Funkcionálanalízis tételjegyzék

2016. május

1. **Metrikus tér.** Pl: diszkrét metrika. **Normált tér.** Norma és metrika kapcsolata (B). **Skalárszorzat tér.** Skalárszorzat és norma kapcsolata (B). Példák: **sorozatterek**: ℓ^p, ezek kapcsolata egymással (B). **Függvényterek**: $C([a,b])$, lehetséges normák.

2. Metrikus terek topológiája. **Nyílt és zárt halmaz. Sorozat konvergenciája.** Metrikus terek között értelmezett **függvény folytonossága**. Kompakt és sorozatkompakt halmaz. Kompakt halmaz véges dimenzióban (Heine-Borel tétel (B)), és végtelen dimenzióban. Példák.

3. Szeparábilis metrikus tér. Példa szeparábilis és nem szeparábilis térre. **Teljes metrikus tér.** Hibert tér, Banach tér. $C([a,b])$ teljessége ill. nem teljessége különböző normák mellett (B). Vektortér dimenziója. Példa véges és végtelen dimenziós terekre.

4. Mérthető tér, mérték. Mértéktér, pl: számláló mértékkel. Lebesgue mérték bevezetése $\mathbb{R}$-ben. Lebesgue-mérhető halmazok jellemzése. **Nullmértékű halmazok,** ezek struktúrája. **Cantor halmaz** $[0,1]$-ben, tulajdonságai (B).

5. Mérhető függvények. **Egyszerű függvények.** *M.m.* tulajdonság. Lebesgue integrál bevezetése, alaptulajdonságok. **Integrálhatóság feltétele.** Lebesgue- és Riemann integrál kapcsolata. Konvergencia tételek.

6. $\mathcal{L}^{\mathbf{p}}(\mathbf{R})$ **terek** $1 \le p < \infty$ **esetén**. $\mathcal{L}^p(R)$ és $\mathcal{L}^q(R)$ kapcsolata véges ill végtelen mértékű R mellett (B). Lényegében korlátos függvények, ezek jellemzése. $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{R})$ **tér.** Riesz tétel.

7. Lineárisan független függvényrendszer $\mathcal{L}^2(R)$-ben. **Ortonormált függvényrendszer**, példa $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$-ben. **Teljes függvényrendszer.** Ortogonalizáció (B). Ortonormált polinomrendszer: Legendre-polionomok.

8. Általános Fourier analízis, általános Fourier együtthatók. Parseval egyenlőség és általánosítása (B). **Riesz-Fisher tétel.** $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ **és** ℓ^2 **izometriája.**

9. Általános $\mathcal{L}^2_\rho(R)$ terek adott ρ súlyfüggvénnyel. **ON polinomrendszerek.** Példák: Csebisev- és Hermite- polinomok, ezek jellemzése (B). Egy ON függvényrendszer: Haar rendszer.

10. Absztrakt lineáris operátorok. Folytonosság, jellemzése (B). Korlátosság, annak kapcsolata a folytonossággal (B). **Operátor normája.** Példák: $\mathbb{R}^n$-ben, ℓ^2-ben, $C([a,b])$-ban. $\mathcal{B}(X,Y)$ **mint normált tér.** $B(X,Y)$ teljessége (B).

11. Folytonos lineáris operátorok *Banach térben.* Operátorok szorzata. $B(X)$ mint Banach algebra. **Inverz operátor létezésének feltétele** (B). Inverz operátorok tulajdonságai. **Spektrum.** Kapcsolat a sajátértékkel. Operátor spektrumának alaptulajdonságai (B). Példák.

12. Lineáris funkcionál, mint absztrakt lineáris operátor. **Funkcionál normája**. Példák függvényterekben. **Duális tér.** Példák: $\mathbb{R}^n$ különböző normák mellett, ℓ^p. Második duális tér. Reflexív terek. Gyenge és erős konvergencia, ezek kapcsolata (B).

13. Funkcionálok és operátorok Hilbert térben. Riesz reprezentációs tétel. **Hilbert tér duális tere**. **Lineáris operátor adjungáltja**, ennek létezése (B). Példa véges és végtelen dimenziós Hilbert térben. Önadjungált operátor. Példák: ortogonális vetítés, jellemzése (B).

14. **Disztribúciók,** mint speciális lineáris operátorok, Kapcsolat a közönséges függvényekkel. Példák. Reguláris disztribúció. **Dirac delta**. Disztribúció deriváltja. Lokálisan integrálható függvény gyenge deriváltja.

15. **Egy példa.** Operátorok alkalmazása QM-ban: Egyetlen részecske mozgásának és momentumának együttes határozatlanságaira vonatkozó Heisennberg féle becslés bizonyítása.