{R}[a, b]$ :

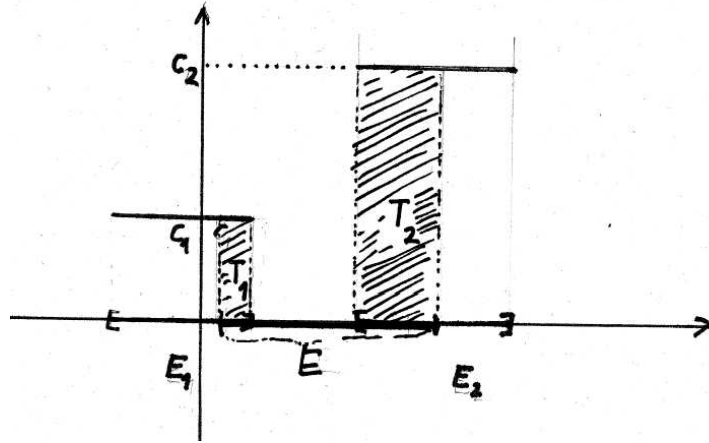
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

### 3.6. Lebesgue-integrál értelmezése

Fokozatosan fogjuk definiálni az integrált. Most is a szemléletes jelentés a függvény gráf alatti előjeles terület.

1. lépés. Tegyük fel, hogy  $f$  egyszerű, azaz

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}, \quad E_k \in \mathcal{M}, \quad E_k \cap E_j = \emptyset, \quad c_k \in \mathbb{R}$$



3. ábra. Az  $f = c_1\chi_{E_1} + c_2\chi_{E_2}$  lépcsős függvény integrálja az  $E$  halmazon. Az integrál megegyezik a két téglalap összterületével:  $T_1 = c_1 \cdot m(E \cap E_1)$  és  $T_2 = c_2 \cdot m(E \cap E_2)$

**3.12. Definíció.**  $E \in \mathcal{M}$ . Az  $f$  függvény integrálja az  $E$  halmazon az  $m$  mérték szerint:

$$\int_E f dm := \sum_{k=1}^n c_k m(E \cap E_k).$$

2. lépés. Tegyük fel, hogy  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  nemnegatív, mérhető függvény. Ekkor az integrált így értelmezzük:

$$\int_E f dm := \sup \left\{ \int_E s dm : s \text{ egyszerű, } s(x) \leq f(x) \text{ m.m.} \right\}$$

Megjegyzés. A fenti integrál értéke  $+\infty$  is lehet.

3. lépés.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges mérhető függvény. Először előállítjuk két nemnegatív függvény különbségeként:

$$f = f_+ - f_-$$

ahol

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{ha } f(x) < 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Ezek integrálja már jól definiált:

$$\int_E f_+ dm, \quad \int_E f_- dm.$$

**3.13. Definíció.**  $f$  Lebesgue-integrálható, ha a mind a két fenti integrál véges. Ebben az esetben  $f$  integrálja az  $E$  halmazon a Lebesgue mérték szerint:

$$\int_E f \, dm := \int_E f_+ \, dm - \int_E f_- \, dm.$$

$\mathcal{L}(R)$  jelöli az  $R$  halmazon értelmezett Lebesgue-integrálható függvények terét.

11. Gyakorlat. Gondoljuk meg, hogy  $\mathcal{L}(R)$  vektortér.

**3.6. Következmény.** Ha  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos, mérhető függvény, akkor Lebesgue-integrálható.

Tulajdonságok:

1.  $f, g \in \mathcal{L}$ , akkor

$$\int_E (f + g) \, dm = \int_E f \, dm + \int_E g \, dm, \quad \int_E c \cdot f \, dm = c \cdot \int_E f \, dm$$

2. Ha  $m(E) < \infty$  és  $a \leq f(x) \leq b$ , akkor

$$a \cdot m(E) \leq \int_E f \, dm \leq b \cdot m(E).$$

3. Ha  $f, g \in \mathcal{L}$  és  $f(x) \leq g(x)$ , akkor

$$\int_E f \, dm \leq \int_E g \, dm.$$

4. Ha  $f \in \mathcal{L}$ , akkor  $|f| \in \mathcal{L}$  és

$$\left| \int_E f \, dm \right| \leq \int_E |f| \, dm.$$

A Lebesgue integrál esetén ez fordítva is igaz: Ha  $|f| \in \mathcal{L}$ , akkor  $f \in \mathcal{L}$  is teljesül.

5. Ha  $m(E) = 0$ , akkor minden mérhető függvényre  $\int_E f \, dm = 0$ .

6. Ha  $E = E_1 \cup E_2$ , ahol  $E_1$  és  $E_2$  diszjunktak, akkor

$$\int_{E_1 \cup E_2} f \, dm = \int_{E_1} f \, dm + \int_{E_2} f \, dm.$$

5)+6) tulajdonságokból következik, hogy ha  $f = g$  m.m., akkor  $\int_E f \, dm = \int_E g \, dm$

2) és 3) tulajdonságok akkor is igazak, ha a megfelelő feltételek m.m. teljesülnek csak.

### 3.7. Lebesgue- és Riemann integrál összehasonlítása

**3.2. Tétel.** Ha  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , akkor  $f \in \mathcal{L}[a, b]$  is, és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f dm.$$

A bal oldalon a függvény Riemann integrálja van, a jobb oldalon pedig a Lebesgue integrál.

*Bizonyítás.* Könyvből átnézni.

*Megjegyzés.* Előny, hogy több függvény Lebesgue integrálható, mint Riemann integrálható. Például a Dirichlet függvény nem Riemann integrálható:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [0, 1], \text{ racionális} \\ 0 & \text{ha } x \in [0, 1], \text{ irracionális} \end{cases}$$

Mégis, mivel  $f = 0$  m.m. ezért Lebesgue integrálható, és

$$\int_{[0,1]} f dm = \int_{[0,1]} 0 dm = 0$$

*Megjegyzés.* Másik előny, hogy a határátmenet könnyen átlátható.

**3.3. Tétel.** (*Lebesgue féle monoton konvergencia tétel*) Adott nemnegatív, mérhető, monoton növekvő függvények sorozata

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots$$

melyre a pontonkénti határérték függvény:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Ekkor

$$\int_E f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dm.$$

Tehát nem szükséges a függvénysorozat egyenletes konvergenciája. Az integrál és a határátmenet a fenti feltétellel "automatikusan" felcserélhetők.

**3.4. Tétel.** (*Lebesgue féle dominált konvergencia tétel*) Adottak az  $(f_n)$ , mérhető függvények, a pontonkénti határérték  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ . Tegyük fel, hogy létezik  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$  közös felső korlát, melyre

$$f_n(x) \leq g(x), \quad \forall x, \forall n.$$

Ekkor

$$\int_E f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dm$$

### 3.8. $\mathcal{L}^p$ terek (Lebesgue terek)

Legyen  $p \geq 1$ .  $R = [a, b]$ .

**3.14. Definíció.** A  $\mathcal{L}^p(R)$  függvény-halmazt a következőképpen értelmezzük:

$$\mathcal{L}^p(R) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \int_R |f|^p dm < \infty\}$$

*Megjegyzés.* Ezek a "nagy el p" terek.

**3.7. Állítás.**  $\mathcal{L}^p$  vektortér.

*Bizonyítás.* Be kell látni, hogy  $\mathcal{L}^p(R)$  zárt a skalárral való szorzásra és az összegre. Ha  $f \in \mathcal{L}^p$ , akkor valóban  $c \cdot f \in \mathcal{L}^p$ . Ha  $f, g \in \mathcal{L}^p$ , akkor vajon  $f + g \in \mathcal{L}^p$ ? Más szóval, következik-e, hogy  $\int_R |f + g|^p dm < \infty$ ?

Használjuk fel az alábbi becslést:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Ebből következik, hogy

$$|a + b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq 2^p (\max\{|a|^p, |b|^p\}) \leq 2^p (|a|^p + |b|^p).$$

Ezt alkalmazva  $a = f(x)$  és  $b = g(x)$  választással azt kapjuk, hogy

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p), \quad \forall x \in R,$$

és ezt kiintegrálva:

$$\begin{aligned} \int_R |f + g|^p dm &< 2^p \left( \int |f|^p dm + \int |g|^p dm \right) < +\infty \\ &< \infty \qquad < \infty \end{aligned}$$

$\mathcal{L}^p$ -ben azonosnak tekintjük a m.m. egyenlő függvényeket. Más szóval, a fenti függvényteret faktorizáljuk  $\sim$  szerint. Az így faktorizált  $\mathcal{L}^p$  térben normát definiálunk. Ha  $f \in \mathcal{L}^p$ :

$$\|f\|_p = \left( \int_R |f|^p dm \right)^{1/p} \tag{5}$$

**3.8. Állítás.** A (5) képlet valóban normát definiál.

*Bizonyítás.*

- Nem negatív. Valóban.
- Nem degenerált. Ez azt jelenti, hogy  $\|f\|_p = 0$  pontosan akkor, ha  $f = 0$  m.m.
- Háromszög egyenlőtlenség. Ez nem triviális. Sőt, külön tétel formájában fogjuk kimondani.

12. Gyakorlat. Igazoljuk, hogy ha  $\int_R |f| dm = 0$ , akkor  $f = 0$  m.m.

**3.5. Tétel.** (*Minkovszkij-egyenlőtlenség*) Ha  $1 \leq p < +\infty$ , akkor

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

A bizonyítás nehéz, ha  $p > 1$ .

$p = 1$  esetben ez a tulajdonság "háromszög egyenlőtlenség" néven jól ismert: minden  $x$ -re  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ , ezért

$$\|f + g\|_1 = \int_R |f + g| dm \leq \int_R |f| dm + \int_R |g| dm = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

**3.15. Definíció.** Az  $f : R \rightarrow \mathbb{C}$  komplex értékű függvény mérhető, ha az

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)$$

kanonikus alakban szereplő valós értékű  $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : R \rightarrow \mathbb{R}$  függvények mérhetőek. Továbbá

$$\int_R f dm = \int_R (\operatorname{Re} f) dm + i \int_R (\operatorname{Im} f) dm$$

Legyen most  $p = +\infty$ . Értelmezni fogjuk az  $\mathcal{L}^\infty(X)$  függvényteret.

**3.16. Definíció.**  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  lényegében korlátos, ha van olyan  $M \in \mathbb{R}$  konstans és van olyan  $E \in \mathcal{M}$  null-mértékű halmaz, melyre:

$$|f(x)| \leq M, \quad \text{ha} \quad x \notin E.$$

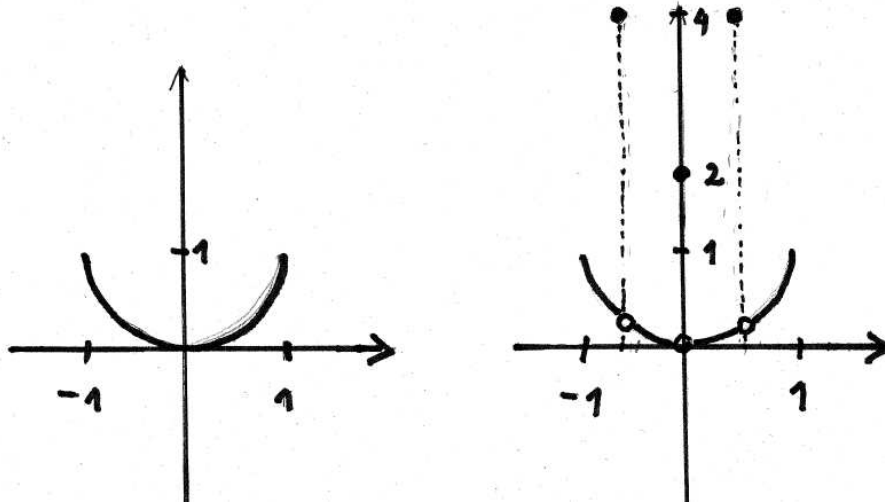
**3.17. Definíció.** Ha  $f$  lényegében korlátos, akkor lényeges supremum-a

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf \{M \mid \exists E, m(E) = 0 : |f(x)| \leq M, \forall x \notin E\}$$

**Példa.** Legyen  $X = [-1, 1]$ . Két függvényt adunk meg.

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \neq 0, x \neq \pm \frac{1}{2} \\ 2 & \text{ha } x = 0 \\ 4 & \text{ha } x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

A két függvény supremuma különböző:  $\sup f = 1$ ,  $\sup g = 4$ . Lényeges supremum



4. ábra. Az  $f$  és  $g$  függvények gráfja.

azonban ugyanaz, mert  $f = g$  m.m.:

$$\text{ess sup } f = 1, \quad \text{ess sup } g = 1.$$

**3.18. Definíció.** Az  $\mathcal{L}^\infty(X)$  függvénytér az  $X$ -n értelmezett, lényegében korlátos függvények összessége. A m.m. egyenlő függvényeket most is azonosaknak tekintjük.

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}, \text{ lényegében korlátos}\}.$$

$\mathcal{L}^\infty(X)$  nyilván vektortér. Normált tér lesz belőle az alábbi normával:

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup } f.$$

13. Gyakorlat. Gondoljuk meg, hogy ez valóban norma.

**3.6. Tétel.** (Riesz tétel)  $1 \leq p \leq +\infty$  esetén az  $\mathcal{L}^p(X)$  tér teljes. Más szóval ez azt jelenti, hogy minden  $(f_n) \subset \mathcal{L}^p(X)$  Cauchy sorozatnak van határértéke,  $\exists \lim f_n = f \in \mathcal{L}^p(X)$ .

A Riesz tétel alapján  $\mathcal{L}^p(X)$  **BANACH** tér.

*Bizonyítás.* Nem könnyű. Az ajánlott irodalomban el lehet olvasni.

*Kérdés.* Vajon ha  $p < q$ , akkor  $\mathcal{L}^p(X)$  és  $\mathcal{L}^q(X)$  között mi a kapcsolat?

*Válasz (részben):*

19. Feladat. Igazoljuk, hogy  $\mathcal{L}^2[a, b] \subset \mathcal{L}^1[a, b]$ .

14. Gyakorlat. Igazoljuk, hogy  $\mathcal{L}^\infty[a, b] \subset \mathcal{L}^1[a, b]$ .

*Megjegyzés.* Beláttuk egy korábbi előadásban, hogy  $C^2[a, b]$  nem teljes. Ennek a normált térnek a teljessé tétele  $\mathcal{L}^2[a, b]$ . Tehát  $C^2[a, b]$ -t "kiegészítettük" azokkal a függvényekkel, melyek Cauchy sorozatok határértékei.

### 3.9. Általános $\mathcal{L}^p$ terek

Kiindulásképp tekintsünk egy mértékteret, legyen ez  $(X, \mathcal{R}, \mu)$ .  $\mathcal{R}$  egy  $\sigma$ -algebra,  $\mu$  ezen értelmezett mérték. A  $\mu$  mérték szerinti integrált definiálhatjuk, teljesen hasonlóan a Lebesgue integrál bevezetéséhez. Ha  $p \geq 1$ , akkor

$$\mathcal{L}^p(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C}, \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$$

Általában is igaz a Riesz tétel.

**3.7. Tétel.**  $\mathcal{L}^p(X)$  teljes normált tér, tehát Banach tér.

*Speciális eset.*  $X = \mathbb{N}$ . A  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{R} = 2^{\mathbb{N}}$ , az összes részhalmazok halmaza.  $\mu$  a számláló-mérték, azaz ha  $A \subset \mathbb{N}$ , akkor  $\mu(A) = "A$  elemeinek száma".

Ekkor  $p \geq 1$  esetén

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{N}} |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Mit is jelent ez? Az  $f$  függvény minden  $n$ -hez hozzárendel egy  $f(n) \in \mathbb{C}$  számot: ez egy számsorozat.

A tér elemei sorozatok, szokásos jelöléssel:  $(x_n)$ .

Integrál a számláló mérték szerint egyszerű összeg:

$$\int_{\mathbb{N}} |x_n|^p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p.$$

Összefoglalva azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{N}) = \{(x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\} = l^p \quad (!)$$

15. Gyakorlat. Lássuk be, hogy ez  $p = +\infty$ -re is igaz.

*Megjegyzés.* A legfontosabb esetek, amikkel foglalkozni fogunk:

- $X = [a, b]$ ,
- $X = \mathbb{R}$ ,
- $X \subset \mathbb{R}^n$  mérhető.

**3.9. Állítás.**  $\mathcal{L}^p$  tér akkor és csak akkor skalárszorzat tér, ha  $p = 2$ .

Mostantól a  $\boxed{p=2}$  esetet tekintjük. Az  $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(X, \mathcal{R}, \mu)$  térben van skalárszorzat:

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \cdot \bar{g} \, d\mu$$

**3.7. Következmény.**  $\mathcal{L}^2$  tér teljes, tehát HILBERT-tér

*Megjegyzés.* Látni fogjuk, hogy bizonyos értelemben  $\mathcal{L}^2$  az "egyetlen" Hilbert-tér.

## 4. FOURIER analízis $\mathcal{L}^2$ -ben

### 4.1. Klasszikus Fourier sorfejtés. Ismételés

Tegyük fel, hogy  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  kielégíti az alábbi feltételeket (Dirichlet feltételek):

- szakaszonként folytonosan differenciálható függvény,
- csak elsőfajú szakadásai vannak,
- a szakadási helyeken a függvényérték a jobb- és baloldali határérték számtani átlaga.

Akkor minden  $x \in [0, 2\pi]$  esetén

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx.$$

### 4.2. Ortonormált függvények

Tekintsük az  $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{R}, \mu)$  teret. (Rövidített jelölés  $\mathcal{L}^2(X)$ ).

$$\mathcal{L}^2(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C}, \int_X |f|^2 d\mu < \infty\},$$

ahol a m.m. egyenlő függvényeket azonosnak tekintjük. A norma  $\|f\|_2 = (\int_X |f|^2 d\mu)^{1/2}$ , mely skalárszorzatból származtatható. Ezzel  $\mathcal{L}^2(X)$  Hilbert tér.

**4.1. Definíció.** Az  $f$  és  $g$  függvények ortogonálisak, ha  $\langle f, g \rangle = 0$ , azaz

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} \, d\mu = 0$$

**4.2. Definíció.** Az  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}^2(X)$  függvények lineárisan függetlenek, ha az  $X$  halmazon

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n = 0 \quad \text{m.m.}$$

csak akkor teljesülhet, ha  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**4.3. Definíció.**  $(f_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  lineárisan függetlenek, ha minden  $n$ -re  $(f_k, k = 1, \dots, n)$  lineárisan független.

**4.4. Definíció.**  $f \in \mathcal{L}^2(X)$  függvény *normalizált*, ha  $\|f\|_2 = 1$ .

**4.5. Definíció.**  $(f_k, k = 1, \dots, n)$  *ortogonális függvényrendszer*, ha  $k \neq j$  esetén  $\langle f_k, f_j \rangle = 0$ . A  $(\varphi_k, k \in \mathbb{N})$  függvényrendszer *ortonormált (ON)*, ha

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = j \\ 0 & \text{ha } k \neq j \end{cases}$$

A Definícióban szereplő  $\delta_{k,j}$  elnevezése Kronecker delta.

**Példa.**  $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ -ben ortonormált függvényrendszer:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}, k = 1, 2, \dots \right)$$

Valóban, először a normalitást lássuk be.  $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , így

$$\|\varphi_0\|_2 = \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 dx \right)^{1/2} = \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \right)^{1/2} = 1.$$

Hasonlóképp például egy  $\cos$ -s függvényre:

$$\|\varphi_k\|_2 = \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx \right)^{1/2} = 1.$$

Ortogonalitás igazolása, pl.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(lx) dx = 0,$$

ezt az elsőéves Analízis előadásban már láttuk.

**4.6. Definíció.**  $(f_k)$  *lineárisan független rendszer teljes*, ha minden  $f \in \mathcal{L}^2$  előállítható ilyen alakban:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

A fenti egyenletben a konvergencia normabeli, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\|_2 = 0.$$

*Megjegyzés.* Két fajta *teljesség* fogalom szerepelt eddig.

- *Metrikus tér teljessége* azt jelentette, hogy a Cauchy sorozatok konvergensek.
- Lineárisan független *függvényrendszer teljessége* azt jelenti, hogy a függvényrendszer elemeinek véges lineáris kombinációi mindenütt sűrűn vannak a térben.

**Példa.** (folytatás) A "Fourier sorok alaptétele" kimondja, hogy a Dirichlet feltételt teljesítő függvények terében a trigonometrikus rendszer teljes. Ennél több is igaz lesz.

**4.1. Állítás.**  $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ -ben a trigonometrikus rendszer teljes.

A fenti állításban a teljesség normabeli konvergenciát jelen.

**Példa.**  $\mathcal{L}^2[0, \pi]$ -ben teljes függvényrendszert alkotnak:  $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\right)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Egy másik teljes függvényrendszer  $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\right)$ ,  $k = 1, 2, \dots$

20. Feladat. Igazoljuk, hogy az  $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\right)$  függvényrendszer teljes  $\mathcal{L}^2[0, \pi]$ -ben.

**Példa.** Tekintsük az  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$  függvényrendszert. Ennek tulajdonságai:

- $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\} \subset \mathcal{L}^2[-1, 1]$ , mert  $\int_{-1}^1 (x^k)^2 dx < \infty$ .
- Lineárisan függetlenek. Tegyük fel ugyanis, hogy

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k x^k = 0, \quad m.m. \quad x \in [-1, 1].$$

Ez csak úgy lehet – a baloldalon egy polinom van! – ha  $\alpha_k = 0$  minden  $k$ -ra.

- Teljes függvényrendszer. Ezt a Weierstrass féle approximációs tételből tudjuk.

**4.1. Tétel.** (Weierstrass tétel) Minden  $f \in \mathcal{L}^2$  és minden  $\varepsilon > 0$  esetén van olyan  $p$  polinom, melyre  $\|f - p\|_2 < \varepsilon$ .

*Kérdés:* Ha  $(f_n)$  teljes függvényrendszer  $\mathcal{L}^2$ -ben, és  $f \in \mathcal{L}^2$ , akkor  $f = \sum \alpha_k f_k$  előállításban meg tudjuk-e határozni az  $\alpha_k$  együtthatókat?

- 1. példa: Trigonometrikus rendszer esetén: képletekkel tudjuk.
- 2. példa: Polinomok esetén *egzisztencia tétel* van csak.

Különbség:

- 1. példa: A függvényrendszer **ON** is.
- 2. példa: A függvények nem ortogonálisak, pl

$$\langle x^4, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^4 x^2 dx = \left[ \frac{x^7}{7} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{7} \neq 0$$

*Következő lépés:* megpróbáljuk ortogonalizálni a polinomokat!

*Megjegyzés.* Függvényrendszer teljességét *lineárisan független* függvényrendszer esetén szokás definiálni. Az ortogonalitás több, mint függetlenség.

16. Gyakorlat. Igazoljuk, hogy ha  $(f_1, \dots, f_n)$  páronként ortogonálisak, akkor lineárisan függetlenek is.

### 4.3. Ortogonalizáció, ON bázis konstrukciója

Az egyszerűség kedvéért az  $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$  alaptéren dolgozunk.

**4.2. Tétel.** Adott az  $(f_n) \subset \mathcal{L}^2$  lineárisan független függvényrendszer. Ekkor létezik olyan  $(\varphi_n) \subset \mathcal{L}^2$  függvényrendszer, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1.  $(\varphi_n)$  ON.
2.  $\forall n$ -re  $f_n = \sum_{k=1}^n \alpha_{kn} \varphi_k$ , ahol  $\alpha_{nn} \neq 0$ .
3.  $\forall n$ -re  $\varphi_n = \sum_{k=1}^n \beta_{kn} f_k$ , ahol  $\beta_{nn} \neq 0$ .
4. Előjeltől eltekintve  $(\varphi_n)$  egyértelmű.

*Megjegyzés.* A 2. és 3. tulajdonságokból következik, hogy  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  halmaz lezártja megegyezik a  $\{f_1, \dots, f_n\}$  halmaz lezártjával. Ez azt jelenti, hogy a  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  által kifeszített altér megegyezik azzal az altérrel, amit  $\{f_1, \dots, f_n\}$  feszítenek ki.

*Bizonyítás.* A Lineáris algebrában megismert Gram-Smidt (G-S) ortogonalizációt használjuk itt is. Megadjuk a Tételben szereplő  $\varphi_n$  függvényeket. A konstrukció több lépésben történik.

1. lépés:  $\varphi_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|}$ .

2. lépés: Cél, hogy  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$  ON rendszer legyen, miközben  $f_2 = \alpha_{12}\varphi_1 + \alpha_{22}\varphi_2$ . Ehhez úgy jutunk el, ha

- meghatározzuk  $f_2$  vetületét  $\varphi_1$ -re,
- $f_2$ -ből kivonjuk vetületét,
- a kapott függvényt lenormáljuk.

Könnyen látható, hogy ha  $\|\varphi\| = 1$ , akkor  $f$  vetülete  $\varphi$ -re  $f|_\varphi = \langle f, \varphi \rangle \cdot \varphi$ . Azt kell ugyanis látni, hogy  $(f - f|_\varphi) \perp \varphi$ . Valóban:

$$\langle f - f|_\varphi, \varphi \rangle = \langle f - \langle f, \varphi \rangle \cdot \varphi, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle \langle \varphi, \varphi \rangle = 0.$$

Tehát a 2. lépés eredménye:

$$\varphi_2 = \frac{f_2 - \langle f_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1}{\|f_2 - \langle f_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1\|}.$$

$n$ -dik (indukciós) lépés: Tegyük fel, hogy  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$  már a kívánt tulajdonságú. Most is az előzőben végigjárt utat követjük.

- Meghatározzuk  $f_n$  vetületét a  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}$  által kifeszített altérre,
- $f_n$ -ből kivonjuk vetületét,
- a kapott függvényt lenormáljuk.

$f_n$  vetületét úgy kaphatjuk meg, hogy meghatározzuk az altér legközelebbi elemét:

$$\min_{c_1, \dots, c_{n-1}} \|f_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k\| = ?$$

21. Feladat. Lássuk be, hogy a fenti minimum a  $c_k = \langle f_n, \varphi_k \rangle$  választással érhető el.

Ez alapján az ON rendszer  $n$ -dik eleme:

$$\varphi_n = \frac{f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle f_n, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\|f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle f_n, \varphi_k \rangle \varphi_k\|}$$

**4.1. Következmény.** Ha a kiinduló  $(f_n)$  függvényrendszer teljes, akkor az ortogonalizálással kapott  $(\varphi_n)$  is teljes.

**4.7. Definíció.**  $(\varphi_n)$  teljes ON rendszert szokás **ON bázis-nak** hívni.

**Példa.** Az  $\mathcal{L}^2([-1, 1])$  teret tekintjük. Ennek elemei az  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  négyzetesen integrálható függvények. Ebben a térben egy lineárisan független teljes rendszer  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ . ON bázist kaphatunk a G-S ortogonalizálással:  $(P_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  olyan függvények melyek:

- ortogonálisak, azaz  $\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = 0$ , ha  $n \neq m$ .
- minden  $n$ -re  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \beta_{kn} x^k$ , ahol  $\beta_{nn} \neq 0$ , tehát pontosan  $n$ -ed fokú polinom.

Ezek a Legendre polinomok.

**4.2. Következmény.** Legendre polinom rendszer **teljes ON** függvényrendszer.

**4.2. Állítás.**

$$P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = c_n ((x^2 - 1)^n)^{(n)}, \quad (6)$$

ahol a normalizáló konstans

$$c_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!}$$

*Bizonyítás.* Csak az ortogonalitást kell belátni, a többi (szinte) triviális. Legyen  $m < n$ . Ekkor

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m dx = ?$$

Parciális integrálással folytatva:

$$= \left[ \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2 - 1)^m \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (x^2 - 1)^m dx,$$

ahol az első tag 0. További parciális integrálással az ortogonalitást kapjuk.

**22. Feladat.** Lássuk be, hogy a fenti (6) képlettel megadott  $P_n(x)$  függvény valóban  $n$ -ed fokú polinom.

*Megjegyzés.* "Legendre polinom rendszer" címszó alatt esetleg más  $c_n$  főegyütthatós  $p_n$  polinomokat találunk. Ennek oka, hogy a normalizálás nem mindig az  $\mathcal{L}^2$  norma szerint történik. A két legfontosabb alaptulajdonság, hogy  $p_n$  egy  $n$ -ed fokú polinom, és ortogonálisak, azaz  $\langle p_n, p_m \rangle = 0$ .

#### 4.4. Fourier sorfejtés $\mathcal{L}^2$ -ben

Legyen  $(\varphi_n)$  ON rendszer  $\mathcal{L}^2(R)$ -ben. Ez azt jelenti, hogy

$$\int_R \varphi_n(x) \varphi_k(x) dm = 0, \quad n \neq k, \quad \int_R \varphi_n^2(x) dm = 1.$$

Feltesszük továbbá, hogy a  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  rendszer *teljes*, tehát lezárása az egész  $\mathcal{L}^2$ . Ekkor minden  $f \in \mathcal{L}^2$  előáll ilyen alakban:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k, \quad (7)$$

ahol  $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ . A fenti sor konvergenciája az  $\mathcal{L}^2$  tér normájában értendő.

**23. Feladat.** Igazoljuk közvetlenül, hogy a (7) előállításban szereplő együtthatók kielégítik a  $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$  összefüggést.

**4.8. Definíció.** Ez az előállítás az  $f$  függvény **Fourier sorfejtése** a  $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  rendszer szerint.

**4.3. Tétel.** (Parseval egyenlőség) Legyen  $(\varphi_n)$  teljes ON rendszer  $\mathcal{L}^2(R)$ -ben. Az  $f \in \mathcal{L}^2$  Fourier sorfejtése (7) egyenlettel van megadva. Ekkor

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

*Bizonyítás.* A Fourier sorfejtésben a végtelen összeg konvergenciája  $\mathcal{L}^2(R)$  normájában értendő, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\| = \|f\|.$$

Az ortogonalitást felhasználva a baloldalon szereplő összeg négyzete:

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|c_k \varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2,$$

és ezzel az állítást beláttuk.

A Parseval egyenlőségből az következik, hogy minden  $f \in \mathcal{L}^2(R)$  függvényhez hozzá tudunk rendelni egy  $\ell^2$ -beli sorozatot, éspedig a  $(\varphi_n)$  teljes ON rendszer segítségével. Ennek megfordítása a következő híres tétel:

**4.4. Tétel.** (*Riesz-Fisher tétel*) Adott tetszőleges  $(d_k) \in \ell^2$ , azaz  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 < \infty$ . Ekkor létezik  $f \in \mathcal{L}^2(R)$ , melyre  $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$ , és melynek Fourier együtthatói a  $d_k$  számok.

*Bizonyítás.* (Alapötlet) Konkrétan beláthatjuk, hogy  $f = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \varphi_k$  megfelel.

24. Feladat. Fejezzük be a bizonyítást.

**4.5. Tétel.** (*Általánosított Parseval egyenlőség*) Legyen  $(\varphi_n)$  teljes ON rendszer  $\mathcal{L}^2(R)$ -ben, és  $f, g \in \mathcal{L}^2$  tetszőlegesek. Ekkor

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k,$$

ahol  $c = (c_k)$  illetve  $d = (d_k)$  a megadott  $f$  és  $g$  függvények Fourier együtthatói. A fenti összefüggés így is írható:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle c, d \rangle_{\ell^2}.$$

**4.3. Következmény.**  $\mathcal{L}^2(R)$  és  $\ell^2$  izometrikusan izomorfak. Az izometriát tetszőleges teljes ON rendszer alapján a Fourier együtthatókkal meg lehet adni:

$$f \longleftrightarrow (c_n).$$

*Megjegyzés.* Ha az ON rendszer esetleg nem teljes, akkor is definiálhatjuk a (7) jobboldalán szereplő végtelen sort, ez az  $f$  függvény Fourier sorfejtése az adott ON rendszer szerint. Ekkor azonban a sor összege nem feltétlenül egyezik meg a kiinduló  $f$  függvénnyel és a Parseval egyenlőség helyett csak Parseval-egyenlőtlenség mondható ki.

## 4.5. Ortogonális polinom rendszerek

**Példa.** Legyen  $R = [-1, 1]$ . Ekkor egy független függvényrendszer:

$$\{1, x, x^2, \dots\} \subset \mathcal{L}^2[-1, 1]$$

Ennek ortogonalizálásával kapjuk a  $P_n$  **Legendre polinomokat**:

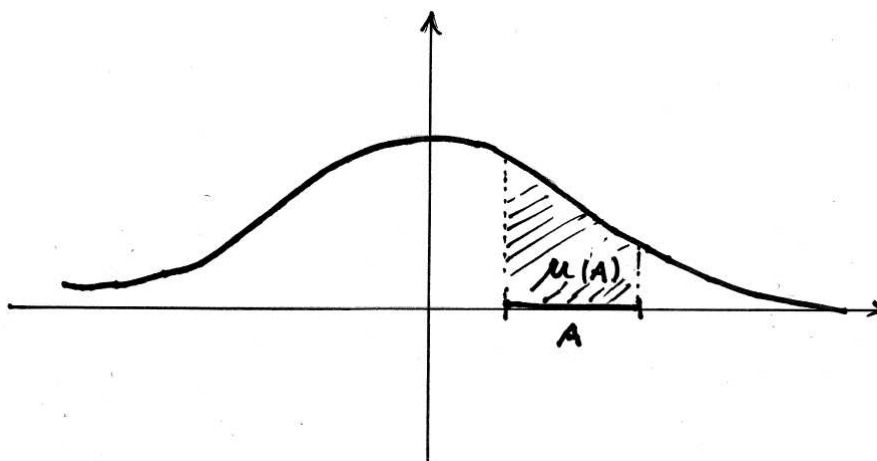
- $P_n$   $n$ -ed fokú polinom,

$$- \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \text{ ha } n < m.$$

Általánosabb teret fogunk tekinteni.  $R \subset \mathbb{R}$ , és nem a klasszikus Lebesgue mértéket használjuk. A mértéket egy súlyfüggvénnyel adjuk meg:

$$\mu(A) = \int_A \varrho \, dm,$$

ahol  $\varrho : R \rightarrow \mathbb{R}^+$  adott Lebesgue integrálható függvény. Formálisan azt írhatjuk, hogy



" $d\mu = \varrho \, dm$ ". A  $\mu$  mérték szerinti integrál egy  $E$  mérhető halmazon így számolható:

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f \cdot \varrho \, dm.$$

**4.9. Definíció.** Az általános  $\mathcal{L}^2_\varrho(R)$  teret így értelmezzük:

$$\mathcal{L}^2_\varrho(R) = \{f : R \rightarrow \mathbb{R} : \int_R f^2 \, d\mu = \int_R f^2 \varrho \, dm < \infty\}$$

Ebben a térben is azonosaknak tekintjük azokat a függvényeket, amelyek m.m. megegyeznek.

$\mathcal{L}^2_\varrho(R)$ -ben a skalárszorzatot kicsit másképp definiáljuk, mint eddig:

$$\langle f, g \rangle_\varrho := \int_R f g \varrho \, dm,$$

ezért a norma:

$$\|f\|_{\varrho,2} = \left( \int_R |f|^2 \varrho \, dm \right)^{1/2}.$$

Így ebben a térben az ortogonalitás azt jelenti, hogy

$$f \perp g \quad \equiv \quad \int_R f g \varrho \, dm = 0.$$

Ortogonalis polinom rendszer konstruálásakor továbbra is az

$$\{1, x, x^2, \dots\} \subset \mathcal{L}_\varrho^2(R)$$

független rendszerből indulunk ki – feltéve, hogy ez valóban része  $\mathcal{L}_\varrho^2(R)$ -nek.

### 0. példa. Legendre polinomok.

$R = [-1, 1]$ . A súlyfüggvény  $\varrho(x) = 1$ , a klasszikus Lebesgue integrál esete. Ezeket a polinomokat már ismerjük.

### 1. példa. Csebisev polinomok.

$$R = [-1, 1].$$

Elsőfajú illetve másodfajú Csebisev polinomokat fogunk definiálni. A megfelelő súlyfüggvények ezek lesznek:

$$\varrho_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \varrho_2(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

**4.3. Állítás.** *Az elsőfajú Csebisev polinomok (még nincsenek normálva):*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

*Az másodfajú Csebisev polinomok (még nincsenek normálva):*

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos(x))}{\sin(\arccos(x))}.$$

A fenti polinomok más formában is írhatók, ha bevezetjük az  $x = \cos(\theta)$  jelölést:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n\theta), \\ U_n(x) &= \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

25. Feladat. Igazoljuk, hogy a fenti képletekben szereplő függvények valóban  $n$ -ed fokú polinomok. (Útmutató:  $\cos(n\theta)$  és  $\sin((n+1)\theta)/\sin(\theta)$  pontosan  $n$ -ed fokú polinomja  $\cos(\theta)$ -nak.)

26. Feladat. Igazoljuk az ortogonalitást, azaz

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \quad \text{ha} \quad m \neq n,$$

és

$$\int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = 0 \quad \text{ha} \quad m \neq n.$$

**2. példa. Hermite polinomok.**  $R = \mathbb{R}$ .

A súlyfüggvény:  $\varrho(x) = e^{-x^2}$ . Így

$$\int_{\mathbb{R}} (x^k)^2 d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} (x^k)^2 e^{-x^2} dx < \infty \quad \Rightarrow \quad x^k \in \mathcal{L}^2_{\varrho}(\mathbb{R}).$$

Ortogonalizáció eredménye:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

27. Feladat. Igazoljuk, hogy a fent definiált függvény valóban polinom.

A fenti képlet deriválásával az alábbi rekurzív előállítást kapjuk:

$$H'_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

28. Feladat. Igazoljuk a polinomrendszer ortogonalitását. (Útmutató: Sok-sok parciális integrálásból adódik a következő, ahol  $v(x)$  tetszőleges polinom:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)v(x)d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} v(x)d\mu$$

Ha a fenti képletben  $v(x)$  fokszáma kisebb, mint  $< n$ , akkor  $\frac{d^n}{dx^n} v(x) = 0$ , ezért  $H_n(x) \perp v(x)!!$ )

*Megjegyzés.* A Hermite-polinomok a kvantummechanikában a harmonikus oszcillátor energia-operátorának sajátfüggvényei, azaz a  $(Hf)(x) = -f''(x) + \omega^2 x^2 f(x)$  egyenlet sajátfüggvény megoldásai:

$$\varphi_n(x) = c_n H_n(\sqrt{\omega}x) e^{-\omega x^2/2}.$$

**3. példa. Laguerre-polinomok**

Az alaptér  $R = \mathbb{R}^+$ . A súlyfüggvény  $\varrho(x) = e^{-x}$ . Így

$$\int_R (x^k)^2 d\mu = \int_0^\infty (x^k)^2 e^{-x} dx < \infty \quad \Rightarrow \quad x^k \in \mathcal{L}_\varrho^2(\mathbb{R}^+).$$

Az  $n$ -dik Laguerre polinom:

$$L_n(x) = \frac{e^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

**+1 példa. Haar függvények**

Még egy példát említek  $\mathcal{L}^2[0, 1]$ -ben. ON függvényrendszert alkotnak a Haar-függvények. Ezek nem polinomok, hanem a legegyszerűbb wavelet-ek. Részletes leírásuk a könyvben megtalálható. Röviden elmondom itt is. Megadásuk blokkokban történik. Az  $n$ -dik blokk függvényei  $H_{n,k}$  ahol  $k = 1, \dots, 2^n$ . Minden esetben  $H_{n,k} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ha  $n = 0$ , akkor két függvény van. (Kivételesen  $H_{0,0}$  is van) és  $H_{0,1}$ .

$$H_{0,0}(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1], \quad H_{0,1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq x < 1/2 \\ 0 & \text{ha } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

17. Gyakorlat. Gondoljuk meg, hogy  $\|H_{0,0}\|_2 = \|H_{0,1}\|_2 = 1$  és  $\langle H_{0,0}, H_{0,1} \rangle = 0$ .

Ha  $n = 1$ , akkor  $[0, 1]$ -t  $2^1$  darab egyenlő hosszú részre osztjuk.  $H_{1,1}$  az 1. részen nem nulla,  $H_{1,2}$  pedig a 2. részen nem nulla.

$$H_{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2} & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ha } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad H_{1,2}(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2^2} \\ -\sqrt{2} & \text{ha } \frac{3}{2^2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ha } x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

18. Gyakorlat. Gondoljuk meg most is a ortogonalitást, illetve az új függvények normalitását.

(És így tovább...) Az  $n$ -dik blokkban a  $[0, 1]$  intervallumot  $2^n$  részre osztjuk, és  $k = 1, 2, \dots, 2^n$  esetén  $H_{n,k}$  a  $k$ -dik blokkban nem 0, azon kívül 0. Például  $H_{3,5}$  így néz ki:

$$H_{3,5}(x) = \begin{cases} 2^{3/2} & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} \\ -2^{3/2} & \text{ha } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} \leq x < \frac{5}{2^3}, \end{cases}$$

egyébként pedig 0.

19. Gyakorlat. Mennyi lesz  $\|H_{3,5}\|$ ?

## 5. Absztrakt lineáris operátorok

### 5.1. Bevezetés

Legyen  $X$  és  $Y$  két lineáris tér (más szóval vektortér) a  $\mathbb{K}$  számtest felett. A számtest most  $\mathbb{R}$  vagy  $\mathbb{C}$ .

**5.1. Definíció.** Egy  $T : X \rightarrow Y$  leképezést *operátor-nak* nevezünk. Azt mondjuk, hogy  $T$  *lineáris operátor*, ha

- értelmezési tartománya  $D_T \subset X$  lineáris altér,
- $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$  minden  $x, y \in X$  és  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  konstans esetén.

Az  $x$ -hez rendelt értéket  $T(x)$  helyett egyszerűen egymás-mellé-írással fogjuk jelölni:  $Tx$ .

**Példa.** (1. éves Lineáris algebra.)  $X$  és  $Y$  legyenek véges dimenziós vektorterek. Például  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$ . Egy  $T : X \rightarrow Y$  operátor pontosan akkor lineáris, ha létezik olyan  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mátrix, melyre  $Tx = A \cdot x$ . Röviden emlékeztetek a szorzási szabályra.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

esetén

$$(Ax)_j = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k$$

**Példa.** (Sorozattér)  $X = Y = \ell^2 = \{(x_n) : \sum x_n^2 < \infty\}$  a négyzetesen összegezhető számsorozatok tere. Az alábbi  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  operátor SHIFT operátor, (hátrátolás / bal shift)

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$$

20. Gyakorlat. A fenti  $\ell^2$ -beli shift operátor felírható végtelen mátrix-vektor-szorzat alakban is. Írjuk fel.

**Példa.** (Függvény terek) Legyen  $C[a, b]$  az  $[a, b]$ -n értelmezett, valós értékű, folytonos függvények tere. Az integrál-operátor jól ismert:  $f \in C[a, b]$  esetén.

$$Tf := \int_a^b f(x) dx.$$

Ebben a példában  $X = C[a, b]$  és  $Y = \mathbb{R}$ .

**5.2. Definíció.** Ha a képtér  $\mathbb{R}$  vagy  $\mathbb{C}$  számtest, akkor a  $T : X \rightarrow \boxed{\mathbb{K}}$  operátor elnevezése *funkcionál*.

**Példa.** Legyen  $C^1[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ folytonosan differenciálható}\}$ . Ezen a téren értelmezhető a differenciál operátor:  $T : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , melyre

$$Tf := f'.$$

**Példa.** A Fredholm operátor  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , mely a következő alakú:

$$f \mapsto Tf, \quad Tf : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad Tf(s) = \int_a^b k(s, t)f(t)dt,$$

ahol:  $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  adott, szakaszonként folytonos, kétváltozós függvény.

*Megjegyzés.* Figyeljük meg a hasonlóságot a Fredholm operátor definíciója és a mátrixvektor szorzás között.

## 5.2. Folytonosság, korlátosság

Tegyük fel, hogy az  $X$  és  $Y$  vektortereken norma is adott.  $X, Y$  normált terek. Ekkor értelmeztük egy leképezés folytonosságát.

**5.3. Definíció.**  $T : X \rightarrow Y$  lineáris operátor *folytonos az  $x_0 \in X$  pontban*, ha minden  $\varepsilon > 0$  számhoz létezik olyan  $\delta > 0$ , melyre

$$\|x - x_0\|_X < \delta \quad \Rightarrow \quad \|Tx - Tx_0\|_Y < \varepsilon.$$

**5.1. Állítás.**  $T$  folytonossága  $x_0$ -ban ekvivalens a sorozatfolytonossággal. Ez azt jelenti, hogy ha tetszőleges  $X$ -beli sorozat esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , akkor a megfelelő  $Y$ -beli sorozatra  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx_0$  teljesül.

**5.1. Tétel.** A  $T : X \rightarrow Y$  lineáris operátor pontosan akkor folytonos minden pontban, ha egyetlen pontban folytonos.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy  $T$  folytonos valamely  $x_0 \in X$  pontban. Legyen  $x \in X$  egy (másik) tetszőleges pont. A sorozatfolytonosságot ellenőrizzük le. Legyen  $(x_n) \subset X$  egy olyan sorozat, melyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Definiálunk egy másik sorozatot:  $y_n := x_n - x + x_0$ . Ennek határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x + x_0) = x - x + x_0 = x_0.$$

Ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = Tx_0$  az  $x_0$ -beli folytonosság miatt. Másrészt  $T$  linearitását felhasználva

$$Tx_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n - Tx + Tx_0.$$

Ezért valóban  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$ , ami az  $x$ -beli folytonosságot igazolja.

Emlékeztetek arra, hogy egy  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  valós függvény korlátossága azt jelentette, hogy van olyan  $k$  szám, melyre  $|f(x)| \leq k$  teljesül minden  $x \in X$ -re. Lineáris operátorok esetén azonban például  $T(2x) = 2 \cdot Tx$ , ezért  $\|Tx\| \leq k$  minden  $x$ -re nem lehet!

**5.4. Definíció.**  $T : X \rightarrow Y$  lineáris operátor korlátos, ha van olyan  $M > 0$ , melyre

$$\|Tx\|_Y < M \cdot \|x\|_X, \quad \forall x. \quad (8)$$

**Példa.** Shift operátor  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  korlátos-e? Legyen  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2$ , ennek normája  $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2)^{1/2}$ . Megbecsüljük  $Tx$  normáját:

$$Tx = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots), \quad \|Tx\| = \left( \sum_{i=2}^{\infty} x_i^2 \right)^{1/2} \leq 1 \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{1/2} = \|x\|.$$

Ezért minden  $M \geq 1$  számra a (8) feltétel teljesül. Tehát  $T$  korlátos.

**Példa.**  $T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  az integrál operátor,  $Tf = \int_a^b f(x)dx$ . Vajon korlátos-e?

$$\|Tf\| = \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b \|f\|dx = (b-a) \cdot \|f\|.$$

Felhasználtuk, hogy  $C[a, b]$ -ben a norma  $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ . Ezért az operátor korlátos, tetszőleges  $M \geq b-a$  jó lesz, a (8) feltétel teljesül.

**5.5. Definíció.** Egy  $T$  korlátos lineáris operátor normája a legkisebb  $M \geq 0$ , melyre a (8) tulajdonság teljesül.

$$\|T\| := \min\{M : \|Tx\| \leq M \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X\}.$$

29. **Feladat.** Lássuk be, hogy ez valóban norma.

**Példa.** (folytatás) A shift operátor esetén minden  $M \geq 1$  felső korlát. Másrészt ha  $x = (0, 1, 0, \dots)$ , akkor  $\|x\| = 1$ . Mivel  $Tx = (1, 0, 0, \dots)$ , ezért  $\|Tx\| = 1$ . Ez azt jelenti, hogy  $M = 1$  elérhető. Ezért a shift operátor normája  $\|T\| = 1$ .

**Példa.** (folytatás) Az integrál operátor normáját keressük. Egyrészt a korlátosság miatt minden  $f$ -re

$$\|Tf\| \leq (b-a)\|f\|.$$

Másrészt, ha  $f = c$  konstans, akkor

$$\|Tf\| = \int_a^b |c| dx = |c| \cdot (b-a) = \|f\| \cdot (b-a),$$

ezért az integrál operátor normája  $\|T\| = b-a$ .

*Kérdés:* Hogyan tudjuk egy operátor normáját kiszámítani?

Az előző példákban úgy jártunk el, hogy először valamely  $M$ -re beláttuk, hogy  $\|Tx\| \leq M \cdot \|x\|$  minden  $x$ -re. Azután találtunk olyan  $x_0$ -t, melyre  $\|Tx_0\| = M \cdot \|x_0\|$  egyenlőség volt igaz. Ekkor  $\|T\| = M$ .

Másképp is számolhatunk. Ha  $x = 0$ , akkor nyilván  $Tx = 0$ . Ezért az  $x = 0$  pontban minden  $M$ -re igaz, hogy  $\|Tx\| \leq M\|x\|$ . Ha  $x \neq 0$ , akkor a korlátosság azt jelenti, hogy van olyan  $M$ , melyre  $\|Tx\| \leq M\|x\|$ , azaz

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M, \quad \forall x \neq 0.$$

Ez alapján a norma másik kiszámítási módja:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \inf\{M : \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M, \ x \neq 0\} = \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\} = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

30. **Feladat.** Igazoljuk, hogy véges dimenziós  $X$  esetén a fenti képletben *sup* helyett *max* is írható.

**5.2. Tétel.** Egy  $T : X \rightarrow Y$  lineáris operátor pontosan akkor korlátos, ha folytonos.

*Bizonyítás.* 1. Tegyük fel, hogy  $T$  korlátos. Belátjuk, hogy  $x_0=0$ -ban folytonos. Nyilván  $T(0) = 0$ . A korlátosság miatt van olyan  $M$ , melyre

$$\|Tx\| \leq M\|x\|, \quad \forall x.$$

Ezért ha az  $(x_n)$  sorozatra  $x_n \rightarrow 0$ , akkor  $Tx_n \rightarrow 0$ . Tehát  $T$  az  $x_0 = 0$ -ban folytonos.

2. Tegyük fel, hogy  $T$  folytonos  $x_0 = 0$ -ban. Ekkor  $\varepsilon = 1$ -hez van olyan  $\delta$ , melyre

$$\|x - 0\| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|Tx - 0\| \leq 1.$$

Legyen  $x \in X$  tetszőleges,  $x \neq 0$ . Ekkor az  $y = \delta \cdot \frac{x}{\|x\|}$  vektor normája  $\|y\| = \frac{\delta}{\|x\|} \cdot \|x\| = \delta$ .

A folytonosság miatt ezért  $\|Ty\| \leq 1$ . Átrendezve

$$Ty = T\left(\frac{\delta}{\|x\|} \cdot x\right) = \frac{\delta}{\|x\|} \cdot Tx \quad \Rightarrow \quad \|Ty\| = \frac{\delta}{\|x\|} \cdot \|Tx\| \leq 1.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\|Tx\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\| \quad \forall x.$$

Tehát  $M = \frac{1}{\delta}$  választással a korlátosság definíciója teljesül.

**5.6. Definíció.** Az  $X$  és  $Y$  közötti korlátos lineáris operátorok halmaza  $\mathcal{B}(X, Y)$ .

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y, \text{ korlátos, lineáris}\}.$$

Ez normált tér a korábban definiált operátor normával. Speciálisan, ha  $X = Y$ , akkor  $\mathcal{B}(X, X)$  helyett  $\mathcal{B}(X)$ -t írunk.

$$\mathcal{B}(X) = \{T : X \rightarrow X, \text{ korlátos, lineáris}\}.$$

(A  $B$  betű arra utal, hogy "Bounded".)

**5.2. Állítás.** Ha  $Y$  Banach tér, akkor  $\mathcal{B}(X, Y)$  is Banach tér.

*Bizonyítás.* (Vázlat). Legyen  $(T_n) \subset \mathcal{B}(X, Y)$  korlátos lineáris operátorokból álló Cauchy sorozat. Ez azt jelenti, hogy minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik  $N$  küszöbindex, melyre

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Az operátor norma definíciója szerint ebből következik, hogy minden  $x$ -re

$$\|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$$

Emiatt  $(T_n x) \subset Y$  Cauchy sorozat minden  $x$ -re, tehát  $Y$  teljessége miatt a sorozat konvergens. Ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$  jól definiált, legyen  $Tx := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ ,  $Tx \in Y$ .

Az így kapott  $T : X \rightarrow Y$  operátor lineáris és korlátos. Korlátossága abból következik, hogy ha a  $(T_n)$  operátor-sorozat Cauchy, akkor korlátos. Ezért van olyan  $M$ , melyre  $\|T_n\| \leq M$  minden  $n$ -re teljesül, és a határtérték monotonitása miatt  $T$ -re is.

**5.1. Következmény.** Ha  $Y = \mathbb{R}$  akkor  $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$  Banach tér. Tehát az  $X$  téren értelmezett funkcionálok Banach teret alkotnak.

**Példa.**  $X = \mathcal{H}$  Hilbert tér. Legyen  $x_0 \in \mathcal{H}$  fix,  $x_0 \neq 0$ . A  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  lineáris funkcionált így értelmezzük:

$$Tx = \langle x, x_0 \rangle.$$

A skalárszorzat linearitása miatt  $T$  lineáris funkcionál. A C-S-B egyenlőtlenséget felhasználva

$$|Tx| = |\langle x, x_0 \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle x_0, x_0 \rangle^{1/2},$$

azaz

$$\|Tx\| \leq \|x_0\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|T\| \leq \|x_0\|,$$

tehát  $T$  korlátos. Másrészt  $x = x_0$  választással  $\|Tx_0\| = \|x_0\| \cdot \|x_0\|$ , ezért a funkcionál normája  $\|T\| = \|x_0\|$ .

### 5.3. Banach algebra. Invertálhatóság

$\mathcal{B}(X)$ -n gazdag struktúra van. Láttuk, hogy *vektortér* a megfelelő műveletekkel, és értelmezve van rajta *norma* ("távolság" is). Ezen felül *szorzás* is definiálható rajta: ha  $T, S \in \mathcal{B}(X)$ , akkor szorzatuk  $TS := T \circ S \in \mathcal{B}(X)$ . Ez a struktúra a megfelelő műveleti tulajdonságokkal együtt *algebra*.

**5.7. Definíció.** Tegyük fel, hogy  $X$  teljes normált tér, azaz Banach tér. Ekkor  $\mathcal{B}(X)$  is Banach tér, melyen szorzást értelmeztünk. Ez egy Banach algebra.

Ebben a Banach-algebrában a szorzásra nézve van *egységelem*.  $I : X \rightarrow X$ , melyre  $x \mapsto Ix := x$ . Ekkor nyilván

$$TI = IT = T, \quad \forall T \in \mathcal{B}(X).$$

**5.8. Definíció.** A  $T \in \mathcal{B}(X)$  operátor *invertálható*, ha van olyan  $S \in \mathcal{B}(X)$  operátor, melyre  $TS = ST = I$ .

*Megjegyzés.* Fontos, hogy az inverz definíciójában mindekét irányú szorzatról fel kell tenni, hogy egységet ad.

**Példa.**  $X = \ell^2$ . Tekintsük a  $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$  bal-shift operátort, és az  $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$  jobb-shift operátort. Ekkor

$$TS = I \quad \text{de} \quad ST \neq I!!!$$

Sőt,  $T$  nem is invertálható, hiszen *nem injektív*.  $S$  sem invertálható, hiszen *nem szürjektív*.

*Kérdés:* Hogyan dönthető el, hogy egy konkrét operátor invertálható-e? Erre a kérdésre egy részleges választ ad a következő tétel.

**5.3. Tétel.**  $X$  egy Banach tér. Tegyük fel, hogy valamely  $T \in \mathcal{B}(X)$  lineáris operátorral teljesül, hogy  $\|T\| < 1$ . Ekkor  $I - T$  invertálható, és

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

*Megjegyzés.* A fenti tétel analógja valós számokra: ha  $|q| < 1$ , akkor

$$\frac{1}{1 - q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

*Bizonyítás.* (A könyvben másképp van.)

Az  $I - T : X \rightarrow X$  hozzárendelés azt jelenti, hogy ha  $(I - T)x = y$ , akkor  $x - Tx = y$ . Ha invertálható az operátor, akkor bármely rögzített  $y$ -hoz megkereshetjük a megfelelő  $x$ -t. Átrendezve az  $x - Tx = y$  összefüggést azzal lesz ekvivalens, hogy

$$x = y + Tx. \quad (9)$$

Tetszőleges  $y \in X$  esetén a (9) egyenlet megoldását iterációval keressük meg.

Legyen  $x_0 \in X$  tetszőleges, ez a kiinduló pont. Az iteráció további lépései:

$$x_1 = y + Tx_0, \quad x_2 = y + Tx_1, \quad \dots \quad x_n = y + Tx_{n-1}, \quad \dots$$

Így kapunk egy  $(x_n) \subset X$  sorozatot. Ekkor

$$x_{n+1} - x_n = (y + Tx_n) - (y + Tx_{n-1}) = Tx_n - Tx_{n-1} = T(x_n - x_{n-1}) = \dots = T^n(x_1 - x_0).$$

Ezért a norma korlátossága miatt

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|T^n\| \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

A bizonyítást közben egy lemmára lesz szükségünk.

**5.1. Lemma.** *Az operátor szorzás szub-multiplikatív, ami azt jelenti, hogy*

$$\|TS\| \leq \|T\| \cdot \|S\|.$$

31. Feladat. Igazoljuk a fenti lemmát.

21. Gyakorlat. A lemma alapján lássuk be, hogy minden  $T$  korlátos lineáris operátorra és minden  $k \in \mathbb{N}$  természetes számra

$$\|T^k\| \leq \|T\|^k. \quad (10)$$

Most visszatérünk a 5.3 Tétel bizonyítására. A (10) összefüggést felhasználva, az előző egyenlőtlenséget folytatjuk:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|T^n\| \cdot \|x_1 - x_0\| \leq \|T\|^n \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

Felhasználva, hogy  $\|T\| < 1$  ebből látható, hogy  $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$  exponenciális sebességgel. Ezért  $(x_n)$  Cauchy sorozat  $X$ -ben, tehát konvergens. A határértéke  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

A sorozatot definiáló egyenlet ez volt:

$$x_{n+1} = y + Tx_n.$$

A folytonosságot felhasználva határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$x^* = y + Tx^*.$$

Ezt az összefüggést átrendezve azt kapjuk, hogy

$$x^* = (I - T)^{-1}y,$$

tehát  $y$ -nak valóban létezik ősképe. Belátjuk még azt is, hogy az inverz a megadott alakban írható.  $x_0 = 0$  választással a fenti sorozat tagjai:

$$x_n = y + Tx_{n-1} = y + T(y + Tx_{n-2}) = y + Ty + T^2x_{n-2} = \dots = \sum_{k=0}^{n-1} T^k y,$$

ezért

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} T^k y = \left( \sum_{k=0}^{\infty} T^k \right) y$$

**5.2. Következmény.** *Legyen  $T \in \mathcal{B}(X)$  invertálható operátor. Tegyük fel, hogy valamely  $S \in \mathcal{B}(X)$ -re*

$$\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

*Ekkor  $T + S$  is invertálható marad.*

*Bizonyítás.*  $T + S$  szorzat alakban írható:

$$T + S = T \cdot (I + T^{-1}S) =: T \cdot (I + A).$$

A jobboldal első tényezője invertálható. A második tényezőjében szereplő  $A$  mátrix normáját becsüljük.

$$\|A\| = \|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|S\| < 1,$$

ezért  $I + A$  invertálható.

**5.3. Következmény.**  $\mathcal{B}(X)$ -ben az invertálható operátorok halmaza egy  $G \subset \mathcal{B}(X)$  nyílt halmaz.

*Bizonyítás.* Ha  $T \in \mathcal{B}(X)$  invertálható, akkor  $\varepsilon = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$  választással a  $T$  operátor  $\varepsilon$  sugarú környezetében levő operátorok is invertálhatók lesznek. Tehát  $T$  belső pontja  $G$ -nek.

## 5.4. Operátor spektruma

Emlékeztetek arra, hogy egy  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$   $n \times n$  dimenziós négyzetes mátrix *sajátértékét-sajátvektorát* hogyan definiáltuk.  $\lambda \in \mathbb{C}$  sajátértéke az  $A$  mátrixnak, ha van olyan nem 0  $v \in \mathbb{C}^n$  vektor, melyre

$$Av = \lambda v.$$

Ez kicsit másképp fogalmazva:

$$\exists v \neq 0 : (A - \lambda I)v = 0.$$

Ebből az következik, hogy  $A - \lambda I$  nem invertálható. A "sajátérték" fogalmat terjesztük ki az absztrakt operátorok esetére.

**5.9. Definíció.** Egy  $T \in \mathcal{B}(X)$  operátor spektruma azokból a  $\lambda \in \mathbb{C}$  értékekből áll, melyekre  $T - \lambda I$  nem invertálható. A spektrumot  $\sigma(T)$  jelöli.

$$\sigma(T) = \{\lambda : T - \lambda I \text{ nem invertálható}\}$$

**Példa.** Ha  $X$  véges dimenziós, akkor  $\mathcal{B}(X)$  elemei a négyzetes mátrixok. Ebben az esetben a spektrum a *sajátértékek halmaza*.

**Példa.** Ha  $X$  végtelen dimenziós, akkor egy operátor spektruma sajátértékeken kívül *folytonos spektrum*-ot is tartalmazhat. Végtelen dimenziós Banach térben egy operátor spektruma bővebb is lehet, mint a sajátértékek halmaza. Erre hamarosan látunk példát.

32. **Feladat.** Háttérként ajánlom a 6.7 fejezet elolvasását. Ami a kvantumfizikában *megfigyelhető*, az a matematika nyelvén egy *operátor*. A megfigyelhető *értékek* azonosak lesznek a spektrum elemeivel.

*Kérdés.* Hogyan lehet egy operátor spektrumát meghatározni?

**Példa.** Legyen az  $A$  mátrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-i \end{pmatrix}.$$

Ekkor leolvashatók a sajátértékek, ami a mátrix spektruma:  $\sigma(A) = \{1, 2, 5-i\}$ .

Legyen  $B$  és  $C$  másik két, kicsit bonyolultabb mátrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor is, a spektrumok leolvashatók,  $\sigma(B) = \{1, i, -i\}$ , és  $\sigma(C) = \{5, i, -i\}$ .

Fordítva is elmondhatjuk, hogy ha adott egy  $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$  véges elemszámú halmaz, akkor meg tudunk adni egy  $A$  mátrixot ezzel a spektrummal.

**Példa.**  $X$  végtelen dimenziós, például legyen  $X = \ell^2$  sorozattér. Láttuk, hogy itt minden lineáris operátorhoz egyértelműen hozzárendelhető egy  $D$  végtelen mátrix. Ha  $T$  a bal shift operátor, akkor

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & . \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & . & 0 & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$$

Legyen most  $D = \text{diag}(\lambda_n : n \in \mathbb{N})$  egy végtelen dimenziós diagonális mátrix. A megfelelő hozzárendelés:  $D : x \mapsto Dx$  lineáris. (Az operátor és mátrix jelölése ugyanaz.) Kérdés, hogy vajon mikor lesz a kép  $Dx \in \ell^2$ ?

22. **Gyakorlat.** Igazoljuk, hogy ha a  $(\lambda_n)$  sorozat korlátos, azaz  $|\lambda_n| \leq K$  minden  $n$ -re, akkor  $x \in \ell^2$ -ből következik, hogy  $Dx \in \ell^2$ .

Ha  $(\lambda_n)$  nem korlátos sorozat, akkor bizonyos  $x \in \ell^2$  esetén  $Dx \notin \ell^2$  is lehet. Legyen például  $\lambda_n \geq n$ . Ekkor  $x = (1, 1/2, \dots, 1/n, \dots)$  választással  $x \in \ell^2$ , és mégis  $Dx \notin \ell^2$ .

**5.3. Állítás.** *A fenti jelölésekkel  $D \in \mathcal{B}(\ell^2)$  pontosan akkor teljesül, ha a  $(\lambda_n)$  sorozat korlátos.*

**33. Feladat.** Igazoljuk a fenti állítást. (*Útmutató:* Az egyik irányt már szerepelt. Azt kell csak belátni, hogy ha  $(\lambda_n)$  nem korlátos, akkor van olyan  $x \in \ell^2$ , melynek képe nem  $\ell^2$ -beli lesz. Mivel  $(\lambda_n)$  nem korlátos, ezért minden  $k$ -hoz van olyan  $n_k$  index, melyre  $|\lambda_{n_k}| > k$ . Így az  $x_{n_k} = 1/k$  sorozat megfelel a célnak.)

**Példa.**  $\ell^2$ -ben tekintsük azt a folytonos, lineáris operátort, melyet a  $D$  végtelen dimenziós diagonális mátrix határoz meg. Határozzuk meg  $D$  spektrumát! Ha  $\lambda = \lambda_n$ , akkor  $(D - \lambda_n I)$ -ben van egy 0 sor, ezért nem invertálható. Sőt,  $\lambda = \lambda_n$  egyben sajátérték is. Emiatt

$$\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(D).$$

Vajon van-e más eleme a spektrumnak? Ha  $\lambda \in \mathbb{C}$ , akkor  $(D - \lambda I) = \text{diag} \{\lambda_n - \lambda, n \in \mathbb{N}\}$ . Ennek az operátornak "inverz-jelölt"-je (más nem is lehet...)

$$S = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\lambda_n - \lambda}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ez a mátrix  $\mathcal{B}(\ell^2)$ -beli-e? Az előző állítást felhasználva

$$S \in \mathcal{B}(\ell^2) \iff \left( \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \right) \text{ korlátos.}$$

Ha  $\lambda$  torlódási pontja a  $(\lambda_n)$  sorozatnak, akkor  $\left( \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \right)$  nem korlátos. Tehát  $(D - \lambda I)$  nem invertálható. Ezért  $\lambda \in \sigma(D)$ . Tehát a sajátértékek sorozatának torlódásai pontjai is benne vannak a spektrumban.

**5.4. Tétel.**  $\sigma(T)$  mindig zárt halmaz  $\mathbb{C}$ -ben.

*Bizonyítás.* "Fordítva", belátjuk hogy  $\sigma(T)$  komplementere nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy  $\lambda$  nem tartozik a spektrumba. Ekkor  $T - \lambda I$  invertálható.  $T - \lambda I$  eleme a nyílt  $G$  halmaznak. ( $G$  jelölte az invertálható operátorok halmazát  $\mathcal{B}(\ell^2)$ -ben.) Ezért van olyan  $\varepsilon > 0$ , hogy  $T - (\lambda + \varepsilon')I \in G$  ha  $|\varepsilon'| < \varepsilon$ , és emiatt  $\lambda$  körüli  $\varepsilon$  sugarú gömb is benne van a spektrum komplementerében.

**5.5. Tétel.**  $\sigma(T)$  korlátos halmaz.

*Bizonyítás.* Legyen  $|\lambda| > \|T\|$ . Belátjuk, hogy ekkor  $\lambda$  biztosan nem tartozik a spektrumba. Valóban, azt írhatjuk, hogy  $T - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}T)$ , ahol a jobboldalon az  $I$  mellett szereplő mátrix normája  $\|\lambda^{-1}T\| = |\lambda|^{-1}\|T\| < 1$ . Ezért  $I - \lambda^{-1}T$  invertálható, azaz  $T - \lambda I$  is invertálható. Ez azt jelenti, hogy  $\lambda \notin \sigma(T)$ . Tehát  $\sigma(T)$ -ben csak olyan érték lehet, melyre  $|\lambda| \leq \|T\|$ .

**5.6. Tétel.**  $X$  Banach tér,  $T \in \mathcal{B}(X)$  korlátos lineáris operátor. Ekkor a spektrum rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- zárt,
- korlátos,
- nem üres.

*Bizonyítás.* Az első két tulajdonságot beláttuk. A harmadik tulajdonság bizonyítása nehéz, nem tananyag.

**5.10. Definíció.**  $T \in \mathcal{B}(X)$  operátor spektrál sugara

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

**5.4. Következmény.** A spektrálsugár felső becslése:  $r(T) \leq \|T\|$ .

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi állítást.

**5.4. Állítás.**  $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$ .

**Példa.**  $T$  legyen a bal shift operátor,  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ,  $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ . Vajon mi lesz a spektruma,  $\sigma(T) = ?$

Azt már tudjuk, hogy  $r(T) \leq \|T\| = 1$ . Legyen  $|\lambda| < 1$  tetszőleges komplex szám. Sajátérték-e? Ha igen, akkor van nem-triviális megoldása az alábbi egyenletnek:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n, \dots).$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= x_2 \\ \lambda x_2 &= x_3 \\ \lambda x_3 &= x_4 \\ &\dots \\ \lambda x_{n-1} &= x_n \\ &\dots \end{aligned}$$

Ezért a sajátvektor nem lehet más, mint  $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ , (és ennek skalárszorosa).  $x_\lambda \in \ell^2$  pontosan akkor teljesül, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n|^2 < \infty.$$

Másrészt  $\sum |\lambda^n|^2 < \infty$  azzal ekvivalens, hogy  $|\lambda| < 1$ . Ekkor tehát  $\lambda$  sajátérték.

Ezért a  $\mathbb{C}$ -beli nyílt egységgömb része  $\sigma(T)$ -nek. Mivel a spektrum zárt, ezért a **zárt egységgömb** része is  $\sigma(T)$ -nek. Azt viszont már láttuk, hogy a spektrálsugár  $r(T) = 1$ , így  $\sigma(T) \subset$  zárt egységgömb. Összefoglalva:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

34. Feladat. Az előző példában láttuk, hogy a shift operátor esetén  $\lambda_0 = 1 \in \sigma(T)$ . Igazoljuk, hogy  $\lambda_0$  nem sajátérték. (Tehát a folytonos spektrumba tartozik.)

## 5.5. Duális tér

$(X, \|\cdot\|)$  legyen egy tetszőleges normált tér.

**5.11. Definíció.** Az  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos lineáris operátort *lineáris funkcionál*-nak nevezzük.

A funkcionálok jelölésére kis betűket használunk:  $f, g$ , stb. Az  $x \in X$ -hez rendelt értéket újra a valós függvényeknél megszokott módon  $f(x)$  fogja jelölni.

**5.12. Definíció.** Az  $(X, \|\cdot\|)$  tér *duálisa* az  $X$ -en értelmezett korlátos lineáris funkcionálok halmaza. Jele  $X^*$ .

A korábbi jelöléseinket használva  $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ .  $X^*$  elemei korlátos, lineáris operátorok, tehát  $X^*$ -ban norma értelmezhető az ismert módon:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}.$$

Korábban már láttuk, hogy  $X^*$  Banach tér. (Olyan operátorokról van szó, melyek értékkészlete  $\mathbb{R}$ , ami Banach tér.)

**1. Példa.**  $X = \mathbb{R}^n$ .

Belátjuk, hogy ha  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lineáris leképezés, akkor van olyan  $a \in \mathbb{R}^n$ , melyre  $f(x) = a^T x$ . Legyen ugyanis  $e^j \in \mathbb{R}^n$  a  $j$ -dik egységvektor, melynek  $j$ -dik eleme 1 és a többi 0. Jelölje  $a_j = f(e^j)$ . Ekkor  $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j e^j$  miatt, a linearitást felhasználva:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e^j) = \sum_{j=1}^n a_j x_j = a^T x.$$

Ezért  $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$ . Az  $(\mathbb{R}^n)^*$ -n indukált norma függ attól, hogy  $\mathbb{R}^n$ -ben milyen normát tekintünk.

Először az Euklideszi normát nézzük. Ekkor a C-S-B egyenlőtlenség felhasználásával

$$|f(x)| = \left| \sum_1^n a_j x_j \right| \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2} = \|a\| \cdot \|x\|.$$

Mivel

$$f(a) = \|a\| \cdot \|a\|,$$

azt kapjuk, hogy  $\|f\| = \|a\|_2$ .

Mi történik, ha  $\mathbb{R}^n$ -ben egy másik normát veszünk? Legyen például a  $\|x\|_\infty = \max |x_j|$  norma. Ekkor

$$|f(x)| = \left| \sum_1^n a_j x_j \right| \leq \sum_1^n |a_j x_j| \leq \max |x_j| \sum_1^n |a_j| = \|x\|_\infty \|a\|_1.$$

A fenti sorban  $x_j = \text{sign}(a_j)$  választással egyenlőséget kapunk. Így  $\|f\| = \|a\|_1$ . A duális tér függ az alaptér normájától! Azt kaptuk, hogy

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2), \quad (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1).$$

Általában is igaz, hogy

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q), \quad \text{ahol} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Példa.** Hasonló argumentumokkal belátható, hogy  $(\ell^2)^* = \ell^2$ , és  $(\ell^p)^* = \ell^q$  ha  $p$  és  $q$  Hölder konjugáltak.

**2. Példa.**  $X = C[a, b]$ .

$X$  elemei folytonos függvények, melyet  $x = x(t)$ ,  $t \in [a, b]$  fog jelölni. A norma a megszokott *maximum*-norma. Néhány példa korlátos, lineáris funkcionálokra:

a)

$$f_1(x) := \int_a^b x(t) dt, \quad \|f_1\| = b - a.$$

b) Rögzített  $y \in C[a, b]$  mellett

$$f_2(x) := \int_a^b x(t)y(t) dt, \quad \|f_2\| = \int_a^b |y(t)| dt.$$

c) Rögzített  $t_0 \in [a, b]$  mellett

$$f_3(x) = x(t_0).$$

Más jelöléssel ez a funkcionál

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0).$$

(Kvantum fizikában ezt az előző példához hasonló alakban, így szokás felírni:

$$\delta_{t_0}(x) := \int_a^b x(t)\delta(t - t_0)dt,$$

ahol  $\delta$  a Dirac delta függvény.)

$C[a, b]$  duális tere már nem tananyag. Ezek a korlátos változású függvények, és minden korlátos lineáris funkcionál egy Lebesgue-Stieltjes integrálként írható fel.

Láttuk, hogy  $X^*$  Banach tér. Most az  $X^*$ -n értelmezett funkcionálokat tekintjük.

**5.13. Definíció.** Az  $X$  normált tér második duális tere  $X^*$  duális tere. Jele  $X^{**}$ .

**Példa.** Legyen  $x_0 \in X$  rögzített elem. Ennek megfeleltethető egy  $\varphi_{x_0} : X^* \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés:

$$f \in X^* \quad \mapsto \quad \varphi_{x_0}(f) := f(x_0).$$

$\varphi_{x_0}$  lineáris, természetesen. Korlátos is, hiszen

$$|\varphi_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leq \|f\| \|x_0\|.$$

Tehát  $\varphi_{x_0} \in X^{**}$ . Sőt, igazolható az is, hogy

$$\|\varphi_{x_0}\|_{X^{**}} = \|x_0\|_X.$$

Használjuk a következő jelölést:  $(f, x)$ . Ez két egészen különböző dolgot is jelenthet, feladattól függően:

- Rögzített  $f$  esetén  $(f, x) = f(x)$  egy  $X$ -n értelmezett funkcionál.
- Rögzített  $x$  esetén  $(f, x) = \varphi_x(f)$  egy  $X^*$ -n értelmezett funkcionál.

**5.5. Következmény.**  $X \subseteq X^{**}$ , természetes módon beágyazható.

**5.14. Definíció.** Ha  $X = X^{**}$ , akkor a tér *reflexív*. Ha  $X \subsetneq X^{**}$ , akkor a tér *irreflexív*.

35. Feladat. Igazoljuk, hogy  $X = \mathbb{R}^n$  reflexív tér, bármilyen normát is tekintünk.

36. Feladat. Igazoljuk, hogy  $X = \ell^p$  reflexív tér.

**Példa.**  $X = c_0$ , a nullsorozatok tere, irreflexív. Könnyen látható ugyanis, hogy  $c_0^* = \ell^\infty$ , azaz minden  $c_0$ -n értelmezett folytonos lineáris funkcionálhoz egyértelműen tartozik egy  $a = (a_n) \in \ell^\infty$  korlátos sorozat, és fordítva. Másrészt korábban már láttuk, hogy  $(\ell^\infty)^* = \ell^1$ , ami bővebb mint  $c_0$ .

**Példa.**  $X = \mathcal{C}[a, b]$  is irreflexív.

## 5.6. Gyenge konvergencia

$X$  normált tér, ebben  $(x_n)$  egy sorozat. A második fejezetben (Topológiai alapfogalmak) azt mondtuk, hogy az  $(x_n)$  sorozat konvergens és határértéke  $x_0$ , ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0.$$

Ez a normabeli konvergencia.

**5.15. Definíció.** Az  $(x_n)$  sorozat *gyengén konvergál* az  $x_0$  ponthoz, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \forall f \in X^*.$$

Más szóval az  $X$ -beli sorozat helyett sok-sok valós számsorozatot tekintünk. A gyenge konvergencia jele  $x_n \xrightarrow{w} x_0$ .

Ennek megfelelően a normabeli konvergenciát erős konvergenciának is nevezzük.

**5.5. Állítás.** Ha az  $(x_n) \subset X$  sorozat erősen konvergens, akkor gyengén is konvergens.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy az  $(x_n)$  sorozat normában konvergens. Legyen  $f \in X^*$  egy funkcionál. Ekkor a linearitás miatt  $f(x_n) - f(x_0) = f(x_n - x_0)$ . Ezért

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq \|f\| \|x_n - x_0\| \rightarrow 0,$$

tehát gyengén is konvergens a sorozat.

A fenti állítás megfordítása nem igaz. Erre mutatunk egy példát.

**Példa.** Legyen  $X = \ell^\infty$ . Tekintsük itt az  $(e^n)$  sorozatot, ahol az  $e^n$  számsorozat egyetlen nem 0 eleme az  $n$ -dik helyen álló 1. Ekkor  $\|e^n\|_\infty = 1$ , és a sorozat normában nem konvergens.

Vizsgáljuk meg a gyenge konvergenciát. Legyen  $f \in X^*$  egy funkcionál. Mivel  $(\ell^\infty)^* = \ell^1$ , ezért az  $f$  funkcionálhoz létezik egy  $a = (a_k) \in \ell^1$  sorozat, melyre

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k, \quad x = (x_k).$$

Az  $(e^n)$  sorozat mentén a funkcionál értéke:

$$f(e^n) = a_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(e^n) = 0,$$

hiszen  $a \in \ell^1$  esetén  $\sum |a_k| < \infty$ , ezért  $(a_n)$  nullsorozat. Az  $(e^n)$  sorozat *gyengén konvergens*.

## 5.7. Funkcionálok és operátorok Hilbert térben

Speciális normált tereket tekintünk ebben a fejezetben.  $H$  Hilbert tér.

**Példa.** Legyen  $y \in H$  rögzített. Az  $f_y : H \rightarrow \mathbb{R}$  funkcionált így definiáljuk:

$$f_y(x) := \langle x, y \rangle.$$

Ekkor a C-S-B egyenlőtlenség miatt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

és  $x = y$  esetén egyenlőség van. Ezért  $\|f_y\| = \|y\|$ .

Belátható, hogy nincs is más funkcionál:

**5.7. Tétel.** (*Riesz reprezentációs tétel.*) Minden  $f \in H^*$  funkcionálhoz létezik olyan  $y \in H$ , melyre

$$f(x) = \langle x, y \rangle.$$

és  $\|f\| = \|y\|$ .

**5.6. Következmény.**  $H$  és  $H^*$  izomorfak. Minden Hilbert tér reflexív.

37. Feladat. Igazoljuk, hogy egy  $(x_n)$  sorozat gyenge konvergenciája  $x_0$ -hoz azzal ekvivalens, hogy minden  $y \in H$  esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x_0, y \rangle.$$

**5.16. Definíció.** Az  $A \in \mathcal{B}(H)$  lineáris operátor adjungáltja az az  $A^* \in \mathcal{B}(H)$  lineáris operátor, melyre

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Belátjuk, hogy az adjungált operátor jól definiált. Legyen  $y \in H$ . Hogyan határozható meg  $A^*y$ ? Ehhez tekintsük az alábbi lineáris funkcionált:

$$f(x) := \langle Ax, y \rangle.$$

(Vegyük észre, hogy a fenti funkcionál definíciójában jelen van mind az  $A$  operátor, mind az  $y$  pont.) A Riesz reprezentációs tétel szerint van egy  $y^* \in H$  elem, melyre

$$f(x) = \langle x, y^* \rangle.$$

Tehát van egy  $y \mapsto y^*$  hozzárendelés. Ez az  $A^*$  operátor, hiszen

$$f(x) := \langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle.$$

**5.8. Tétel.** Az adjungált operátor tulajdonságai:

1.  $I^* = I$ .
2.  $(A + B)^* = A^* + B^*$ .
3.  $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ .
4.  $(AB)^* = B^* A^*$ .
5.  $\|A^*\| = \|A\|$ .

*Megjegyzés.* A Definíció könnyen kiterjeszthető arra az esetre, amikor az operátor különböző Hilbert terek között hat. Az  $A : H_1 \rightarrow H_2$  korlátos lineáris operátor adjungáltja az az  $A^* : H_2 \rightarrow H_1$  operátor, melyre

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2.$$

A fenti egyenlőség két oldalán két különböző térben definiált skalárszorzat szerepel.

**Példa.**  $H = \mathbb{R}^n$ , Euklideszi normával. Lineáris operátor megadása egy  $n \times n$  dimenziós  $A$  mátrix-ot jelent. Ekkor  $A^* = A^T$ , az adjungált operátorhoz tartozó maátrix az eredeti mátrix traszponáltja, hiszen

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = \langle x, A^T y \rangle.$$

**Példa.**  $H = \mathcal{L}^2[0, 1]$ , ahol a skalárszorzat

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(t)v(t)dt.$$

Tekintsük  $H$ -ban azt a  $H_0$  alteret, ahol azok a végtelen sokszor differenciálható  $u(t)$  függvények vannak, melyekre  $u(0) = u(1) = 0$ .  $H_0$ -ban értelmezzük a differenciáloperátort:

$$Au = u'.$$

Ennek adjungáltja mi lesz?

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^1 u'(t)v(t)dt = u(t)v(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)dt = (*),$$

miközben parciálisan integráltunk. Folytatjuk:

$$(*) = 0 - \int_0^1 u(t)v'(t)dt = \langle u, -v' \rangle = \langle u, A^*v \rangle.$$

Tehát a differenciáloperátor adjungáltja  $H_0$ -ban

$$A^*v = -v'.$$

**Példa.** *Zárt altérre ortogonális vetítés.* Legyen  $E \subset H$  egy zárt altér. Ekkor minden  $x \in H$  elem előáll összegként  $x = x_E + x_0$  alakban, ahol  $x_E \in E$  és  $x_0 \perp E$ . Ez utóbbi tulajdonság azt jelenti, hogy  $\langle x_0, y \rangle = 0$  minden  $y \in E$  mellett.

Az ortogonális vetítés operátora  $P : H \rightarrow H$ ,  $Px := x_E$ . Ennek adjungáltját így számoljuk:

$$\langle Px, y \rangle = \langle Px, Py + y_0 \rangle = \langle Px, Py \rangle + \langle Px, y_0 \rangle = (**),$$

itt a második tag 0, hiszen  $Px \in E$  és  $y_0 \perp E$ . Folytatjuk, hasonló argumentumot használva:

$$(**) = \langle Px, Py \rangle + \langle x_0, Py \rangle = \langle x, Py \rangle.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$P = P^*.$$

**5.17. Definíció.** Az  $A$  operátor önadjungált, ha  $A = A^*$ .

**5.18. Definíció.** Az  $A$  önadjungált operátor pozitív, ha

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H.$$

**Példa.** Ha  $A = N^*N$  alakban áll elő, akkor pozitív. Valóban,

$$\langle Ax, x \rangle = \langle N^*Nx, x \rangle = \langle Nx, Nx \rangle = \|Nx\|^2.$$

**5.9. Tétel.** Ha  $A$  önadjungált operátor, akkor

1.  $\|A^n\| = \|A\|^n$ .
2. Spektrál sugara  $r(A) = \|A\|$ .
3. Spektruma valós:  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ .

38. Feladat. Igazoljuk, hogy önadjungált operátor esetén  $\|A^2\| = \|A\|^2$ .

*Megjegyzés.* Az önadjungált operátorok a valós szimmetrikus mátrixok végtelen dimenziós megfelelői.

## A. Appendix

### A.1. Kontrakció – fixpont tételek

A kontrakció egy speciális operátor. Érdemes a legáltalánosabb keretben definiálni, hiszen itt is igazolható a méltán-híres *Banach-féle fixpont-tétel*. Legyen  $X$  egy metrikus tér, és  $T : X \rightarrow X$  leképezés, azaz operátor.

**A.1. Definíció.** A  $T : X \rightarrow X$  operátor kontrakció, ha megadható egy  $0 \leq M < 1$  szám azzal a tulajdonsággal, hogy

$$d(Tx, Ty) \leq M d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Más szóval a kontrakció bármely két pont távolságát "összehúzza". Fontos, hogy legyen egy közös, 1-nél kisebb  $M$  arányossági tényező.

**A.1. Állítás.** Ha  $T$  kontrakció akkor folytonos is.

*Bizonyítás.* A definícióból könnyen következik. Be kell látni ugyanis, hogy tetszőleges  $\varepsilon > 0$ -hoz megadható  $\delta > 0$ , melyre

$$\text{ha } d(x, y) < \delta \quad \text{akkor} \quad d(Tx, Ty) < \varepsilon.$$

23. Gyakorlat. Lássuk be, hogy  $\delta = \varepsilon/M$  jó választás.

**A.1. Tétel.** (Banach-féle fixpont-tétel) Tegyük fel, hogy  $X$  teljes metrikus tér. Legyen  $T : X \rightarrow X$  kontrakció. Ekkor egyértelműen létezik  $x^* \in X$  pont, melyre

$$x^* = Tx^*.$$

Tehát van egy egyértelműen meghatározott elem, amit  $T$  önmagába képez le. Ez a *fixpont*.

*Bizonyítás.* A fixpont létezésének igazolása a *szukcesszív approximáció* módszerével történhet. Definiálunk egy sorozatot, melynek határértéke a fixpont lesz. Legyen  $x_0 \in X$  tetszőleges kezdőpont, és  $x_{n+1} = Tx_n$ . Másképp jelölve  $x_n = T^n x_0$ . Ekkor:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq M d(x_n, x_{n-1}),$$

és ezt folytatva

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq M^n d(x_1, x_0).$$

Eszerint  $(x_n)$  Cauchy-sorozat (ld. a Gyakorlatot a *Bizonyítás* után), tehát konvergens.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Mivel  $x_n = Tx_{n-1}$ , ezért

$$T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = T(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = x^*,$$

felhasználva a folytonosságot.

Az egyértelműséget indirekt módon igazoljuk. Tegyük fel, hogy van két fixpont, ezeket jelölje  $x^*$  és  $x^{**}$ . Ekkor

$$d(x^*, x^{**}) = d(Tx^*, Tx^{**}) \leq Md(x^*, x^{**}),$$

ami csak úgy lenne lehetséges  $M < 1$  miatt, hogy

$$d(x^*, x^{**}) = 0.$$

Ez ellentmond annak, hogy  $x^* \neq x^{**}$ .

**24. Gyakorlat.** Igazoljuk, hogy ha egy sorozatra  $d(x_{n+1}, x_n) \leq M^n d(x_1, x_0)$  teljesül valamely  $M < 1$  számmal, akkor a sorozat Cauchy.

**Példa.** Legyen  $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Keressük egy  $f : X \rightarrow X$  függvény fixpontját. Van-e olyan  $x^* \in [a, b]$ , melyre  $x^* = f(x^*)$ ?

Az  $X$  alaptér teljes. A leképezés akkor lesz kontrakció, ha van olyan  $M < 1$  szám, melyre

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad x, y \in [a, b].$$

Ez akkor teljesül, ha  $f$  Lipschitz-folytonos és a Lipschitz-konstans  $M = L < 1$ . Ekkor létezik fixpont. Ehhez elégséges feltétel differenciálható függvény esetén, hogy  $|f'(x)| \leq M < 1$  minden  $x$ -re valamilyen alkalmas  $M$  konstanssal.

## A.2. Elsőrendű DE megoldása a fixpont-tétel segítségével

Tekintsük az alábbi elsőrendű differenciálegyenlethez kapcsolódó kezdetiérték-feladatot:

$$y' = \Phi(x, y) \tag{11}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{12}$$

A megoldással kapcsolatban felmerülő kérdések az *egzisztencia* és az *unicitás*. Vajon *létezik-e* megoldás és az *egyértelmű-e*?

Erre ad egy lehetséges választ a Picard tétel, melyet már az első éves Analízis előadáson szerepelt, bizonyítás nélkül.

**A.2. Tétel.** (PICARD-tétel) Tegyük fel, hogy az (11) egyenletben szereplő  $\Phi(x, y)$  függvény második változójában Lipschitz-folytonos, azaz van olyan  $K > 0$ :

$$|\Phi(x, y) - \Phi(x, z)| \leq K |y - z|, \quad \forall y, z,$$

$x$ -től függetlenül. Ekkor létezik az (11)-(12) kezdetiérték-feladatnak egyértelmű megoldása az  $x_0$  pont valamely környezetében.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy valóban létezik megoldás, az  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény kielégíti a differenciálegyenletet.  $[a, b]$ -ről csak annyit tudunk, hogy  $x_0 \in (a, b)$ . Az (11) egyenletet minden argumentumával kiírva azt kapjuk, hogy

$$y'(t) = \Phi(t, y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Integráljuk ezt az egyenletet  $x_0$  és  $x$  között.

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x \Phi(t, y(t)) dt, \quad x \in [a, b]. \quad (13)$$

Keressük a fenti egyenlet megoldásait a  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  teljes metrikus (normált) térben. Egyelőre  $[a, b]$ -t nem ismerjük.

Legyen a  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  operátor a következő:

$$T : f \mapsto Tf, \quad (Tf)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \Phi(t, f(t)) dt.$$

A (13) egyenlet azzal ekvivalens, hogy  $y = Ty$ . Tehát a  $T$  operátor fixpontját keressük.

Megvizsgáljuk, hogy  $T$  kontrakció-e? Ha  $f, g \in C[a, b]$ , becsüljük meg  $Tf$  és  $Tg$  különbségének normáját:

$$\|Tx - Tg\| = \max \{|Tf(x) - Tg(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Legyen most  $x \in [a, b]$  tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tg(x)| &= \left| \int_{x_0}^x \Phi(t, f(t)) dt - \int_{x_0}^x \Phi(t, g(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |\Phi(t, f(t)) - \Phi(t, g(t))| dt. \end{aligned}$$

Mivel a  $\Phi$  függvény  $y$ -ban Lipschitz-folytonos, ezért így folytatjuk:

$$|Tf(x) - Tg(x)| \leq \dots \leq K \int_{x_0}^x |f(t) - g(t)| dt \leq \underbrace{(b-a)K}_{\text{ha } < 1, T \text{ kontr.}} \|f - g\|$$

Ezek szerint ha az  $[a, b]$  intervallumot úgy választjuk meg (amellett, hogy  $a < x_0 < b$ ), hogy  $K(b - a) < 1$  teljesüljön, akkor a fenti  $T$  operátor kontrakció lesz. A Banach-féle fixpont-tétel alapján van fixpontja, ami az (11)-(12) kezdetiérték-feladat megoldása lesz.

**Példa.** Tekintsünk egy konkrét Cauchy feladatot:

$$\begin{aligned} y' &= x + y \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

A differenciálegyenlet jobboldalán lévő függvény  $\Phi(x, y) = x + y$  valóban Lipschitz folytonos,  $K = 1$  konstanssal. Ezért a Cauchy feladat megoldása egyértelműen létezik.

A bizonyításban szereplő  $T$  operátor most így írható:

$$(Tf)(x) = \int_0^x (t + f(t)) dt.$$

A feladat megoldása szukcesszív approximációval:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 0 \\ f_1(x) &= (Tf_0)(x) = \int_0^x (t + f_0(t)) dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \\ f_2(x) &= (Tf_1)(x) = \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \\ &\dots \\ f(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - x - 1. \end{aligned}$$

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető, hogy valóban megkaptuk a megoldást.

## B. Általánosított függvények. (Disztribúciók)

### B.1. Lineáris funkcionálok a $C_0^\infty(\mathbb{R})$ téren

**B.1. Definíció.**  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  az függvénytér, amely a végtelen sokszor differenciálható, kompakt tartójú függvényeket tartalmazza. Egy  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény tartója:

$$\text{supp}\varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Ez azt jelenti, hogy  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , ha  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  végtelen sokszor differenciálható, és van olyan  $I \subset \mathbb{R}$  véges intervallum, melyre  $\varphi(x) = 0$ , ha  $x \notin I$ . A továbbiakban rövid jelölést használunk  $D := C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

$C_0^\infty(\mathbb{R})$  nyilván vektortér. Ezen a téren nem definiálunk sem metrikát, sem normát. Sorozat folytonosságot és korlátosságot értelmezzünk.

**B.2. Definíció.** A  $(\varphi_n) \subset D$  sorozat *konvergens*, és *határértéke*  $\varphi$ , ha:

- 1) van olyan véges  $I \subset \mathbb{R}$  intervallum, melyre  $\text{supp}\varphi_n \subset I$  minden  $n$ -re,
- 2) minden  $k$ -ra  $\varphi_n^{(k)} \rightarrow \varphi^{(k)}$  egyenletesen, azaz minden derivált egyenletesen konvergál a határérték deriváltjaihoz az  $I$  intervallumban.

Ezt így jelöljük:  $\varphi_n \rightarrow \varphi$ .

**B.3. Definíció.** A  $D_0 \subset D$  halmaz *korlátos*, ha:

- 1) van olyan véges  $I \subset \mathbb{R}$  intervallum, melyre  $\text{supp}\varphi \subset I$  minden  $\varphi \in D_0$  esetén,
- 2) minden  $k$ -ra van olyan  $M_k$  konstans, melyre  $|\varphi^{(k)}(x)| \leq M_k$  ha  $\varphi \in D_0$  és  $x \in I$ .

**B.4. Definíció.** A  $T : D \rightarrow \mathbb{R}$  funkcionál *általánosított függvény*, ha:

- 1) *lineáris*:  $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$ , ha  $\varphi, \psi \in D$  és  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
- 2) *folytonos a fenti konvergeniára nézve*: minden  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  konvergens függvény-sorozat esetén  $T\varphi_n \rightarrow T\varphi$ .

Az általánosított függvény elnevezés mellett használjuk a *disztribúció* elnevezést is. A disztribúciók halmazát  $\mathcal{D}$  jelöli.

Tehát az általánosított függvény egy speciális lineáris funkcionál.

**Példa.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges folytonos függvény. A  $T_f$  hozzárendelést így adjuk meg:

$$\varphi \mapsto T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f \varphi dx.$$

25. Gyakorlat. Gondoljuk meg, hogy a fenti  $T_f : D \rightarrow \mathbb{R}$  valóban disztribúció.

39. Feladat. Igazoljuk, hogy különböző folytonos függvényekhez tartozó disztribúciók különbözőek.

**Példa.** Következő példánk,  $T(\varphi) := \varphi(0)$  nevezetes disztribúció. Ehhez kapcsolódó jelölések:

$$\delta(\varphi) := \varphi(0), \quad \delta_a(\varphi) := \varphi(a)$$

*Megjegyzés.* Gyakran szokás, különösen fizika könyvekben, ezt a disztribúciót az előző példához hasonlóan jelölni (mintha olyan lenne...):  $\delta(\varphi) = \int \varphi(x) \delta(x) dx$ .

Jelölje  $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  az  $\mathbb{R}$ -n értelmezett, lokálisan integrálható függvények halmazát. Minden  $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  "közönséges" függvény egyben általánosított függvény is. Ha  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tetszőleges lokálisan integrálható függvény, akkor a megfelelő disztribúció:

$$T_f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_f(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f \varphi dx$$

Ebben az esetben a "közönséges" függvényt és az általánosított függvényt (azaz a megfelelő lineáris funkcionált) azonosnak vesszük.

**B.5. Definíció.** Ha a  $T \in \mathcal{D}'$  disztribúcióhoz van  $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  függvény, melyre  $T = T_f$ , akkor  $T$  reguláris disztribúció.

40. Feladat. Igazoljuk, hogy a Dirac- $\delta$  disztribúció, melyre  $T(\varphi) = \varphi(0)$ , nem reguláris. Tehát nincs neki megfelelő közönséges függvény.

**B.6. Definíció.** A  $(T_n)$  sorozat tart a  $T$  általánosított függvényhez, ha minden korlátos  $D_0 \subset D$  halmaz esetén  $T_n(\varphi)$  egyenletesen konvergens.

41. Feladat. Igazoljuk, hogy a Dirac delta disztribúció előáll reguláris disztribúciók határértékeként.

*Megjegyzés.* Ennél több is igaz. Igazolható, hogy minden disztribúció előállítható reguláris disztribúciók határértékeként.

## B.2. Disztribúciók deriválása

A definíció előtt nézzük meg, mit remélhetünk. Deriválásnál elvárjuk, hogy ha  $f$  differenciálható "közönséges" függvény, akkor  $(T_f)' = T_{f'}$ .

Eszerint:

$$T_{f'}(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} f' \varphi dx = \underbrace{f \varphi \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{\mathbf{R}} f \varphi' dx = -T_f(\varphi')$$

**B.7. Definíció.** A  $T \in \mathcal{D}$  általánosított függvény deriváltja  $\partial T \in \mathcal{D}$ , melyet így értelmezünk:

$$\partial T(\varphi) := -T(\varphi').$$

Tehát a  $\partial T$  derivált egy olyan disztribúció, mely tetszőleges  $\varphi \in \mathcal{D}$ -hez a fenti módon rendel értéket.

**B.1. Következmény.** Minden  $T \in \mathcal{D}$  akárhányszor deriválható, és  $k$ -dik deriváltja

$$\partial^k T(\varphi) = (-1)^k T(\varphi^{(k)}).$$

**Példa.** A Dirac delta deriváltja  $\partial \delta(\varphi) = \delta'(\varphi) = -\varphi'(0)$ .

**Példa.** A Heaviside-függvény (egység-ugrás):

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

A hozzá tartozó disztribúció:

$$T_H(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x) dx.$$

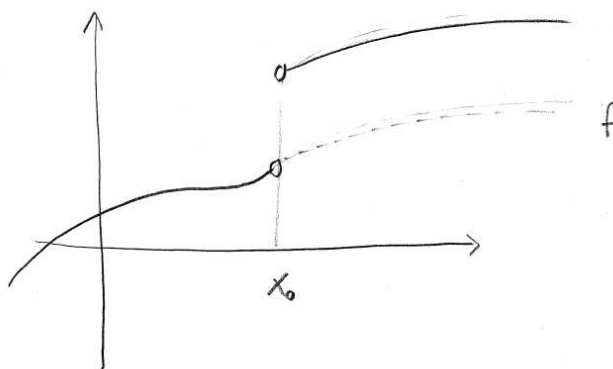
Ennek deriváltja:

$$(T_H)'(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \left[ -\varphi(x) \right]_0^\infty = -0 + \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Tehát az egység-ugrás függvény deriváltja a Dirac delta általánosított függvény.

Ha az  $f$  függvény szakaszonként folytonosan differenciálható de egy ugrás van benne, akkor általánosított értelemben vett deriváltjában megjelenik a Dirac delta függvény. Ezen az ábrán az  $f$  függvényben az  $x_0$  pontban egy  $m$  nagyságú ugrás van. Formálisan azt írhatjuk, hogy  $f = f_0 + mH(x - x_0)$ , ahol  $f_0$  folytonosan differenciálható,  $H$  pedig az egység-ugrás függvény. Ekkor a disztribúció értelemben vett derivált:

$$\partial f = f_0' + m\delta_{x_0}.$$



Az általánosított függvények deriváltja alapot ad arra, hogy lokálisan integrálható, esetleg nem is folytonos(!) függvény esetén *gyenge deriváltat* értelmezzünk.

**B.8. Definíció.** Az  $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$  függvény *gyenge deriváltja*  $g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ , ha:

$$\forall \varphi \in D : \quad - \int_{\mathbf{R}} f \varphi' dx = \int_{\mathbf{R}} g \varphi dx$$

*Megjegyzés.* A fenti definícióban "parciális integrálást" végzünk. Természetesen az integrál Lebesgue integrált jelent.

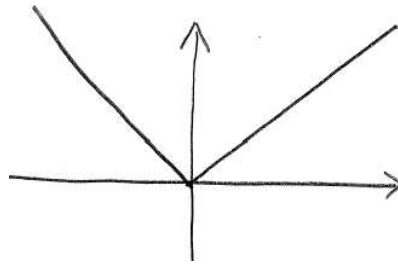
**B.1. Állítás.** A *gyenge derivált* alaptulajdonságai:

1. Ha létezik az  $f$  függvény *gyenge deriváltja*, akkor az m.m. egyértelmű.
2. Ha  $f$  differenciálható, akkor *gyenge deriváltja*  $g = f'$ .
3. Ha  $f = f_0$  m.m. és  $f_0$  differenciálható, akkor  $f$  *gyenge deriváltja*  $g = f'_0$ .
4. Ha az  $f$  függvényhez tartozó  $T_f$  disztribúció *deriváltja reguláris*, éspedig  $\partial T_f = T_g$ , akkor  $f$  *gyenge deriváltja*  $g$ .

**Példa.** Mi lesz az  $f(x) = |x|$  függvény *gyenge deriváltja*?

A definícióban megfogalmazott tulajdonság szerint az - egyelőre ismeretlen -  $g$  függvényre az teljesül, hogy

$$- \int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in D.$$



5. ábra. Az abszolút érték függvény klasszikus értelemben nem deriválható.

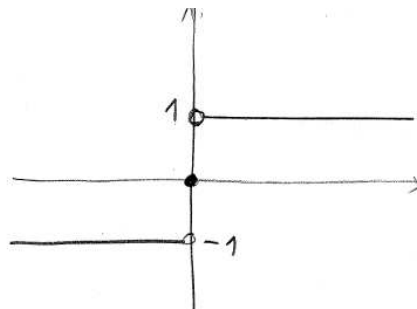
A baloldalt átalakítva, majd két parciális integrálást elvégezve:

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx &= - \int_{-\infty}^0 (-x) \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx = \\ &= [-x \varphi(x)]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 (-1) \cdot \varphi(x) dx + [x \varphi(x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 1 \cdot \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

A függvény megváltozások eltűnnek, csak a két integrál marad végül:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx = \int_{\mathbf{R}} g(x) \varphi(x) dx, \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x < 0 \\ +1 & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Tehát az abszolútérték függvény gyenge deriváltja  $g(x) = \text{sign}(x)$  m.m.



6. ábra. Az abszolút érték függvény gyenge deriváltja.

**Példa.** Legyen  $f$  a racionális számok karakterisztikus függvénye:

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ennek gyenge deriváltja  $g(x) = 0$  (hiszen  $f = 0$  m.m.).

**Példa.** Az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1+x, & x \geq 0 \end{cases}$$

függvény gyenge deriváltja  $g(x) = H(x)$ .

26. Gyakorlat. Lássuk be a fenti példa állítását.

### B.3. Általánosított függvények konvolúciója

Adott  $f, g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$  függvények konvolúcióját így definiáltuk:

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy.$$

Hasonlóképp, adott  $T, S \in \mathcal{D}$  esetén definiálni szeretnénk a  $T * S$  disztribúciót.

**Példa.** Határozzuk meg, hogy az  $f * g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$  közönséges függvénynek milyen disztribúció felel meg.

$$\begin{aligned} T_{f*g}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy \right) \varphi(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \varphi(x) dx \right) dy. \end{aligned}$$

A belső integrált kiszámolva

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \varphi(z+y) dz = T_g(\varphi(\cdot + y)),$$

ahol  $y \in \mathbb{R}$  paraméter. Ezt visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$T_{f*g}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) T_g(\varphi(\cdot + y)) dy = (T_f)_y((T_g)_z(\varphi(z + y))).$$

**B.9. Definíció.** A  $T, S \in \mathcal{D}$  általánosított függvények  $T * S$  disztribúcióját így definiáljuk:

$$T * S(\varphi) := T_x(S_y(\varphi(x + y))).$$

**Példa.** Legyen az egyik disztribúció  $\delta$ . Számoljuk ki, mit ad a fenti definíció  $T * \delta$  esetén.

$$T * \delta(\varphi) = T_x(\delta_y(\varphi(x + y))) = T_x(\varphi(x + 0)) = T(\varphi).$$

Tehát azt kaptuk, hogy minden  $T \in \mathcal{D}$  esetén

$$T * \delta = T,$$

tehát Dirac delta a konvolúció egysége.

**B.2. Állítás.** *A konvolúció alaptulajdonságai:*

1.  $T * S = S * T.$

2.  $T * (S * R) = (T * S) * R.$

3.  $\partial(T * S) = (\partial T) * S = T * (\partial S).$

42. Feladat. Igazoljuk a fenti állítást.

## C. Absztrakt operátorok alkalmazása egy QM példán

Ebben a fejezetben példát mutatunk arra, hogy a kvantum mechanika egyik leegyszerűsített feladatában hogyan tudjuk alkalmazni a kurzus során megtanult fogalmakat, tételeket.

### C.1. Fizikai példa

Tegyük fel, hogy egyetlen részecske (pl. elektron) mozgását vizsgáljuk. Feltesszük, hogy a részecske egy végtelen hosszú egyenes mentén mozog, helyzetét egy komplex értékű  $f(x, t)$  függvény írja le. A  $t$  változó az időt jelenti, az  $x$  pedig a helyzetet írja le a következő módon: annak valószínűsége, hogy a részecske az  $[a, b]$  intervallumban tartózkodik a  $t$  időpontban egy integrállal adható meg:

$$\int_a^b |f(x, t)|^2 dx.$$

A fenti  $f(x, t) \in \mathbb{C}$  az *állapotfüggvény*. Elvárjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, t)|^2 dx = 1.$$

Jelenleg csak az állapotfüggvény abszolútértékének négyzete ad számunkra információt.

Tekintsünk most egy fix  $t$  időpontot, és ez az egyetlen időpont érdekel csak bennünket. Ezért az állapotfüggvény második argumentumát elhagyjuk.

### C.2. Matematikai modell és egy tétel

Absztrakt matematikai nyelven fogalmazva az állapotfüggvény  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , melyre  $\|f\| = 1$ . A részecske helyzete  $x$ , ami egy "megfigyelhető" ("observable") a QM terminológiáját használva. Más megközelítésben azt mondhatjuk, hogy egy valószínűségi változó.

Egy másik fizikai jellemző a momentum, melyet az  $f$  függvény Fourier transzformáltja ad meg:

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw} f(x) dx.$$

A Parseval egyenlőség miatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|^2 dw,$$

és ezért  $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , továbbá  $\|\widehat{f}\| = 1$ .

Annak valószínűsége, hogy a momentum az  $[a, b]$  intervallumba esik a  $\int_a^b |\widehat{f}(w)|^2 dw$ .

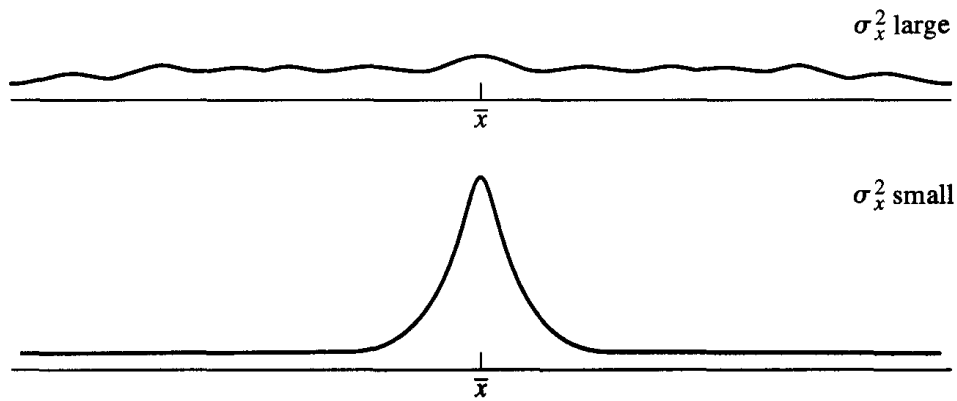
Jelölje  $\bar{x}$  és  $\bar{w}$  a hely és momentum átlagát a megadott valószínűségek szerint.

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot |f(x)|^2 dx, \quad \bar{w} = \int_{-\infty}^{\infty} w \cdot |\widehat{f}(w)|^2 dw.$$

(Ezek úgy is tekinthetők, mint a valószínűségi változók várható értékei.) A megfelelő varianciák (= szórásnégyzetek) pedig:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot |f(x)|^2 dx, \quad \sigma_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (w - \bar{w})^2 \cdot |\widehat{f}(w)|^2 dw.$$

A szórásnégyzet azt mutatja, mennyire szóródik  $x$  és  $w$  konkrét értéke  $\bar{x}$  illetve  $\bar{w}$  körül. Minél kisebb  $\sigma^2$ , annál pontosabban tudjuk lokalizálni a véletlen mennyiség értékét.



7. ábra. Az  $|f(x)|^2$  függvény alakja nagy illetve kicsi  $\sigma_x^2$  esetén.

A **Heisenberg-féle határozatlansági elv** azt mondja ki, hogy  $\sigma_x$  és  $\sigma_w$  nem lehet mindkettő egyszerre kicsi. Nevezetesen

$$\sigma_x^2 \cdot \sigma_w^2 \geq \frac{1}{4}.$$

(Itt az egyszerűség kedvéért a Planck konstanst 1-nek vesszük.)

43. **Feladat.** Magyarázzuk el, mit jelent a fenti határozatlansági elv.

### C.3. Bizonyítás Hilbert térben (vázlat)

Tegyük fel, hogy  $\bar{x} = 0$  és  $\bar{w} = 0$ . Ezt eltolással elérhetjük, nem veszítünk az általánosságból. Az  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  Hilbert térben két operátort fogunk tekinteni.

$$Mf(x) := x \cdot f(x) \quad (14)$$

$$Df(x) := f'(x). \quad (15)$$

Mindkét operátor a fenti Hilbert tér egy-egy alterében van csak értelmezve, de ezzel nem foglalkozunk. A mi függvényeink "jó helyen" vannak.

A kiinduló összefüggéseink szerint  $f, \widehat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , egységnyi normával.

#### C.1. Lemma.

$$\|Mf\|^2 = \sigma_x^2, \quad \text{és} \quad \|Df\|^2 = \sigma_x^2.$$

*Bizonyítás.* Az első rész könnyű:

$$\|Mf\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot |f(x)|^2 dx = \sigma_x^2.$$

A második rész több lépésből fog állni. A Parseval egyenlőség miatt

$$\|Df\|^2 = \|\widehat{Df}\|^2.$$

A norma definíciója szerint

$$\|\widehat{Df}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{Df}(w)|^2 dw.$$

A Fourier transzformáció egyik alaptulajdonsága a deriváltfüggvény Fourier transzformáltjáról szól:

$$\widehat{Df}(w) = iw \widehat{f}(w),$$

ezért

$$\|Df\|^2 = \dots = \int_{-\infty}^{\infty} w^2 |\widehat{f}(w)|^2 dw = \sigma_w^2.$$

Ezután egy sajátos (meglepő) tulajdonságát látjuk be az operátoraimknak.

**C.2. Lemma.** *A (14) és (15) operátorok kielégítik az alábbi operátor-egyenletet:*

$$DM - MD = I. \quad (16)$$

*Bizonyítás.* Egyszerűen szorzat-deriválási szabályt alkalmazunk.

$$(x \cdot f(x))' = f(x) + xf'(x),$$

ami operátor alakban

$$D \circ M(f) = I(f) + M \circ D(f).$$

Ez épp a lemma állítása.

*Megjegyzés.* A (16) egyenlet nem az egész  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ -ben igaz, hanem csak abban az altérben, ahol értelmezhető mindkét oldal.

A következő lemma az operátorok adjungáltjait adja meg.

**C.3. Lemma.** *Az  $M$  operátor önadjungált, azaz*

$$\langle Mf, g \rangle = \langle f, Mg \rangle.$$

*A  $D$  operátor adjungáltja  $-D$ , azaz*

$$\langle Df, g \rangle = -\langle f, Dg \rangle.$$

(Az operátorok adjungáltja egy megfelelően kiválasztott altérben van értelmezve, nem az egész  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  téren.)

*Bizonyítás.*

$$\langle Mf, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \cdot g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot xg(x) dx = \langle f, Mg \rangle.$$

A második részhez parciálisan integrálunk.

$$\langle Df, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'g = fg \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} fg' = -\langle f, Dg \rangle.$$

Közben felhasználtuk, hogy  $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  esetén  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ .

Végül

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle = \langle f, (DM - MD)f \rangle = \langle f, DMf \rangle - \langle f, MDf \rangle = \\ &= -\langle Df, Mf \rangle - \langle Mf, Df \rangle = -2\langle Df, Mf \rangle. \end{aligned}$$

Mivel  $\|f\|^2 = 1$ , ezért a C-S-B egyenlőtlenség alapján

$$1 = -2\langle Df, Mf \rangle, \quad |\langle Df, Mf \rangle| \leq \|Mf\| \cdot \|Df\|,$$

ahonnan átrendezéssel épp a Heisenberg-féle határozatlansági elvet kapjuk.

## Hivatkozások

- [1] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, Dover Publication, 1999.
- [2] K. Saxe, Beginning Functional Analysis, Springer, 2001.
- [3] R.F. Curtain and A.J. Pritchard, Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press, 1977.