PPKE ITK • 2014/15/2. tanulmányi időszak

FUNKCIONÁL-
ANALÍZIS

SZÓBELI VIZSGA

2015. június 11.

PÁZMÁNY PÉTER
KATOLIKUS EGYETEM

INFORMÁCIÓS TECHNOLÓGIAI
ÉS BIONIKAI KAR

Fontos tudnivalók

Tisztelt Vizsgázó!

Jelen füzet a 2014/15/2. tanulmányi időszak Funkcionál-analízis szóbeli vizsgájához lett kiadva. A füzet tartalmazza az intézmény által nyilvánosságra hozott tételjegyzéket, valamint azok kidolgozott formáját is.

A kiadványban bárhol, de különösen a kidolgozott tételek körében előfordulhatnak hiányosságok, bővebb magyarázatra szoruló részek. Az ezek kiegészítése illetve jegyzetelés, feladatmegoldás céljából a kidolgozott tételeket a füzetben jegyzetoldalak követik.

Eredményes felkészülést kívánunk!

A kiadványt összeállította:
Naszlady Márton Bese – 2015

Tartalomjegyzék

Tételjegyzék

1. tétel: **Metrikus tér. Normált tér.** Norma és metrika kapcsolata. Diszkrét metrika. **Skalárszorzat tér.** Skalárszorzat és norma kapcsolata. Példák: **sorozat-terek,** ezek kapcsolata egymással. **Függvény-terek,** lehetséges normák.

2. tétel: Szeparábilis metrikus tér. Példa szeparábilis és nem szeparábilis térre. **Teljes metrikus tér.** $\mathcal{C}([a,b])$ teljessége, ill. nem teljessége különböző normák mellett. Dimenzió normált térben. Példa véges és végtelen dimenzióra.

3. tétel: Metrikus terek topológiája. **Nyílt és zárt halmaz.** Metrikus térben sorozat konvergenciája. Metrikus terek között értelmezett **függvény folytonossága.** Kompakt halmaz. Kompakt halmaz jellemzése véges dimenzióban (Heine–Borel-tétel) és végtelen dimenzióban. Példák.

4. tétel: Mérték, mértéktér. Számlálómérték. Lebesgue mérték bevezetése $\mathbb{R}$-ben. Lebesgue-mérhető halmazok jellemzése. **Nullmértékű halmazok,** ezek struktúrája. **Cantor halmaz** $[0,1]$-ben, tulajdonságai.

5. tétel: Mérhető függvények. **Egyszerű függvények.** (Lépcsős függvények.) Lebesgue-integrál bevezetése. **Integrálhatóság feltétele.** Lebesgue- és Riemann-integrál kapcsolata.

6. tétel: $\mathcal{L}^p(R)$ **terek** $1 \leq p < \infty$ **esetén.** $\mathcal{L}^p(R)$ és $\mathcal{L}^q(R)$ kapcsolata, ha $p < q$, véges ill. végtelen mértékű R mellett. Lényegében korlátos függvények, $\mathcal{L}^\infty(R)$ **tér.** Riesz-tétel.

7. tétel: Lineárisan független függvényrendszer $\mathcal{L}^2(R)$-ben. **Ortonormált ill. teljes függvényrendszer.** Lineárisan független rendszer ortogonalizációja. Általános Fourier-analízis.

8. tétel: Ortonormált polinomrendszer: Legendre-polinomok. Parseval-egyenlőség és általánosítása. **Riesz–Fisher-tétel.** $\mathcal{L}^2(R)$ **és** ℓ^2 **izometriája.** Általános Fourier-együtthatók.

9. tétel: Általános $\mathcal{L}^2_\rho(R)$ terek adott ρ súlyfüggvénnyel. **ON polinomrendszerek tulajdonságai.** Példák: Csebisev-, Hermite-, Laguerre-polinomok. Egy ON függvényrendszer: Haar-rendszer.

10. tétel: Absztrakt lineáris operátorok. Folytonosság. Korlátosság. **Operátor normája.** Példák: ℓ^2-ben, $\mathcal{C}([a,b])$-ban, $\mathbb{R}^n$-ben. $\mathcal{B}(X,Y)$ **mint normált tér.**

11. tétel: Lineáris funkcionál mint absztrakt lineáris operátor. Példák függvényterekben. **Funkcionál normája. Duális tér.** Példa: $\mathbb{R}^n$. Gyenge és erős konvergencia. Második duális tér. Reflexív terek.

12. tétel: Folytonos lineáris operátorok Banach térben: $\mathcal{B}(X)$. Operátorok szorzata. Banach-algebra. **Inverz operátor létezésének feltétele.** Inverz operátorok tulajdonságai. **Spektrum.** Kapcsolat a sajátértékkel. Operátor spektrumának alaptulajdonságai. Példák.

13. tétel: Funkcionálok Hilbert-térben. Riesz reprezentációs tétel. **Hilbert-tér duális tere. Lineáris operátor adjungáltja Hilbert-térben.** Példa véges és végtelen dimenzióban. Önadjungált operátorok. Példák. Ortogonális vetítés.

14. tétel: **Disztribúciók** mint speciális lineáris operátorok. Kapcsolat a közönséges függvényekkel. Példák. Reguláris disztribúció. **Dirac delta.** Disztribúció deriváltja. Lokálisan integrálható függvény gyenge deriváltja.

15. tétel: **Egy példa.** Operátorok alkalmazása kvantummechanikában: egyetlen részecske mozgásának és momentumának együttes határozatlanságaira vonatkozó Heisenberg-féle becslés bizonyítása.

Kidolgozott tételek

1. tétel: **Metrikus tér. Normált tér.** Norma és metrika kapcsolata. Diszkrét metrika. **Skalárszorzat tér.** Skalárszorzat és norma kapcsolata. Példák: **sorozat-terek,** ezek kapcsolata egymással. **Függvény-terek,** lehetséges normák.

Metrikus tér

Definíció Adott egy M alaphalmaz (alaptér) és egy $d : M \times M \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a d függvény *metrika*, ha teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

1) nemnegatív: $d(x,y) \geq 0$
2) nem degenerált: $d(x,y) = 0 \iff x = y$
3) szimmetrikus: $d(x,y) = d(y,x)$
4) háromszög-egyenlőtlenség: $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

ahol $x, y, z \in M$.

Definíció Az (M, d) teret, mely az M alaphalmazból és a rajta értelmezett d metrikából áll, *metrikus térnek* nevezzük.

Példák

1) $M = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x - y|$
2) $M = \mathbb{C}$, $d(z,w) = |z - w|$
3) $M = \{n$ hosszú kódszavak: $x = x_1 x_2 \ldots x_n,\ \ x_i \in \mathbb{N}\}$, $d(x,y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$
4) Diszkrét metrika: M tetszőleges halmaz,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Normált tér

Definíció Adott egy V vektortér és egy $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk hogy a $\|\cdot\|$ függvény *norma*, ha teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

1) nemnegatív: $\|v\| \geq 0$
2) nem degenerált: $\|v\| = 0 \iff \mathrm{v} = 0$
3) multiplikatív: $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|,\ \lambda \in \mathbb{R}$
4) háromszög-egyenlőtlenség: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

ahol $v, w \in V$.

Definíció A $(V, \|\cdot\|)$ teret, mely a V vektortérből és a rajta értelmezett $\|\cdot\|$ normából áll, *normált térnek* nevezzük.

Példák

1) $V = \mathbb{R}$, $\|v\| = |v|$
2) $V = \mathbb{R}^n$, $\|v\|_1 = \sum_i |v_i|$
3) $V = \mathbb{R}^n$, $\|v\|_\infty = \max_i\{|v_i|\}$

Norma és metrika kapcsolata

Állítás *Minden normált térben értelmezhető metrika a következő módon:*

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

Bizonyítás Azt kell belátni, hogy az $\|x - y\|$ kifejezésre teljesülnek a metrika tulajdonságai, hiszen ekkor metrikát definiál:

1) nemnegatív, hiszen $\|\cdot\| \geq 0$
2) nem degenerált, hiszen $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
3) szimmetrikus, mert $\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\|$
4) háromszög-egyenlőtlenség:

$$\|x - y\| + \|y - z\| \overset{\triangle}{\geq} \|(x - y) + (y - z)\| = \|x - z\| \quad \blacksquare$$

Skalárszorzat tér

Definíció Legyen V egy vektortér. Adott egy $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ művelet az alábbi tulajdonságokkal:

1) nemnegatív: $\langle v, v\rangle \geq 0$
2) nem degenerált: $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3) multiplikatív: $\langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle,\ \lambda \in \mathbb{R}$
4) szimmetrikus: $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$
5) disztributív: $\langle v, w + u\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle$

ahol $v, w, u \in V$. Ekkor $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *valós skalárszorzat tér.*

Definíció Legyen V egy vektortér. Adott egy $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ művelet a fenti tulajdonsággal, kivéve a 4. tulajdonságot, mely így módosul:

4) konjugáltan szimmetrikus: $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$

ahol $v, w, u \in V$. Ekkor $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *komplex skalárszorzat tér.*

Példák

1) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$
2) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle z, w\rangle = z_1 \overline{w}_1 + z_2 \overline{w}_2$

Skalárszorzat és norma kapcsolata

Állítás *Egy $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ skalárszorzat térben a norma értelmezhető:*

$$\|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Bizonyítás Azt kell belátni, hogy a fenti módon megadott kifejezés valóban norma:

1) nemnegatív, hiszen $\langle v, v\rangle \geq 0$ és négyzetgyöke szintén nemnegatív
2) nem degenerált, hiszen $\langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3) multiplikatív: $\|\lambda v\| = \langle \lambda v, \lambda v\rangle^{\frac{1}{2}} = (\lambda^2\langle v, v\rangle)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|v\|$
4) háromszög-egyenlőtlenség: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

$$\|v + w\| = \langle v + w, v + w\rangle^{\frac{1}{2}} = (\langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Ezt négyzetre emelve:

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w\rangle$$

Most már csak azt kell belátni, hogy $\langle v, w\rangle \leq \|v\|\|w\|$. Ez pedig igaz, hiszen ez a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség. $\blacksquare$

Állítás *Ha $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ skalárszorzat tér, akkor teljesül benne a paralelogramma-szabály:*

$$2(\|v\| + \|w\|) = \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2$$

Sorozat-terek, ezek kapcsolata egymással

Legyen V a számsorozatok tere. Ez lineáris tér, melynek pontjai számsorozatok:

$$x = (x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

Ez vektortér, az összeadás és skalárral való szorzás definiálva van. Mint vektortér, tekintsük ennek (bizonyos) altereit:

1.)	$\ell^\infty \subset V$	$\ell^\infty = \{(x_n) : \exists B\ \lvert x_n\rvert \le B\ \forall n\}$	$\|x\|_\infty = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}}\{\lvert x_i\rvert\}$
2.)	$c \subset \ell^\infty$	$c = \left\{(x_n) : \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n\right\}$	$\|x\|_\infty = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}}\{\lvert x_i\rvert\}$
3.)	$c_0 \subset c$	$c_0 = \left\{(x_n) : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$	$\|x\|_\infty = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}}\{\lvert x_i\rvert\}$
4.)	$\ell^p \subset \ell^\infty$	$\ell^p = \left\{(x_n) : \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lvert x_i\rvert^p < \infty\right\}$	$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lvert x_i\rvert^p}$

Megjegyzés A ℓ^p terek közt fennáll a $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \cdots \subset \ell^\infty$ tartalmazás.

Függvény-terek, lehetséges normák.

Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ rögzített intervallum. Az ezen értelmezett függvények összegét és skalár-szorosát értelmezni tudjuk. Legyen a V vektortér az $[a, b] \to \mathbb{R}$ függvények tere:

$$V = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$$

Ennek (bizonyos) lehetséges alterei:

1.)	$V_0 \subset V$	$V_0 = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : \exists B\ \lvert f(x)\rvert \le B\ \forall x\}$	$\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]}\{\lvert f(x)\rvert\}$
2.)	$C([a, b]) \subset V_0$	$C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}, \text{folytonos}\}$	$\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]}\{\lvert f(x)\rvert\}$

Ez utóbbiban definiálható skalárszorzat mint

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Ebből a skalárszorzatból a már megszokott módon definiálható norma:

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Azt a $C([a, b])$ teret, melyen az imént definiált négyzetes normát tekintjük, $C^2([a, b])$-vel jelöljük.

2. tétel: Szeparábilis metrikus tér. Példa szeparábilis és nem szeparábilis térre. **Teljes metrikus tér.** $C([a,b])$ teljessége, ill. nem teljessége különböző normák mellett. Dimenzió normált térben. Példa véges és végtelen dimenzióra.

Szeparábilis metrikus tér

Definíció Legyen (M,d) egy metrikus tér és legyenek $A \subset B \subset M$ tetszőleges halmazok. Az *A halmaz sűrűn van B-ben,* ha $\forall x \in B, \forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists a \in A$, melyre $d(x,a) < \varepsilon$.

Ha $A \subset M$ sűrűn van M-ben, akkor *mindenütt sűrű.*

Definíció Az (M,d) metrikus tér *szeparábilis,* ha létezik benne megszámlálható elemszámú mindenütt sűrű halmaz.

Tétel (Weierstrass-féle approximációs tétel) *A polinomok tere*

$$\mathcal{P}([0,1]) = \{p: [0,1] \to \mathbb{R} \text{ polinom}\}$$

sűrűn van $C([0,1])$-ben.

Bizonyítás Megkonstruálva az ilyen polinomokat. Egy adott f függvényhez hozzárendelhetjük az alábbi ún. Bernstein-polinomot:

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

ahol $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Megmutatható, hogy $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N$, melyre $\|f - p_n\| < \varepsilon$, ha $n > N$. Tehát $\mathcal{P}([0,1])$ sűrűn van $C([0,1])$-ben.

Példa szeparábilis és nem szeparábilis térre

1.) Az $(\mathbb{R}, d)$ metrikus tér a diszkrét metrikával nem szeparábilis
2.) Az $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ metrikus tér szeparábilis (mert $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sűrűn van és megszámlálható)

Teljes metrikus tér

Definíció $(x_n) \subset M$ *Cauchy-sorozat,* ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz van olyan N küszöbindex, melyre

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \qquad \forall n,m \geq N$$

Állítás *Ha (x_n) konvergens, akkor Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy (x_n) konvergens és $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor van olyan N, melyre

$$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall n \geq N$$

Ezért ha $n, m \geq N$, akkor a háromszög-egyenlőtlenséget használva:

$$d(x_n, x_m) < d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

Definíció Az M metrikus tér *teljes,* ha minden Cauchy-sorozat konvergens.

Definíció A $(V, \|\cdot\|)$ teljes normált tér *Banach-tér.*
A $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ teljes skalárszorzat-tér *Hilbert-tér.*

$\mathcal{C}([a,b])$ teljessége, ill. nem teljessége különböző normák mellett

$\mathcal{C}([a,b])$ teljessége

Tekintsük a $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ teret. Legyen $(f_n) \subset \mathcal{C}([a,b])$ Cauchy-sorozat. Ekkor $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N$, melyre $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Ezért

$$\|f_n - f_m\| = \max_{x\in[a,b]}\{|f_n(x) - f_m(x)|\} < \varepsilon$$

és emiatt $\forall x$-re $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Tehát rögzített $x \in [a,b]$ esetén az $\big(f_n(x)\big)$ számsorozat Cauchy-sorozat, és ezért létezik határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$$

Így $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ jól definiált függvény, ráadásul $f_0 \in \mathcal{C}([a,b])$.

$\mathcal{C}([a,b])$ nem teljessége

Tekintsük a $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_2)$ teret. Legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ 1, & x > \frac{1}{2} \\ \text{lineáris}, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

Mivel ebben a térben a négyzetes norma van, így az

$$\|f_n - f_m\| = \int_0^1 \big(f_n(x) - f_m(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x$$

integrált kell vizsgálni. Erről könnyen belátható, hogy nullához tart, vagyis az (f_n) sorozat Cauchy-sorozat. A határértékfüggvény azonban

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x \ge \frac{1}{2} \\ 0, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

mely nem folytonos és ezért $f \notin \mathcal{C}([0,1])$. Vagyis ennek a Cauchy-sorozatnak nincs határértéke ebben a térben, és így nem is lehet konvergens.

Dimenzió normált térben

Az N normált tér alapját vektortér képzi. Az $x_1, \dots, x_n \in N$ elemek lineárisan függetlenek, ha

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$$

Definíció A V vektortér *dimenziója* n, ha létezik n darab lineárisan független elem és $n+1$ darab már összefüggő rendszert alkot.

Definíció A V vektortér *dimenziója* $+\infty$, ha minden n-re létezik n darab független vektor.

Példa véges és végtelen dimenzióra

Az eddig megismert véges dimenziós vektorterek, például $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

Végtelen dimenziósak például a sorozat-terek és függvény-terek: $\dim\big(\mathcal{C}([a,b])\big) = \infty$.

3. tétel: Metrikus terek topológiája. **Nyílt és zárt halmaz.** Metrikus térben sorozat konvergenciája. Metrikus terek között értelmezett **függvény folytonossága.** Kompakt halmaz. Kompakt halmaz jellemzése véges dimenzióban (Heine–Borel-tétel) és végtelen dimenzióban. Példák.

Metrikus terek topológiája

Definíció Legyen (M, d) egy metrikus tér. Azt mondjuk, hogy $B_r(x)$ halmaz $x \in M$ *középpontú*, $r > 0$ *sugarú nyílt gömb,* ha

$$B_r(x) = \{y \in M : d(x, y) < r\}$$

Definíció Legyen (M, d) egy metrikus tér és legyen adott $E \subset M$. Azt mondjuk, hogy az $x \in E$ *belső pontja* E*-nek,* ha van olyan $r > 0$, melyre $B_r(x) \subset E$.

Definíció Legyen (M, d) egy metrikus tér és legyen adott $E \subset M$. Azt mondjuk, hogy az $x \in E$ *külső pontja* E*-nek,* ha van olyan $r > 0$, melyre $B_r(x) \cap E = \emptyset$.

Definíció Legyen (M, d) egy metrikus tér és legyen adott $E \subset M$. Azt mondjuk, hogy a $t \in M$ *torlódási pontja* E*-nek,* ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $B_\varepsilon(t) \cap E \neq \emptyset$.

Nyílt és zárt halmaz

Definíció Legyen (M, d) egy metrikus tér. Az $E \subset M$ halmaz *nyílt,* ha minden pontja belső pont.

Definíció Legyen (M, d) egy metrikus tér. Az $E \subset M$ halmaz *zárt,* ha minden torlódási pontját tartalmazza.

Definíció Legyen (M, d) egy metrikus tér. Az $E \subset M$ halmaz *lezárása*

$$\overline{E} = E \cup \{\text{torlódási pontok}\}$$

Állítás *Egy $E \subset M$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha $M \setminus E$ zárt.*

Bizonyítás Jelöljük $M \setminus E$ halmazt E^C-vel (komplementer). Jelölje az E halmaz torlódási pontjainak halmazát T_E. Ekkor:

$$E \text{ zárt} \Leftrightarrow \forall x \in T_E, \forall x \in E \Leftrightarrow \forall y \in E^C \;\; y \notin T_E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in E^C \; \exists r > 0 : B_r(y) \cap E = \emptyset \Leftrightarrow \forall y \in E^C \; \exists r > 0 : B_r(y) \subseteq E^C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E^C \text{ nyílt} \Leftrightarrow M \setminus E \text{ nyílt.}$$

■

Példák

1.) Legyen $M = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. Ekkor $[a, b]$ zárt, (a, b) nyílt.

2.) Legyen $M = \mathcal{C}([a, b])$ és $k > 0$ fix valós szám. Ekkor $E = \{f : |f(x)| < k, \;\forall k\}$ nyílt, $E_0 = \{f : |f(x)| \leq k, \;\forall k\}$ zárt.

Metrikus térben sorozat konvergenciája

Definíció Legyen (M, d) egy metrikus tér és legyen egy $(x_n) \subset M$ sorozat a térben. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat *konvergens és határértéke* x_0, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N$ melyre $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ ha $n \geq N$.

Metrikus terek között értelmezett **függvény folytonossága**

Definíció Legyen (M, d_M) és (N, d_N) metrikus terek. Adott egy $f : M \to N$ függvény. Legyen $x_0 \in M$ tetszőleges pont. Az f függvény *folytonos* x_0*-ban,* ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta > 0$, melyre $d_M(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_N\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$.

Kompakt halmaz

Definíció Legyen (M, d_M) metrikus tér. Az $E \subset M$ halmaz *korlátos,* ha $\forall x \in E$-hez $\exists r > 0$, melyre $E \subset B_r(x)$.

Definíció Legyen (M, d_M) metrikus tér, és $E \subset M$ egy részhalmaz ebben a térben. Legyen az $(U_\alpha) \subset M$ halmazrendszer, ahol $\alpha \in I$ indexhalmaz. Azt mondjuk, hogy az (U_α) halmazrendszer *E halmaz lefedése,* ha

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \supset E$$

Nyílt lefedésről beszélünk, ha $\forall U_\alpha$ nyílt.
Véges lefedésről beszélünk, ha $|I|$ véges.

Definíció Az $E \subset M$ halmaz *kompakt,* ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés.

Definíció Az $E \subset M$ halmaz sorozatkompakt, ha $\forall(x_n) \subset E$ sorozatból kiválasztható konvergens $\left(x_{n_k}\right)$ sorozat, melynek határértéke E-beli:

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in E$$

Tétel *Tetszőleges metrikus térben egy E halmaz pontosan akkor kompakt, ha sorozatkompakt.*

Bizonyítás (vázlat) Indirekt módon tegyük fel, hogy M kompakt halmaz, de mégis van benne olyan sorozat, melynek nincs konvergens részsorozata. Jelölje ennek különböző pontjait y_k, $k \in \mathbb{N}$. Ezek lefedhetők páronként diszjunkt nyílt gömbökkel, amihez hozzávéve az $M \setminus \cup \{y_k\}$ halmazt egy nyílt lefedést kapunk, melyből nem választható ki véges lefedés. ■

Állítás *Minden $E \subset M$ kompakt halmaz korlátos.*

Bizonyítás Indirekt módon tegyük fel, hogy E kompakt, de nem korlátos, vagyis $\forall x$-re és $\forall r$-re $B_r(x) \not\supseteq E$. Tekintsük $\left(B_{r_n}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ lefedését E-nek. A véges unió:

$$\bigcup_{i=1}^{N} B_{r_i}(x) \subseteq B_R(x)$$

„befér” egy R sugarú gömbbe. Az indirekt feltevés miatt viszont $B_R(x) \not\supseteq E$, tehát nem létezik véges, nyílt lefedés. Ez ellentmondás. ■

Példák

1.) Legyen $M = \mathbb{R}$. Ekkor $E_1 = [0,1]$ halmaz kompakt.
2.) Legyen $M = \mathbb{R}$. Ekkor $E_2 = (0,1)$ halmaz nem kompakt, mert létezik olyan U_α lefedése, melyből nem választható ki véges lefedés. Ez a nyílt lefedés a következő:

$$U_n = \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right), \qquad n = 2, 3, \dots, \qquad \bigcup_{n=2}^{\infty} U_n = (0,1)$$

Kompakt halmaz jellemzése véges dimenzióban (Heine–Borel-tétel) és végtelen dimenzióban

Tétel (Heine–Borel-tétel) *Az* $\mathbb{R}^n$*-ben egy* $E \subset \mathbb{R}^n$ *részhalmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás Nézzük az $n = 1$ esetet. Ekkor az $E \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos, vagyis a Bolzano–Weierstass-tétel miatt létezik konvergens $\left(x_{n_k}\right)$ részsorozata, és mivel E zárt, ezért $\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} \in E$.

$n > 1$ esetén a bizonyítás az $x^{(k)} = \left(x_1^k, \dots, x_n^k\right)$ vektor elemeinek fölsorolásával történik. ■

Általánosítás végtelen dimenzióra

Példa Tekintsük $C([0,1])$-ben a zárt egységkört:

$$B_1(0) = \left\{f: [0,1] \to \mathbb{R}, \text{folytonos}, \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq 1\right\}$$

Be tudjuk látni, hogy ez annak ellenére, hogy korlátos és zárt is, nem kompakt, mivel végtelen dimenziós térben van és így e két feltétel nem elég ahhoz, hogy a kompaktság teljesüljön. Adjunk meg egy olyan $(f_n) \subset C([0,1])$ sorozatot, melyre $\|f_n\| = 1$ minden n-re:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x > \dfrac{1}{n-1} \\ 0, & x < \dfrac{1}{n} \\ \text{lineáris}, & \dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n-1} \end{cases}$$

A függvény határértéke nem folytonos és így nem is eleme $C([0,1])$-nek, vagyis a halmaz nem kompakt.

Tétel (Heine–Borel-tétel általánosítása végtelen dimenzióra) *Az* $\mathbb{R}^n$*-ben egy* $E \subset \mathbb{R}^n$ *részhalmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt és ekvifolytonos.*

4. tétel: Mérték, mértéktér. Számlálómérték. Lebesgue-mérték bevezetése $\mathbb{R}$-ben. Lebesgue-mérhető halmazok jellemzése. **Nullmértékű halmazok,** ezek struktúrája. **Cantor halmaz** $[0,1]$-ben, tulajdonságai.

Mérték, mértéktér

Legyen X egy tetszőleges halmaz. Az összes részhalmazok halmazát jelölje 2^X. Legyen $\mathcal{M} \subset 2^X$, X bizonyos részhalmazainak halmaza.

Definíció Az $\mathcal{M}$ halmaz *gyűrű,* ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1.) $A, B \in \mathcal{M}$ esetén $A \cup B \in \mathcal{M}$

2.) $A, B \in \mathcal{M}$ esetén $A \setminus B \in \mathcal{M}$

Definíció Az $\mathcal{M}$ halmaz *algebra,* ha a fenti 1.) és 2.) tulajdonság mellett:

3.) $X \in \mathcal{M}$

Definíció Az $\mathcal{M}$ halmaz σ-*gyűrű,* ha a gyűrű definícióban az 1.) tulajdonság helyett:

1.*) $\mathrm{A_k} \in \mathcal{M},\ \mathrm{k} = 1,2,\ldots$ esetén $\bigcup_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathrm{A_k} \in \mathcal{M}$

Definíció Az $\mathcal{M}$ halmaz σ-*algebra,* ha a σ-gyűrű tulajdonságai mellett:

3.) $X \in \mathcal{M}$

Definíció Ha az $\mathcal{M}$ halmaz σ-*algebra,* akkor az $(X, \mathcal{M})$ páros egy *mérhető tér,* $\mathcal{M}$ elemei pedig a *mérhető halmazok.*

Definíció Adott $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ azaz $\forall A \in \mathcal{M}$-hez $\mu(A) \geq 0$ illetve $\mu(A) = +\infty$ is lehet.

Azt mondjuk, hogy a μ függvény *additív,* ha $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Azt mondjuk, hogy a μ függvény σ-*additív,* ha $A_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$, $A_k \cap A_j = \emptyset$, $k \neq j$ esetén

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Definíció Adott $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Azt mondjuk, hogy a μ *mérték,* ha $\mathcal{M}$ σ-algebra és μ σ-additív.

Definíció Az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *mértéktér,* ha $\mathcal{M}$ σ-algebra és μ mérték.

Számlálómérték

Legyen X tetszőleges alaphalmaz. Legyen $\mathcal{M} = 2^X$ ennek összes részhalmaza. Tetszőleges $A \in \mathcal{M}$ esetén legyen

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{ha } A \text{ véges elemszámú} \\ +\infty, & \text{ha } A \text{ nem véges elemszámú} \end{cases}$$

Ekkor az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, a μ mértéket pedig számlálómértéknek hívjuk.

Lebesgue-mérték bevezetése ℝ-ben

Legyen $X = \mathbb{R}$. A mértéket és a mérhető halmazokat lépésenként definiáljuk:

1. lépés

Legyen $\mathcal{I}$ a véges intervallumok halmaza: $\mathcal{I} = \{[a,b],\ a < b\}$. Ennek elemei:

$$I = \{x : a \leq x \leq b\}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Az $\mathcal{I}$ halmazon a mérték az intervallum „hossza”: $m(I) = b - a$

2. lépés

Kiterjesztjük a mértéket az $\mathcal{E}$ egyszerű halmazokra, melyek

$$\mathcal{E} = \left\{ A = \bigcup_{k=1}^{n} I_k : I_k \in \mathcal{I}, \qquad I_k \cap I_j = \emptyset\ j \neq k \right\}$$

Ha $A \in \mathcal{E}$, akkor ennek mértéke legyen $m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k)$. Most két állítást fogalmazhatunk meg:

Állítás *Az $\mathcal{E}$ halmaz nem σ-algebra és nem is σ-gyűrű.*

Állítás *Az $m : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ σ-additív.*

3. lépés

Definiálunk egy külső mértéknek nevezett mértéket $2^{\mathbb{R}}$-en. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ tetszőleges részhalmaz. Ekkor ennek külső mértéke az $m^* : 2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ függvény:

$$m^*(A) \coloneqq \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

Állítás *m^* nem σ-additív.*

Állítás *Ha $A \in \mathcal{E}$, akkor $m^*(A) = m(A)$.*

4. lépés

Eddig már láttuk, hogy $\mathcal{E}$-n van m σ-additív halmazfüggvény, de $\mathcal{E}$ nem σ-algebra; valamint azt is láttuk, hogy $2^{\mathbb{R}}$ σ-algebra, de a rajta értelmezett m^* halmazfüggvény nem σ-additív. Szerencsére van boldog befejezés, $\exists \mathcal{M}$ σ-algebra, $\mathcal{E} \subset \mathcal{M} \subset 2^{\mathbb{R}}$, melyen az m^* megszorítása, $m^*|_{\mathcal{M}}$ σ-additív. Ezt a mértéket Lebesgue-mértéknek nevezzük.

5. lépés

Mindezt eddig csak $X = \mathbb{R}$ esetén vezettük be. $\mathbb{R}^n$-ben általában az $\mathcal{I}$ halmaz a következő:

$$\mathcal{I} = \{ I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n : I_k = \ [\![a, b]\!]\ , a_k \leq b_k \}$$

$$m(I) = \prod_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$$

vagyis a mérték „hossz”, „terület”, „térfogat” és a többi.

Definíció A fenti lépéssorozat eredményeképp kapott $\mathcal{M}$ halmaz elemei az ℝ-beli Lebesgue-mérhető halmazok. Az m^* külső mérték megszorítása $\mathcal{M}$-re a Lebesgue-mérték. Ezt a későbbiekben m jelöli.

Lebesgue-mérhető halmazok jellemzése

A kérdés adja magát: Mik azok a halmazok, melyek beletartoznak $\mathcal{M}$-be? Milyenek a mérhető halmazok? Erre pontos választ nem lehet adni, mivel egészen „fura” halmazok is mérhetők.

Egyrészt minden nyílt és minden zárt halmaz mérhető. Továbbá azok a halmazok, melyek nyílt és zárt halmazok megszámlálható uniója és metszete révén állnak elő.

Másrészt lehet nem mérhető halmazt is konstruálni, de ez nem triviális.

Nullmértékű halmazok, ezek struktúrája

Definíció Azt mondjuk, hogy az A halmaz *nullmértékű,* ha $m(A) = 0$. A nullmértékű halmazok terét $\mathcal{N}$ jelöli.

A nullmértékű halmazok halmaza, $\mathcal{N}$ zárt a megszámlálható metszetre és unióra. σ-gyűrű, de nem σ-algebra, hiszen az alaphalmaz ($\mathbb{R}$) nem nullmértékű. A mérték definíciója alapján $m(A) = 0$ azt jelenti, hogy

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)\,, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\} = 0$$

Ennek következménye, hogy ha $A \in \mathcal{M}$ és $m(A) = 0$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra megadható legfeljebb megszámlálható sok I_k, $k = 1,2, \ldots$ intervallum, melyre

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) < \varepsilon$$

Tehát ha $A = \{x\} \in \mathcal{M}$ egyelemű halmaz, akkor $m(A) = 0$. Ha $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \in \mathbb{R}$ megszámlálható elemszámú, akkor (mivel előáll egyelemű halmazok véges uniójaként) az $m(A) = 0$.

Cantor-halmaz $[0,1]$-ben, tulajdonságai

A Cantor-halmaz a következő konstrukció eredményeképp áll elő:
Legyen $C_0 = [0,1]$
Legyen $C_1 = C_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
Legyen $C_2 = C_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right)$
És így tovább.

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$$

Láthatjuk, hogy a $[0,1]$-ből kivágott részek mértéke:

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \cdots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Felvetődik a kérdés, hogy mi marad meg? Például az osztópontok, de még sok más pont is…

Állítás A Cantor-halmaz tulajdonságai:

1.) C zárt

2.) C kontinuum számosságú, sőt, létezik izomorfia C és $[0,1]$ közt.

3.) C mérhető és mértéke $m(C) = 0$.

Bizonyítás A zártság teljesül, hiszen $\forall k$ esetén C_k zárt. Zárt halmazok metszete pedig zárt. C mértéke pedig $m([0,1]) - m(K)$, ahol K a kivágott rész mértéke, ami 1. ■

5. tétel: Mérhető függvények. **Egyszerű függvények.** (Lépcsős függvények.) Lebesgue-integrál bevezetése. **Integrálható-ság feltétele.** Lebesgue- és Riemann-integrál kapcsolata.

Mérhető függvények

Definíció Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ függvény *mérhető,* ha $\{x : f(x) < a\} \subset \mathbb{R}^n$ halmaz mérhető minden $a \in \mathbb{R}$ esetén.

A fenti definícióban a $(-\infty, a)$ nyílt halmaz ősképét tekintjük.

Állítás *Ha az f függvény folytonos, akkor mérhető is.*

Állítás *Az f függvény mérhetősége ekvivalens az alábbi állítások bármelyikével:*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{x : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{x : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{x : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$$

Következmény, hogy mérhető függvény esetén $\forall a \in \mathbb{R}$-re $\{x : f(x) = a\} \in \mathcal{M}$.

Állítás *Ha f, g mérhető függvények, akkor*

1) $f + g$ *is mérhető*
2) $f \cdot g$ *is mérhető*
3) $\min(f, g)$ *is mérhető.*
4) *Ha (f_n) mérhető függvények sorozata, akkor* $\inf f_n, \sup f_n, \lim_{n\to\infty} f_n$ *is mérhető.*

Bizonyítás Az 1) tulajdonság teljesülését látjuk be: Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\{x : f(x) + g(x) < a\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (\{x : f(x) < r\} \cap \{x : g(x) < a - r\})$$

Ugyanis, ha $f(x) + g(x) < a$, akkor $f(x) < a - g(x)$. Ezért $\exists r \in \mathbb{Q}$, melyre

$$f(x) < r \text{ és } r < a - g(x) \Longrightarrow g(x) < a - r$$

Ezért tehát az $\{x : f(x) + g(x) < a\}$ előállítható megszámlálhatóan sok mérhető halmaz uniójaként, vagyis maga is mérhető. ■

Definíció Legyenek f és g mérhető függvények. Azt mondjuk, hogy $f = g$ *majdnem mindenütt* (m. m.) ha $m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Állítás *Ha f és g folytonosak és $f = g$ majdnem mindenütt, akkor $f(x) = g(x)$ $\forall x$.*

Tétel (Luzin-tétel) *Ha $f : X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény, akkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists g : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$.*

Tehát a mérhető függvényeken belül a folytonos függvények sűrűn vannak.

Egyszerű függvények, (lépcsős függvények)

Definíció Legyen $E \subset \mathbb{R}^n$ mérhető. Legyen χ_E az alábbi függvény:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Ezt a mérhető χ_E függvényt az E halmaz *karakterisztikus függvényének* hívjuk.

Definíció Azt mondjuk, hogy az f függvény *egyszerű* (vagy másik elnevezéssel *lépcsős*), ha értékkészlete, R_f véges elemszámú. Ez azt jelenti, hogy $R_f = \{y_1, \dots, y_n\}$. Ekkor $E_k = \{x : f(x) = y_k\}$ jelöléssel az f egyszerű függvény úgy írható mint

$$f = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \chi_{E_k}, \qquad E_k \cap E_j = \emptyset \ \ \forall y_k \in \mathbb{R}$$

Állítás *Az f egyszerű függvény pontosan akkor mérhető, ha $E_k \in \mathcal{M}$.*

Állítás *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény mérhető, akkor $\exists(s_n)$ egyszerű (lépcsős) függvényekből álló függvénysorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ $\forall x$. Továbbá, ha f nemnegatív, akkor $\exists(s_n)$ monoton növő egyszerű függvényekből álló sorozat melynek szintén f a határértéke.*

Bizonyítás (vázlatosan) Csak a monotonitást bizonyítjuk: Ha $f \geq 0$, akkor az E_k halmazok mellett, melyek alakja $E_k = \{x : k < f(x) < k + 1\} \in \mathcal{M}$, felírható egy másik halmaz: $E_n^+ = \{x : f(x) > n\}$. Ezzel a függvény:

$$f \sim \sum_{k=1}^{n} k \cdot \chi_{E_k} + (n+1)\, \chi_{E_k^+}$$

Következmény Az egyszerű függvények sűrűn vannak a mérhető függvények közt.

Lebesgue-integrál bevezetése

Az integrálnak szemléletesen ebben az esetben is a függvény alatti terület a jelentése. A Lebesgue-integrált négy lépésben fogjuk bevezetni:

1. lépés

Tekintünk egy egyszerű függvényt:

$$S(x) = \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Az $A \in \mathcal{M}$ mérhető halmazon

$$\int_A S \ \mathrm{d}m = m(A \cap E)$$

2. lépés

Most legyen az S függvény a következő lépcsős függvény:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{E_k}$$

Az $E \in \mathcal{M}$ mérhető halmazon

$$\int_E S \,\mathrm{d}m = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot m(E \cap E_k)$$

3. lépés

Most tegyük fel, hogy $f \geq 0$ nemnegatív, mérhető függvény. Ekkor ennek integrálja a követ-kezőt jelöli:

$$\int_E f \ \mathrm{d}m = \sup\left\{\int_E s \ \mathrm{d}m : 0 \leq s \leq f \text{ (m. m.)}\right\}$$

4. lépés

Most már megengedjük, hogy f tetszőleges mérhető függvény legyen. Ekkor f felbontható két függvényre, melyeket f_+ és f_- jelöl, mégpedig

$$f = f_+ + f_-, \qquad f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}, \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

Tehát $f_+ \geq 0$ és $f_- \geq 0$. Ezek integrálja már jól definiált:

$$\int_E f_+ \,\mathrm{d}m\,, \qquad \int_E f_- \,\mathrm{d}m$$

Definíció Azt mondjuk, hogy az f függvény *Lebesgue-integrálható,* ha mind a két fenti integrál véges. Ebben az esetben f integrálja az E halmazon a Lebesgue-mérték szerint:

$$\int_E f \ \mathrm{d}m = \int_E f_+ \,\mathrm{d}m + \int_E f_- \,\mathrm{d}m$$

Az R halmazon Lebesgue-integrálható függvények terét $\mathcal{L}(R)$ jelöli.

Integrálhatóság feltétele

Állítás *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos és mérhető, akkor Lebesgue-integrálható.*

Lebesgue- és Riemann-integrál kapcsolata

Tétel Ha $f \in \mathcal{R}([a,b])$, akkor $f \in \mathcal{L}([a,b])$ is és

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f \ \mathrm{d}m$$

Bizonyítás Csupán csak szemléletesen: Ha az f Riemann-integrálható, akkor a végtelen sűrű felosztásnak megfeleltetve egy lépcsős függvényt, az Lebesgue-integrálható, az integrál pedig éppen a Riemann-integrállal fog megegyezni.

Megjegyzés Előny, hogy több függvény Lebesgue-integrálható, mint Riemann-integrálható, vagyis $\mathcal{R}([a,b]) \subsetneq \mathcal{L}([a,b])$.

Tétel (Lebesgue-féle monoton konvergencia tétel) *Adott nemnegatív, mérhető, monoton növő függvények (f_n) sorozata: $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$, melyre a pontonkénti határérték-függvény* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. *Ekkor*

$$\int_E f \,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m$$

Tétel (Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel) *Adottak az (f_n) mérhető függvények, a pontonkénti határérték* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. *Tegyük fel, hogy létezik $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ közös felső korlát, melyre $f_n(x) \leq g(x)$ $\forall x, \forall n$. Ekkor*

$$\int_E f \,\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}m$$

6. tétel: $\mathcal{L}^p(R)$ terek $1 \le p < \infty$ esetén. $\mathcal{L}^p(R)$ és $\mathcal{L}^q(R)$ kapcsolata, ha $p < q$, véges ill. végtelen mértékű R mellett. Lényegében korlátos függvények, $\mathcal{L}^\infty(R)$ tér. Riesz-tétel.

$\mathcal{L}^p(R)$ terek $1 \le p < \infty$ esetén

Legyen $p \ge 1$ és $R = [a, b]$.

Definíció A $\mathcal{L}^p(R)$ függvényhalmazt a következőképpen értelmezzük:

$$\mathcal{L}^p(R) = \left\{ f : R \to \mathbb{R}, \qquad \int_R |f|^p \,\mathrm{d}m < \infty \right\}$$

Állítás *$\mathcal{L}^p$ vektortér.*

Bizonyítás Be kell látni, hogy $\mathcal{L}^p$ a skalárral való szorzásra és az összeadásra nézve zárt.

- Ha $f \in \mathcal{L}^p$, akkor $c \cdot f \in \mathcal{L}^p$, ahol $c \in \mathbb{R}$.
- Ha $f, g \in \mathcal{L}^p$, akkor következik-e, hogy $(f + g) \in \mathcal{L}^p$?

  Vegyük azt a becslést, hogy $|a + b|^p \le (|a| + |b|)^p$. Ez felülbecsülhető:

  $$|a + b|^p \le (|a| + |b|)^p \le (2 \cdot \max\{|a|, |b|\})^p = 2^p \cdot \max\{|a|^p, |b|^p\}$$
  $$2^p \cdot \max\{|a|^p, |b|^p\} \le 2^p(|a|^p + |b|^p)$$

  Ebből $a = f(x)$ és $b = g(x)$ választással azt kapjuk, hogy

  $$\int_R |f + g|^p \,\mathrm{d}m \le 2^p \left(\underbrace{\int_R |f|^p \,\mathrm{d}m}_{<\infty} + \underbrace{\int_R |g|^p \,\mathrm{d}m}_{<\infty} \right) < \infty \ \blacksquare$$

A $\mathcal{L}^p$ térben a majdnem mindenütt való egyenlőség ekvivalencia-reláció, így a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosnak tekintjük. Az így faktorizált $\mathcal{L}^p$ térben normát definiálunk:

$$\|f\|_p = \left(\int_R |f|^p \,\mathrm{d}m \right)^{\frac{1}{p}}$$

Tétel (Minkovszkij-egyenlőtlenség) *Ha $1 \le p < \infty$, akkor $\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Bizonyítás Az $p = 1$ estre a már ismert háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk. $p > 1$-re a bizonyítás bonyolult.

$\mathcal{L}^p(R)$ és $\mathcal{L}^q(R)$ kapcsolata, ha $p < q$, véges ill. végtelen mértékű R mellett

Állítás *Tegyük fel, hogy az alaptér mértéke $m(R) < \infty$. Legyenek $1 \le p \le q \le \infty$. Ekkor $\mathcal{L}^q(R) \subset \mathcal{L}^p(R)$. (Speciálisan $\mathcal{L}^\infty(R) \subset \mathcal{L}^p(R)$.)*

Állítás *Ha az alaptér mértéke nem véges, vagyis $m(R) = \infty$, akkor $\mathcal{L}^p(R) \not\subset \mathcal{L}^q(R)$, sem $\mathcal{L}^q(R) \not\subset \mathcal{L}^p(R)$.*

Definíció Legyen $p > 1$. Azt mondjuk, hogy a q a p Hölder-konjugáltja, ha $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ és $\forall p > 1$-hez $\exists!\, q$.

Tétel *Ha p és q Hölder-konjugáltak, akkor $\forall f \in \mathcal{L}^p$, $\forall g \in \mathcal{L}^q$ esetén $fg \in \mathcal{L}^1$ és*

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Lényegében korlátos függvények

Definíció Az $f: R \to \mathbb{R}$ függvény lényegében korlátos, ha $\exists A \in \mathcal{M}$ halmaz, melyre $m(A) = 0$ és $\exists K \in \mathbb{R}$ konstans, melyre $|f(x)| \le K$ ha $x \notin A$.

Definíció Az f lényegében korlátos függvény lényeges szuprémuma

$$\text{ess sup } f \coloneqq \inf\{K : \exists A \in \mathcal{M}, m(A) = 0, |f(x)| \le K \ \ \forall x \notin A\}$$

$\mathcal{L}^\infty(R)$ tér

Definíció A $\mathcal{L}^\infty(X)$ függvénytér az X-en értelmezett lényegében korlátos függvények összessége, a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosnak tekintjük:

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \{f : X \to \mathbb{R}, \text{ lényegében korlátos}\}$$

Állítás *A $\mathcal{L}^\infty(X)$ függvénytér vektortér.*

Definíció A *„végtelen norma”* a következő: $\|f\|_\infty \coloneqq \text{ess sup}|f|$.

Riesz-tétel

Tétel (Riesz-tétel) *Az $1 \le p \le \infty$ esetén a $\mathcal{L}^p(X)$ tér teljes. Más szóval ez azt jelenti, hogy $\forall (f_n) \subset \mathcal{L}^p(X)$ Cauchy-sorozatnak van határértéke:*

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n = f \in \mathcal{L}^p(X)$$

7. tétel: Lineárisan független függvényrendszer $\mathcal{L}^2(R)$-ben. **Ortonormált ill. teljes függvényrendszer.** Lineárisan független rendszer ortogonalizációja. Általános Fourier-analízis.

Vegyük a $\mathcal{L}^2(R)$ teret, ahol a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosnak tekintjük:

$$\mathcal{L}^2(R) = \left\{ f\colon R \to \mathbb{C}, \qquad \int_R |f|^2 \, \mathrm{d}m < \infty \right\}$$

A norma ebben a térben skalárszorzatból származtatható:

$$\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\int_R |f|^2 \, \mathrm{d}m \right)^{\frac{1}{2}}$$

Lineárisan független függvényrendszer $\mathcal{L}^2(R)$-ben

Definíció Az $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}^2(R)$ függvények *lineárisan függetlenek,* ha

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 0$$

valamely $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ esetén akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha_k = 0 \ \forall k.$

Definíció Az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ végtelen függvényrendszer *lineárisan független,* ha $\forall N \in \mathbb{N}$ esetén $(f_k)_{k=1,\ldots,N}$ függvényrendszer lineárisan független.

Ortonormált ill. teljes függvényrendszer

Definíció Az $f, g \in \mathcal{L}^2$ függvények *ortogonálisak,* ha $\langle f, g \rangle = 0$.

Definíció Az $f \in \mathcal{L}^2$ függvény *normált,* ha $\|f\|_2 = 1$.

Definíció Az $(f_k)_{k=1,\ldots,n}$ függvényrendszer *ortogonális,* ha $k \neq j$ esetén $\langle f_k, f_j \rangle = 0$.

Definíció Az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvényrendszer *ortonormált,* ha

$$\langle f_k, f_j \rangle = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

Definíció Az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvényrendszer teljes, ha $\forall f \in \mathcal{L}^2$ előállítható a következőképpen

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, \qquad c_k \in \mathbb{R}$$

vagyis

$$\lim_{n \to \infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k\|_2 = 0$$

Következmény Az (f_n) teljes, ha $\forall f_n \in \mathcal{L}^2, \forall \varepsilon > 0$-ra $\exists$ véges $\sum_{k=1}^{N} c_k f_k = F$, melyre

$$\int_X |f - F|^2 \, \mathrm{d}m < \varepsilon$$

Következmény[2] $\mathcal{L}^2$-ben az $A = \{\sum_{k=1}^{n} c_k f_k : n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{R}\}$ halmaz sűrűn van.

Definíció Az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvényrendszer *teljes ortonormált rendszer (TONR),* ha teljes és ortonormált is.

Lineárisan független rendszer ortogonalizációja

Tétel (Gram–Schmidt-ortogonalizáció) *Adott az* $(f_n) \subset \mathcal{L}^2$ *lineárisan független függvényrendszer. Ekkor létezik olyan* $(\varphi_n) \subset \mathcal{L}^2$ *függvényrendszer, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:*

- (φ_n) *ortonormált*
- $f_n \in \overline{\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}}$ *által kifeszített altér:* $f_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn}\varphi_k \qquad \alpha_{nn} \neq 0$
- $\varphi_n \in \overline{\{f_1, \dots, f_n\}}$ *által kifeszített altér:* $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kn} f_k \qquad \beta_{nn} \neq 0$
- *Előbbi két tulajdonságból következik, hogy* $\overline{\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}} = \overline{\{f_1, \dots, f_n\}}$
- (φ_n) *előjelétől eltekintve egyértelmű.*

Bizonyítás Konstruktívan bizonyítunk, megadjuk a φ_k függvényeket.

1. lépés

$$\varphi_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$$

2. lépés

Célunk, hogy $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ON rendszer legyen, miközben $f_2 = \alpha_{12}\varphi_1 + \alpha_{22}\varphi_2$. Ehhez úgy jutunk, hogy meghatározzuk f_2 vetületét φ_1-re, majd ezt kivonjuk f_2-ből és a kapott függvényt lenormáljuk.

Ha $\|\varphi_1\| = 1$, akkor f_2 vetülete φ_1-re $f_2|_{\varphi_1} = \langle f_2, \varphi_1 \rangle \cdot \varphi_1$. Tehát a 2. lépés után

$$\varphi_2 = \frac{f_2 - \langle f_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1}{\|f_2 - \langle f_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1\|}$$

n. lépés

Tegyük fel, hogy $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ már a kívánt tulajdonságú. Most is az előző utat követjük. Ennek alapján az ortonormált rendszer n-edik eleme:

$$\varphi_n = \frac{f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle f_n, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\left\| f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle f_n, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|}$$

■

Következmény Ha a kiinduló (f_n) teljes, akkor az ortogonalizálással kapott (φ_n) is teljes.

Általános Fourier-analízis

A klasszikus Fourier-sorfejtés

Tétel *Ha* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *véges sok szakadási hely kivételével folytonosan differenciálható és a szakadási helyeken a kétoldali határérték átlagát veszi fel, akkor* $f(x)$ *előáll a következő alakban:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx) \quad \forall x$$

ahol a_k *és* b_k *a korábbi tanulmányaink során megismert integrálok.*

Az imént szereplő tételben a $\cos(kx)$ és $\sin(kx)$ az alapfüggvények. Most azonban, hogy megismertük, miként lehet ortonormált függvényrendszerekkel foglalkozni, megadhatunk más alapfüggvényeket, melyekre az ortonormált tulajdonság ugyancsak teljesül.

Általános Fourier-sorfejtés

Legyen az alaptér, amelyben dolgozunk, $\mathcal{L}^2$. Vegyük a klasszikus Fourier-sorfejtés tételében szereplő $a_k \cdot \cos(kx)$ kifejezést, és alakítsuk át a következőre:

$$a_k \cdot \cos(kx) = \underbrace{a_k\sqrt{\pi}}_{c_k} \cdot \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}$$

Ekkor c_k a következőképp számolható:

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{d}x = \langle f, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \rangle$$

Tétel *Ha (φ_n) teljes ortonormált rendszer $\mathcal{L}^2$-ben, akkor $\forall f \in \mathcal{L}^2$ függvény előáll az*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

konvergens sor összegeként, ahol az ebben szereplő c_k együtthatók úgy számolhatók mint $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$.

Definíció Ez az előállítás az f függvény *Fourier-sorfejtése* a $(\varphi_k)_{k=1,\dots,\infty}$ rendszer szerint.

Lemma A H Hilbert-térben $(x_n) \subset H$ és $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ mellett $\forall y \in H$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x_0, y \rangle$$

8. tétel: Ortonormált polinomrendszer: Legendre-polinomok. Parseval-egyenlőség és általánosítása. **Riesz–Fisher-tétel. $\mathcal{L}^2(R)$ és ℓ^2 izometriája.** Általános Fourier-együtthatók.

Ortonormált polinomrendszer: Legendre-polinomok

Tekintsük a $\mathcal{L}^2([-1,1])$ teret. Ennek elemei az $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ négyzetesen integrálható függvények. Ebben a térben egy lineárisan független teljes rendszert határoz meg az $\{1, x, x^2 \dots\}$ függvényrendszer. Ebből a Gram–Schmidt-ortogonalizációval ortonormált bázist kaphatunk: $(P_n)_{n=1,2,\dots}$, melyek ortogoálisak, azaz

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{ha } n \neq m$$

és $\forall n$-re a $P_n(x)$ pontosan n-edfokú polinom:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{kn} x^k, \qquad \beta_{nn} \neq 0$$

Definíció Az imént bemutatott tulajdonságú polinomrendszer neve *Legendre-polinomok*.

Állítás *A Legendre-polinomrendszer teljes ortonormált függvényrendszer.*

$$P_n(x) = c_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n = c_n((x^2-1)^n)^{(n)}$$

ahol a normalizáló konstans

$$c_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!}$$

Bizonyítás Csak az ortogonalitást látjuk be, a normáltság (majdnem) triviális.

Legyen $n < m$. Ekkor

$$\int_{-1}^{1} ((x^2-1)^n)^{(n)} \cdot ((x^2-1)^m)^{(m)}\,dx =$$

$$= \left[((x^2-1)^n)^{(n)} \cdot ((x^2-1)^m)^{(m-1)}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} ((x^2-1)^n)^{(n+1)} \cdot ((x^2-1)^m)^{(m-1)}\,\mathrm{d}x$$

Itt az első tag nulla. A megmaradó integrált parciálisan integrálva szintén hasonló eredményre jutunk: az első tag itt is nulla. A parciális integrálást addig folytatva, míg az $(x^2-1)^n$ tag deriváltja nem nulla, az első tagok kiesnek. Mikor pedig a derivált nulla, akkor az egész integrál nulla. ■

Megjegyzés „Legrende-polinomrendszer” címszó alatt más c_n főegyütthatós p_n polinomokat is találhatunk. Ennek oka, hogy a normalizálás nem mindig a $\mathcal{L}^2$ norma szerint történik. A két legfontosabb tulajdonság ebben az esetben is, hogy p_n n-edfokú polinom, és ortogonálisak, azaz $\langle p_n, p_m \rangle = 0$

Parseval-egyenlőség és általánosítása

Tétel (Parseval-egyenlőség) *Legyen (φ_n) teljes ortonormált rendszer $\mathcal{L}^2(R)$-ben. Az $f \in \mathcal{L}^2$ Fourier-sorfejtése legyen*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

Ekkor

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Bizonyítás A Fourier-sorfejtésben a végtelen összeg konvergenciája $\mathcal{L}^2(R)$ normájában értendő, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| = \|f\|$$

Az ortogonalitást felhasználva a baloldalon szereplő összeg négyzete:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|c_k \varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

és ezzel az állítást beláttuk. ■

Tétel (Általánosított Parseval-egyenlőség) *Legyen (φ_n) teljes ortonormált rendszer $\mathcal{L}^2(R)$-ben és $f, g \in \mathcal{L}^2$ tetszőlegesek. Ekkor*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k$$

ahol $c = (c_k)$ és $d = (d_k)$ a megadott f és g függvények Fourier-*együtthatói. A fenti összefüggés így is írható:*

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle c, d \rangle_{\ell^2}$$

Riesz–Fisher-tétel

Tétel (Riesz–Fisher-tétel) *Adott tetszőleges $(d_k) \in \ell^2$, azaz*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 < \infty$$

Ekkor létezik $f \in \mathcal{L}^2(R)$, melyre

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2$$

és melynek Fourier-*együttható a d_k számok.*

Bizonyítás Legyen (φ_n) teljes ortonormált rendszer. Definiáljuk a következő mennyiséget:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k$$

Bármilyen $m > n$ esetén

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} \sum_{k=n+1}^{m} d_j d_k \langle f_j, f_k \rangle = \sum_{k=n+1}^{m} d_k^2$$

Tehát az (s_n) sorozat Cauchy-sorozat. Mivel Hilbert-térben vagyunk, ezért létezik olyan f, melyre a $\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\| = 0$, így a tétel állítása igaz. ■

$\mathcal{L}^2(R)$ és ℓ^2 izometriája

A Parseval-egyenlőségből az következik, hogy $\forall f \in \mathcal{L}^2(R)$ függvényhez hozzá tudunk rendelni egy ℓ^2-beli sorozatot, éspedig a (φ_n) teljes ortonormált rendszer segítségével. Az általánosított Parseval-egyenlőség következménye, hogy a $\mathcal{L}^2(R)$ és ℓ^2 terek izometrikusan izomorfak. Az izometriát tetszőleges teljes ortonormált rendszer alapján a Fourier-együtthatókkal meg lehet adni:

$$f \leftrightarrow (c_n)$$

Ha az ortonormált rendszer nem teljes, akkor is definiálhatjuk a Fourier sorfejtését az adott ortonormált rendszer szerint. Ekkor azonban a sor összege nem feltétlenül egyezik meg a kiinduló függvénnyel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = S \;\not\Rightarrow f = S$$

Általános Fourier-együtthatók

Legyen az alaptér, amelyben dolgozunk, $\mathcal{L}^2$. Vegyük a klasszikus Fourier-sorfejtés tételében szereplő $a_k \cdot \cos(kx)$ kifejezést, és alakítsuk át a következőre:

$$a_k \cdot \cos(kx) = \underbrace{a_k\sqrt{\pi}}_{c_k} \cdot \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}$$

Ekkor c_k a következőképp számolható:

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}x = \langle f, \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \rangle$$

Tétel *Ha (φ_n) teljes ortonormált rendszer $\mathcal{L}^2$-ben, akkor $\forall f \in \mathcal{L}^2$ függvény előáll az*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

konvergens sor összegeként, ahol az ebben szereplő c_k együtthatók úgy számolhatók mint $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$.

Definíció Ez az előállítás az f függvény *Fourier-sorfejtése* a $(\varphi_k)_{k=1,\dots,\infty}$ rendszer szerint.

9. tétel: Általános $\mathcal{L}_\rho^2(R)$ terek adott ρ súlyfüggvénnyel. **ON polinomrendszerek tulajdonságai.** Példák: Csebisev-, Hermite-, Laguerre-polinomok. Egy ON függvényrendszer: Haar-rendszer.

Általános $\mathcal{L}_\rho^2(R)$ terek adott ρ súlyfüggvénnyel

Legyen $R \subset \mathbb{R}$. A klasszikus Lebesgue-mérték helyett egy súlyfüggvénnyel megadott mértéket használunk. Ez a következő:

$$m_\rho(A) = \int_A \rho \, \mathrm{d}m$$

ahol $\rho : R \to \mathbb{R}_+$ adott Lebesgue-integrálható függvény. Formálisan tehát azt írhatjuk, hogy

$$\mathrm{d}m_\rho = \rho \, \mathrm{d}m$$

Az m_ρ mérték szerinti integrál egy E mérhető halmazon így számolható:

$$\int_E f \, \mathrm{d}m_\rho = \int_E f \cdot \rho \, \mathrm{d}m$$

Definíció Az általános $\mathcal{L}_\rho^2(R)$ teret így értelmezzük:

$$\mathcal{L}_\rho^2(R) = \left\{ f : R \to \mathbb{R} : \int_R f^2 \, \mathrm{d}m_\rho = \int_R f^2 \cdot \rho \, \mathrm{d}m < \infty \right\}$$

Ebben a térben is azonosnak tekintjük azokat a függvényeket, melyek majdnem mindenütt egyenlők.

Definíció A $\mathcal{L}_\rho^2(R)$ térben a *skalárszorzatot* úgy definiáljuk mint

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_R f \cdot g \cdot \rho \, \mathrm{d}m$$

és ezért a belőle származtatható *norma*

$$\|f\|_{2,\rho} = \left(\int_R |f|^2 \cdot \rho \, \mathrm{d}m \right)^{\frac{1}{2}}$$

ON polinomrendszerek tulajdonságai

Ebben a „súlyozott” térben a polinomrendszer ortogonalitása azt jelenti, hogy

$$\int_R P_n P_m \cdot \rho \, \mathrm{d}m = 0, \qquad n \neq m$$

Ugyanígy a normáltságot a súlyfüggvénnyel ellátott norma szerint kell érteni:

$$\left(\int_R |P_n|^2 \cdot \rho \, \mathrm{d}m \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Tehát az ortonormáltság feltétele:

$$\langle P_k, P_j \rangle = \int_R P_k P_j \cdot \rho \, \mathrm{d}m = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

Példák: Csebisev-, Hermite-, Laguerre-polinomok

Polinomrendszerek megadásánál mindig az $\{1, x, x^2, \dots\}$ bázisból indulunk ki, melyre az

$$\int_R (x^k)^2 \, \rho \, \mathrm{d}m$$

integrált számoljuk ki. Ennek eredményeképp állnak elő az alábbi polinom-rendszerek.

Csebisev-polinomok

Legyen $R = [-1,1]$.

Állítás *Az elsőfajú (még normálatlan) Csebisev-polinomok:*

$$T_n(x) = \cos(n \, arccos(x))$$

és a súlyfüggvény

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Állítás *A másodfajú (még normálatlan) Csebisev-polinomok:*

$$U_n(x) = \frac{\sin\big((n+1) \, arccos(x)\big)}{\sin(arccos(x))}$$

és a súlyfüggvény

$$\rho_2 = \sqrt{1-x^2}$$

Bevezetve az $x = \cos(\theta)$ jelölést a polinomok a következő alakban is írhatók:

$$T_n(x) = \cos(n\theta)$$

$$U_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin(\theta)}$$

Hermite-polinomok

Legyen $R = \mathbb{R}$.

Állítás *A Herimte-polinomok:*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

és a súlyfüggvény

$$\rho = e^{-x^2}$$

A fenti képlet deriválásával az alábbi rekurzív előállítást kapjuk:

$$H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

Laguerre-polinomok

Legyen $R = \mathbb{R}^+$.

Állítás *A Laguerre-polinomok:*

$$L_n(x) = \frac{e^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n e^{-x})$$

és a súlyfüggvény

$$\rho = e^{-x}$$

Egy ON függvényrendszer: Haar-rendszer

Legyen az alaptér $\mathcal{L}^2([0,1])$. Ebben a térben a Haar-függvények ortonormált rendszert alkotnak. Ezek nem polinomok, hanem „wavelet"-ek. Megadásuk blokkokban történik: az n-edik blokk függvényei $H_{n,k}$, ahol $k = 1, \dots, 2^n$. Minden esetben $H_{n,k}: [0,1] \to \mathbb{R}$.

Ha $n = 0$, akkor két függvény van. A (kivételesen létező) $H_{0,0}$ és $H_{0,1}$. Ezek a következők:

$$H_{0,0}(x) = 1 \ \ \forall x \in [0,1], \qquad H_{0,1}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Ha $n = 1$, akkor 2^1, azaz két függvény van. A $[0,1]$ intervallumot ugyanennyi darabra osztjuk. A $H_{1,1}$ az első, a $H_{1,2}$ a második részen vesz föl nullától különböző értéket:

$$H_{1,1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & 0 \le x < \frac{1}{2^2} \\ -\sqrt{2}, & \frac{1}{2^2} \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & x \ge \frac{1}{2} \end{cases}, \qquad H_{1,2}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2^2} \\ -\sqrt{2}, & \frac{3}{2^2} \le x \le 1 \\ 0, & x \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ha $n > 0$ tetszőleges szám, akkor a $[0,1]$ intervallumot 2^n részre osztjuk és a $H_{n,k}$ függvény a k-adik blokkban veszi fel a nullától különböző értékeit. Általánosan $H_{n,k}$ megadása:

$$H_{n,k} = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \frac{k-1}{2^n} \le x < \frac{k - {}^1\!/_2}{2^n} \\ -\sqrt{2^n}, & \frac{k - {}^1\!/_2}{2^n} \le x \le \frac{k}{2^n} \\ 0, & \text{máskülönben} \end{cases}$$

10. tétel: Absztrakt lineáris operátorok. Folytonosság. Korlátosság. **Operátor normája.** Példák: ℓ^2-ben, $\mathcal{C}([a,b])$-ban, $\mathbb{R}^n$-ben. $\mathcal{B}(X,Y)$ **mint normált tér.**

Absztrakt lineáris operátorok

Legyen X és Y két vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felet. (A számtest most $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$.)

Definíció Egy $T : X \to Y$ leképezést *operátornak* nevezünk.

Definíció A $T: X \to Y$ operátor *lineáris,* ha értelmezési tartománya $D_T \subset X$ lineáris altér és ha $T\{\alpha x + \beta y\} = \alpha T\{x\} + \beta T\{y\}$ $\forall x, y \in X$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Definíció Ha $R_T = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ számtest, akkor a $T: X \to \mathbb{K}$ operátort *funkcionálnak* hívjuk.

Folytonosság

Definíció Azt mondjuk, hogy a $T: X \to Y$ lineáris operátor *folytonos az $x_0 \in X$ pontban,* ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre ha $\|x - x_0\|_X < \delta$, akkor $\|Tx - Tx_0\|_Y < \varepsilon$.

Állítás *A T operátor folytonossága az x_0-ban ekvivalens a sorozatfolytonossággal. Ez azt jelenti, hogy ha tetszőleges X-beli sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, akkor a megfelelő Y-beli sorozatra $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0$ teljesül.*

Tétel *A $T: X \to Y$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos minden pontban, ha egyetlen pontban folytonos.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy T folytonos valamely $x_0 \in X$ pontban. Legyen $x \in X$ egy másik tetszőleges pont. A sorozatfolytonosságot látjuk be. Legyen $(x_n) \subset X$ egy olyan sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Definiálunk egy másik (y_n) sorozatot:

$$y_n = x_n - x + x_0$$

Ennek határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - x + x_0) = x - x + x_0 = x_0$$

Ezért $\lim_{n\to\infty} Ty_n = Tx_0$ az x_0-beli folytonosság miatt. Másrészt T lineáris:

$$Tx_0 = \lim_{n\to\infty} Ty_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n - Tx + Tx_0$$

Ezért valóban $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$, ami az x-beli folytonosságot igazolja. ■

Korlátosság

Definíció A $T: X \to Y$ lineáris operátor *korlátos,* ha $\exists M > 0$, melyre

$$\|Tx\|_Y < M \cdot \|x\|_X \quad \forall x$$

Tétel *Egy $T: X \to Y$ lineáris operátor pontosan akkor korlátos, ha folytonos.*

Bizonyítás *„Odafele”* Tegyük fel, hogy T korlátos. Nyilván $T(0) = 0$. A korlátosság miatt van olyan M, amelyre $\|Tx\| \le M\|x\|$, $\forall x$. Ezért ha az (x_n) sorozatra $x_n \to 0$, akkor $Tx_n \to 0$. Tehát T az x_0-ban folytonos.

„Visszafele” Tegyük fel, hogy T folytonos $x_0 = 0$-ban. Ekkor $\varepsilon = 1$-hez van olyan δ, melyre $\|x - 0\| \le \delta \Longrightarrow \|Tx - 0\| \le 1$. Legyen $x \in X$ tetszőleges, $x \ne 0$. Ekkor az $y = \delta \frac{x}{\|x\|}$ vektor normája $\|y\| = \frac{\delta}{\|x\|}\|x\| = \delta$. A folytonosság miatt ezért $\|Ty\| \le 1$. Átrendezve

$$Ty = T\left\{\frac{\delta}{\|x\|}x\right\} = \frac{\delta}{\|x\|}Tx \Longrightarrow \|Ty\| = \frac{\delta}{\|x\|}\|Tx\| \le 1$$

Ebből azt kapjuk, hogy $\|Tx\| \le \frac{1}{\delta}\|x\|$ $\forall x$. Tehát $M = \frac{1}{\delta}$ választással a korlátosság definíciója teljesül. ■

Operátor normája

Definíció Egy T korlátos és lineáris operátor *normája* a legkisebb $M \geq 0$, melyre a $\|Tx\|_Y < M \cdot \|x\|_X \quad \forall x$ tulajdonság teljesül:

$$\|T\| = \min\{M : \|Tx\| \leq M\|x\|, \qquad \forall x\}$$

Példák: ℓ^2-ben, $\mathcal{C}([a,b])$-ben, $\mathbb{R}^n$-ben

Példa $\mathbb{R}^n$-ben

Legyen X és Y véges dimenziós vektortér, például $X = \mathbb{R}^n$ és $Y \in \mathbb{R}^m$. Egy $T: X \to Y$ operátor pontosan akkor lineáris, ha $\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix, melyre $Tx = A \cdot x$, vagyis

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad (Ax)_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k$$

Példa ℓ^2-ben

Legyen $X = Y = \ell^2$. A bal shift (balra tolás) operátort úgy definiáljuk mint $T: \ell^2 \to \ell^2$, ahol

$$T\{[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]\} = [x_2, x_3, \dots, x_n, \dots]$$

Vizsgáljuk meg a korlátosságot! Legyen $x = [x_1, x_2, \dots, x_n, \dots] \in \ell^2$. Ennek normája

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Megbecsüljük Tx normáját:

$$Tx = [x_2, x_3, \dots, x_n, \dots], \qquad \|Tx\| = \left(\sum_{i=2}^{\infty} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$$

Ezért minden $M \geq 1$ számra teljesül a korlátosság feltétele, vagyis T korlátos. E felső korlát mellet ha $x = [0,1,0,0,\dots]$, akkor $\|x\| = 1$ és $\|Tx\| = \|[1,0,0,\dots]\| = 1$, tehát $\|T\| = 1$.

Példa $\mathcal{C}([a,b])$-ben

Legyen $X = \mathcal{C}([a,b])$ és $Y = \mathbb{R}$. Az integrál operátor már jól ismert: $f \in \mathcal{C}([a,b])$ esetén

$$Tf \coloneqq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Vizsgáljuk meg a korlátosságot!

$$\|Tf\| = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \|f\|\,\mathrm{d}x = (b-a)\|f\|$$

Ezért minden $M \geq b - a$ számra teljesül a korlátosság feltétele, vagyis T korlátos. A norma meghatározásához nézzük azt, ha $f \equiv c$ konstanssal, akkor

$$|Tf| = \int_a^b |c|\,\mathrm{d}x = |c|(b-a) = \|f\|(b-a)$$

ezért az integrál operátor normája $\|T\| = b - a$.

$\mathcal{B}(X,Y)$ mint normált tér

Definíció Az X és Y közötti korlátos lineáris operátorok halmaza $\mathcal{B}(X,Y)$:

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{T : X \to Y, \text{korlátos, lineáris}\}$$

Ez az operátornormával normált-teret alkot.

Állítás *Ha Y Banach-tér, akkor $\mathcal{B}(X,Y)$ is Banach-tér.*

Bizonyítás (Vázlat) Legyen $(T_n) \subset \mathcal{B}(X,Y)$ korlátos lineáris operátorokból álló Cauchy-sorozat. Ez azt jelenti, hogy $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N$ küszöbindex, melyre

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon, \qquad \forall n, m \geq N$$

Az operátornorma definíciója szerint ebből következik, hogy $\forall x$-re

$$\|(T_n - T_m)\{x\}\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \Longrightarrow \|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon\|x\|$$

Emiatt $(T_n x) \subset Y$ Cauchy-sorozat minden x-re, tehát Y teljessége miatt a sorozat konvergens. Ezért $\lim_{n\to\infty} T_n x$ jól definiált. Legyen $Tx \coloneqq \lim_{n\to\infty} T_n x$, ahol $Tx \in Y$. Az így kapott $T: X \to Y$ operátor lineáris és korlátos. Korlátossága abból következik, hogy ha (T_n) operátor-sorozat Cauchy-sorozat, akkor korlátos. Ezért van olyan M, melyre $\|T_n\| \leq M$ minden n-re teljesül, és a határérték monotonitása miatt T-re is. ■

Következmény Ha $Y = \mathbb{R}$, akkor $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ Banach-tér. Tehát az X téren értelmezett funkcionálok Banach-teret alkotnak.

11. tétel: Lineáris funkcionál mint absztrakt lineáris operátor. Példák függvényterekben. **Funkcionál normája. Duális tér.** Példa: $\mathbb{R}^n$. Gyenge és erős konvergencia. Második duális tér. Reflexív terek.

Lineáris funkcionál mint absztrakt lineáris operátor

Definíció Az $f : X \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris operátort *lineáris funkcionálnak* nevezzük.

A funkcionálok jelölésére kisbetűket használunk: f, g stb. Az $x \in X$-hez rendelt értéket újra a valós függvényeknél megszokott módon $f(x)$ fogja jelölni.

Példák függvényterekben

1 Példa

Legyen $\mathcal{C}([a,b])$ az $[a,b]$-n értelmezett valós értékű folytonos függvények tere. Az integrál-operátor jól ismert, $x(t) \in \mathcal{C}([a,b])$ esetén

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Példa

Rögzített $y \in \mathcal{C}([a,b])$ mellett

$$g(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Példa

Rögzített $t_0 \in [a,b]$ mellett

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0) = \int_a^b x(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t$$

Funkcionál normája

Definíció Egy f korlátos és lineáris funkcionál *normája* a következőképpen kapható meg:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$$

Duális tér

Definíció Az $(X, \|\cdot\|)$ tér *duálisa* az X-en értelmezett korlátos lineáris funkcionálok halmaza. Jele X^*.

A korábbi jelöléssel $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Az X^* elemei korlátos és lineáris operátorok, tehát X^*-ban norma értelmezhet a már ismert módon:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$$

Példa: $\mathbb{R}^n$

Belátjuk, hogy ha $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, akkor $\exists a \in \mathbb{R}^n$, melyre $f(x) = a^T x$. Legyen ugyanis $e^j \in \mathbb{R}^n$ a j-edik egységvektor, melynek csupán a j-edik eleme 1, a többi 0. Jelölje $a_j = f(e^j)$. Ekkor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n] = \sum_{j=1}^n x_j e^j$ miatt a linearitást felhasználva:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} x_j f\left(e^j\right)=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = a^T x$$

Ezért $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$. Az $(\mathbb{R}^n)^*$-on indukált norma függ attól, hogy $\mathbb{R}^n$-ben milyen normát tekintünk. Az Euklideszi normával

$$|f(x)|=\left|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}=\|a\|\cdot\|x\|$$

Mivel $f(a)=\|a\|\cdot\|a\|$, ezért azt kapjuk, hogy $\|f\|=\|a\|_2$

Most ha a normát megváltoztatjuk és az $\|x\|_\infty = \max\{x_j\}$ normával számolunk, akkor

$$|f(x)|=\left|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n}\left|a_j x_j\right| \le \max\left|x_j\right|\sum_{j=1}^{n}\left|a_j\right| = \|x\|_\infty\|a\|_1$$

A fenti sorban $x_j = \operatorname{sign}\left(a_j\right)$ választással egyenlőséget kapunk. Így $\|f\| = \|a\|_1$. A duális tér függ az alaptér normájától. Azt kapjuk, hogy

$$(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2)^* = (\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2), \qquad (\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_\infty)^* = (\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_1)$$

Általában is igaz, hogy

$$\left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p\right)^* = \left(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_q\right),\ \text{ahol } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Hasonlóan belátható, hogy $(\ell^2)^* = \ell^2$ és $(\ell^p)^* = \ell^q$, ahol p, q Hölder-konjugáltak.

Gyenge és erős konvergencia

Definíció Az (x_n) sorozat gyengén konvergál az x_0 ponthoz, ha

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0), \qquad \forall f\in X^*$$

Definíció Az (x_n) sorozat erősen konvergál az x_0 ponthoz, ha

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = 0$$

Állítás *Ha ahz $(x_n)\subset X$ sorozat erősen konvergens, akkor gyengén is konvergens.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy az (x_n) sorozat erősen konvergens. Legyen $f\in X^*$egy funkcionál. Ekkor a linearitás miatt $f(x_n)-f(x_0)=f(x_n-x_0)$. Ezért

$$|f(x_n)-f(x_0)| = |f(x_n-x_0)| \le \|f\|\|x_n-x_0\| \to 0$$

tehát a sorozat gyengén is konvergens. ■

Megjegyzés A fenti állítás megfordítása nem igaz.

Második duális tér

Definíció Az X normált tér *második duális tere* az X^* duális tere. Jelölése: X^{**}

Nézzünk egy példát! Legyen $x_0 \in X$ rögzített. Ennek megfeleltethető egy $\varphi_{x_0}: X^* \to \mathbb{R}$ leképezés: $f \in X^* \longmapsto \varphi_{x_0}(f) = f(x_0)$. A φ_{x_0} lineáris és korlátos. Utóbbi azért, mert

$$\left|\varphi_{x_0}(f)\right| = |f(x_0)| \leq \|f\|\|x_0\|$$

Tehát $\varphi_{x_0} \in X^{**}$, sőt, igazolható, hogy $\left\|\varphi_{x_0}\right\|_{X^{**}} = \|x_0\|_X$.

Mindezekből azt kapjuk, hogy $X \subseteq X^{**}$ természetes módon beágyazható.

Reflexív terek

Definíció Ha $X = X^{**}$, akkor a tér *reflexív*. Ha $X \subsetneq X^{**}$, akkor a tér *irreflexív*.

Példa

Az $X = \mathbb{R}^n$ tér bármilyen normával tekintve reflexív.
Az $X = c_0$, ahol c_0 a nullsorozatok tere, irreflexív.

12. tétel: Folytonos lineáris operátorok Banach térben: $\mathcal{B}(X)$. Operátorok szorzata. Banach-algebra. **Inverz operátor létezésének feltétele.** Inverz operátorok tulajdonságai. **Spektrum.** Kapcsolat a sajátértékkel. Operátor spektrumának alaptulajdonságai. Példák.

Folytonos lineáris operátorok Banach térben: $\mathcal{B}(X)$

Definíció Az X és Y közötti korlátos lineáris operátorok halmaza $\mathcal{B}(X, Y)$, ahol speciálisan, ha $Y = X$, akkor ezt úgy írjuk, mint $\mathcal{B}(X)$:

$$\mathcal{B}(x) = \{T: X \to X\ ,\ \text{korlátos, lineáris}\}$$

A $\mathcal{B}(X)$-en gazdag struktúra van. Vektortér, és van rajta norma is értelmezve.

Operátorok szorzata

A $\mathcal{B}(X)$ téren definiálható két operátor, $T, S \in \mathcal{B}$ szorzata, mégpedig $TS \coloneqq T \circ S \in \mathcal{B}(X)$.

Banach-algebra

Definíció Tegyük fel, hogy X teljes normált tér, azaz Banach-tér. Ekkor $\mathcal{B}(x)$ is Banach-tér, melyen szorzást értelmeztünk. Ez egy *Banach-algebra*.

Ebben a térben a szorzásra nézve van egységelem: $I: X \to X$, melyre $x \mapsto Ix \coloneqq x$. Ekkor

$$TI = IT = T, \qquad \forall T \in \mathcal{B}(X)$$

Inverz operátor létezésének feltétele

Definíció A $T \in \mathcal{B}(X)$ operátor *invertálható,* ha van olyan $S \in \mathcal{B}(X)$ operátor, melyre $TS = ST = I$.

Tétel *Legyen X egy Banach-tér. Tegyük fel, hogy valamely $T \in \mathcal{B}(X)$ lineáris operátorra teljesül, hogy $\|T\| < 1$. Ekkor $I - T$ invertálható, és*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

Bizonyítás Az $I - T: X \to X$ hozzárendelés azt jelenti, hogy ha $(I - T)x = y$, akkor $x - Tx = y$. Ha invertálható az operátor, akkor bármilyen rögzített y-hoz megkereshetjük a megfelelő x-et. Átrendezve az $x - Tx = y$ összefüggés azzal lesz ekvivalens, hogy $x = y + Tx$. Tetszőleges $y \in X$ esetén ez előbbi egyenlet megoldását iterációval keressük:

Legyen $x_0 \in X$ tetszőleges, ez a kiindulópont. Az iteráció további lépései

$$x_1 = y + Tx_0, \qquad x_2 = y + Tx_1, \qquad \dots, \qquad x_n = y + Tx_{n-1}, \qquad \dots$$

Így kapunk egy $(x_n) \subset X$ sorozatot. Ekkor

$$x_{n+1} - x_n = (y + Tx_n) - (y + Tx_{n-1}) = Tx_n - Tx_{n-1} = \dots = T^n(x_1 - x_0)$$

Ezért a norma korlátossága miatt $\|x_{n+1} - x_n\| \le \|T^n\| \cdot \|x_1 - x_0\|$. Felhasználva a szub-multiplikatív tulajdonságot:

$$\|T^n\| \cdot \|x_1 - x_0\| \le \|T\|^n \cdot \|x_1 - x_0\|$$

Felhasználva továbbá, hogy $\|T\| < 1$, látható, hogy $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$ exponenciális sebességgel. Ezért (x_n) Cauchy-sorozat X-ben, tehát konvergens, és határértéke az x^*. A sorozatot definiáló egyenlet $x_{n+1} = y + Tx_n$ átrendezése a határátmenettel: $x^* = y + Tx^*$, átrendezve azt kapjuk, hogy $x^* = (I - T)^{-1}y$, tehát y-nak valóban létezik ősképe. $x_0 = 0$ választással pedig a fenti sorozat tagjai

$$x_n = y + Tx_{n-1} = y + T(y + Tx_{n-1}) = y + Ty + T^2x_{n-1} = \cdots = \sum_{k=0}^{n-1} T^k y$$

ahol $n \to \infty$ esetben a tétel állítását kapjuk. ■

Inverz operátorok tulajdonságai

A tételnek két következménye van:

Állítás *Legyen $T \in \mathcal{B}(X)$ invertálható operátor. Tegyük fel, hogy valamely $S \in \mathcal{B}(X)$-re*

$$\|S\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$$

Ekkor $T + S$ is invertálható marad.

Bizonyítás Szorzatként írva: $T + S = T(I + T^{-1}S) = T(I + A)$. A jobboldal első tényezője invertálható. A második tényezőben szereplő A mátrix normája

$$\|A\| = \|T^{-1}S\| \leq \|T^{-1}\|\|S\| < 1$$

ezért $I + A$ invertálható. ■

Állítás *$\mathcal{B}(X)$-ben az invertálható operátorok halmaza egy $G \subset \mathcal{B}(X)$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás Ha $T \in \mathcal{B}(X)$ invertálható, akkor $\varepsilon = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ választással a T operátor ε sugarú környezetében lévő operátorok is invertálhatóak lesznek, tehát T belső pontja G-nek. ■

Spektrum

Definíció Egy $T \in \mathcal{B}(X)$ operátor spektruma azokból a $\lambda \in \mathbb{C}$ értékekőbl áll, melyekre $T - \lambda I$ nem invertálható. A spektrumot $\sigma(T)$ jelöli.

Kapcsolat a sajátértékkel

Ha X véges dimenziós, akkor $\mathcal{B}(X)$ elemei a négyzetes mátrixok. Ebben az esetben a spektrum a sajátértékek halmaza. Ha X végtelen dimenziós, akkor egy operátor spektruma a sajátértékeken kívül folytonos spektrumot is tartalmazhat, vagyis végtelen dimenziós Banach-térben egy operátor spektruma bővebb is lehet, mint a sajátértékek halmaza.

Operátor spektrumának alaptulajdonságai

Tétel *$\sigma(T)$ nemüres halmaz.*

Tétel *$\sigma(T)$ mindig zárt halmaz $\mathbb{C}$-ben.*

Bizonyítás Belátjuk, hogy $\sigma(T)$ komplementere nyílt. Tegyük fel, hogy λ nem tartozik a spektrumba. Ekkor $T - \lambda I$ invertálható. $T - \lambda I$ eleme a nyílt G halmaznak. (G jelölte az invertálható operátorok halmazát $\mathcal{B}(\ell^2)$-ben.) Ezért van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $T - (\lambda + \varepsilon')I \in G$ ha $|\varepsilon'| < \varepsilon$, és emiatt λ körüli ε sugarú gömb is benne van a spektrum komplementerében. ■

Tétel *$\sigma(T)$ korlátos halmaz.*

Bizonyítás Legyen $|\lambda| > \|T\|$. Belátjuk, hogy ekkor λ biztosan nem tartozik a spektrumba. Azt írhatjuk, hogy $T - \lambda I = -\lambda(I - \lambda^{-1}T)$, ahol a jobboldalon az I mellett szereplő mátrix normája $\|\lambda^{-1}T\| = |\lambda|^{-1}\|T\| < 1$. Ezért $I - \lambda^{-1}T$ inevrtálható, azaz $T - \lambda I$ is invertálható. Ez azt jelenti, hogy $\lambda \notin \sigma(T)$. Tehát $\sigma(T)$-ben csak olyan értékek lehetnek, melyre $|\lambda| \leq \|T\|$. ∎

Példák

1. Példa

Legyen az A mátrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-i \end{bmatrix}$$

Ekkor sajátértékei leolvashatók a főátlóból, és így a mátrix által megvalósított operátor spektruma $\sigma(A) = \{1{,}2{,}5 - i\}$

2. Példa

Tekintsük ℓ^2-ben azt a folytonos lineáris operátort, melyet a D végtelen dimenziós diagonális mátrix határoz meg. Határozzuk meg D spektrumát!

Ha $\lambda = \lambda_n$, akkor $(D - \lambda_n I)$-ben van egy nulla sor, és ezért nem invertálható. Sőt, $\lambda = \lambda_n$ egyben sajátérték is. Emiatt $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(D)$.

Vajon van-e más eleme is a spektrumnak? Ha $\lambda \in \mathbb{C}$, akkor $(D - \lambda I) = \operatorname{diag}\{\lambda_n - \lambda,\ n \in \mathbb{N}\}$. Ennek az operátornak az „inverz jelöltje":

$$S = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{\lambda - \lambda_n}, \qquad n \in \mathbb{N}\right\}$$

Kérdés, hogy ez a mátrix $\mathcal{B}(\ell^2)$-beli-e. Felhasználva azt az állítást, hogy $D \in \mathcal{B}(\ell^2)$ pontosan akkor teljesül, ha a (λ_n) sorozat korlátos, azt kapjuk, hogy ha λ torlódási pontja a (λ_n) sorozatnak, akkor $\left(\frac{1}{\lambda - \lambda_n}\right)$ nem korlátos. Tehát $(D - \lambda I)$ nem invertálható. Ezért $\lambda \in \sigma(D)$, tehát a sajátértékek sorozatának torlódási pontjai is benne vannak a spektrumban.

13. tétel: Funkcionálok Hilbert-térben. Riesz reprezentációs tétel. **Hilbert-tér duális tere. Lineáris operátor adjungáltja Hilbert-térben.** Példa véges és végtelen dimenzióban. Önadjungált operátorok. Példák. Ortogonális vetítés.

Funkcionálok Hilbert-térben

Legyen $y \in H$ rögzített ebben a térben. Az $f_y\colon H \to \mathbb{R}$ funkcionált így definiáljuk:

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle$$

Ekkor a CBS-egyenlőtlenség miatt $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$, ezért $\|f_y\| = \|y\|$. Belátható, hogy nincs más funkcionál ebben a térben.

Riesz reprezentációs tétel

Tétel (Riesz reprezentációs tétel) *Minden $f \in H^*$ funkcionálhoz létezik olyan $y \in H$, melyre $f(x) = \langle x, y \rangle$ és $\|f\| = \|y\|$.*

Hilbert-tér duális tere

A Riesz reprezentációs tétel következménye, hogy a H és H^* izomorfak, azaz $H = H^* = H^{**}$.

Lineáris operátor adjungáltja Hilbert-térben

Definíció Az $A \in \mathcal{B}(H)$ lineáris operátor adjungáltja az az $A^* \in \mathcal{B}(H)$ lineáris operátor, melyre

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \qquad \forall x, y \in H$$

Az adjungált operátor jól definiált, ha tekintjük az $f(x) = \langle Ax, y \rangle$ funkcionált, akkor a Riesz reprezentációs tétel szerint van egy $y^* \in H$ elem, melyre $f(x) = \langle x, y^* \rangle$. Tehát létezik $y \mapsto y^*$ hozzárendelés, mely az A^* operátor, hiszen $f(x) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$.

Tétel Az adjungált operátor tulajdonságai

1. $I^* = I$
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$
3. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$
4. $(AB)^* = B^* A^*$
5. $\|A^*\| = \|A\|$

Példa véges és végtelen dimenzióban

1. Példa

Legyen $H = \mathbb{R}^n$ az Euklideszi normával. Itt egy lineáris operátor megadása egy $n \times n$-dimenziós A mátrixot jelent. Ekkor $A^* = A^T$, hiszen $\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = \langle x, A^T y \rangle$.

2. Példa

Legyen $H = \mathcal{L}^2([0,1])$. Tekintsük azt az alteret, ahol a végtelen sokszor differenciálható $u(t)$ függvények vannak, melyekre $u(0) = u(1) = 0$. Ebben az altérben értelmezzük a differenciál-operátort: $Au = u'$. Ennek adjungáltja (a skalárszorzatoknak megfelelő integrálások elvégzése után) $A^* v = -v'$.

Önadjungált operátorok

Definíció Az A operátor *önadjungált,* ha $A = A^*$.

Tétel *Ha A önadjungált operátor, akkor*

1. $\|A^n\| = \|A\|^n$
2. Spektrálsugara: $r(A) = \|A\|$
3. Spektruma valós: $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

Ortogonális vetítés

Legyen $E \subset H$ egy zárt altér. Ekkor $\forall x \in H$ elem előáll összegként $x = x_E + x_0$ alakban, ahol $x_E \in E$ és $x_0 \perp E$. Ez utóbbi tulajdonság azt jelenti, hogy $\langle x_0, y\rangle = 0\ \forall y \in E$.

Az ortogonális vetítés operátora $P : H \to H,\ Px = x_E$. Ennek adjungáltját a következőképpen számoljuk:

$$\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py + y_0\rangle = \langle Px, Py\rangle + \langle Px, y_0\rangle = \langle Px, Py\rangle + \langle x_0, Py\rangle = \langle x, Py\rangle$$

Ahol felhasználtuk azt, hogy $\langle Px, y_0\rangle = 0 = \langle x_0, Py\rangle$.

Azt kapjuk tehát, hogy

$$P = P^*$$

vagyis a vetítés operátora önadjungált.

14. tétel: **Disztribúciók** mint speciális lineáris operátorok. Kapcsolat a közönséges függvényekkel. Példák. Reguláris disztribúció. **Dirac delta.** Disztribúció deriváltja. Lokálisan integrálható függvény gyenge deriváltja.

Disztribúciók mint speciális lineáris operátorok

Definíció Legyen $C_0^\infty(\mathbb{R})$ az a függvénytér, mely a vételen sokszor differenciálható, kompakt tartójú függvényeket tartalmazza, ahol egy $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény tartója* alatt a következőt értjük:

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Definíció A (φ_n) sorozat *konvergens* és határértéke φ, ha $\exists I \subset \mathbb{R}$ véges intervallum, melyre $\operatorname{supp} \varphi_n \in I \ \forall n$ valamint $\forall k \ \varphi_n^{(k)} \to \varphi^{(k)}$ egyenletesen.

Definíció A $D_0 \subset D$ halmaz *korlátos,* ha $\exists I \subset \mathbb{R}$ véges intervallum, melyre $\operatorname{supp} \varphi \subset I$ $\forall \varphi \in D_0$ esetén, valamint $\forall k \ \exists M_k$ melyre $\left|\varphi^{(k)}(x)\right| \leq M_k$ ha $\varphi \in D_0$ és $x \in I$.

Definíció A $T: D \to \mathbb{R}$ funkcionál *általánosított függvény* (vagy más néven *disztribúció*), ha lineáris (azaz $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, ha $\varphi, \psi \in D$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), valamint folytonos a fenti konvergenciára nézve (azaz $\forall \varphi_n \to \varphi$ konvergens függvénysorozat esetén $T\varphi_n \to T\varphi$).

Az általánosított függvény tehát egy speciális lineáris funkcionál.

Kapcsolat a közönséges függvényekkel

Egy példán keresztül mutatjuk meg. Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges folytonos függvény. A T_f hozzárendelést így adjuk meg:

$$\varphi \longmapsto T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f\varphi \, \mathrm{d}x$$

Dirac delta

Legyen $T(\varphi) = \varphi(0)$. Ez egy nevezetes disztribúció. Az ehhez kapcsolódó jelölések

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) \text{ és } \delta_a(\varphi) = \varphi(a)$$

Jelölje $\mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$-en értelmezett lokálisan integrálható függvények halmazát. Minden $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ „közönséges” függvény egyben általánosított függvény is. Ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges lokálisan integrálható függvény, akkor a megfelelő disztribúció

$$T_f: D \to \mathbb{R}, \qquad Tf(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f\varphi \, \mathrm{d}x$$

Ebben az esetben a „közönséges” és az általánosított függvényt azonosnak vesszük.

Reguláris disztribúció

Definíció Ha a $T \in D$ disztribúcióhoz van $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ függvény, melyre $T = T_f$, akkor T reguláris disztribúció.

Disztribúció deriváltja

Azt várjuk el a deriválástól, hogy ha f differenciálható „közönséges” függvény, akkor

$$\left(T_f\right)' = T_{f'}$$

Definíció A $T \in D$ általánosított függvény deriváltja $\partial T \in D$, melyet így értlemezünk:

$$\partial T(\varphi) = -T(\varphi')$$

A definícióból következik, hogy minden $T \in D$ akárhányszor deriválható és k-adik deriváltja

$$\partial^k T(\varphi) = (-1)^k T\left(\varphi^{(k)}\right)$$

Lokálisan integrálható függvény gyenge deriváltja

Definíció Az $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$ függvény *gyenge deriváltja* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}$, ha

$$\forall \varphi \in D\colon -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g\varphi \,\mathrm{d}x$$

Állítás *A gyenge derivált alaptulajdonságai*

1. *Ha létezik az f függvény gyenge deriváltja, akkor az majdnem mindenütt egyértelmű.*
2. *Ha f differenciálható, akkor gyenge deriváltja $g = f'$.*
3. *Ha $f = f_0$ majdnem mindenütt és f_0 differenciálható, akkor f gyenge deriváltja $g = f_0'$.*
4. *Ha az f függvényhez tartozó T_f disztribúció deriváltja reguláris, éspedig $\partial T_f = T_g$, akkor f gyenge deriváltja g.*

15. tétel: **Egy példa.** Operátorok alkalmazása kvantummechanikában: egyetlen részecske mozgásának és momentumának együttes határozatlanságaira vonatkozó Heisenberg-féle becslés bizonyítása.

Tegyük fel, hogy egyetlen részecske (pl. elektron) mozgását vizsgáljuk. Feltesszük, hogy a részecske egy végtelen hosszú egyenes mentén mozog, helyzetét egy komplex értékű $f(x,t)$ függvény írja le. A t változó az időt jelenti, az x pedig a helyzetet írja le a következő módon: annak valószínűsége, hogy a részecske az $[a,b]$ intervallumban tartózkodik a t időpontban egy integrállal adható meg:

$$\int_a^b |f(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x$$

A fenti $f(x,t) \in \mathbb{C}$ az állapotfüggvény. Elvárjuk, hogy

$$\int_a^b |f(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$$

Jelenleg csak az állapotfüggvény abszolútértékének négyzete ad számunkra információt.

Tekintsünk most egy fix t időpontot, és ez az egyetlen időpont érdekel csak bennünket. Ezért az állapotfüggvény második argumentumát elhagyjuk.

Matematikai modell és egy tétel

Absztrakt matematikai nyelven fogalmazva az állapotfüggvény $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, melyre $\|f\| = 1$.

A részecske helyzete x, ami egy valószínűségi változóként fogható fel. Egy másik fizikai jellemző a momentum, melyet az f függvény Fourier-transzformáltja ad meg:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw} f(x) \, \mathrm{d}x$$

A Parseval-egyenlőség miatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(w)\right|^2 \ \mathrm{dw}$$

és ezért $\hat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ továbbá $\|\hat{f}\| = 1$. Annak valószínűsége, hogy a momentum az $[a,b]$ intervallumba esik a következő:

$$\int_a^b \left|\hat{f}(w)\right|^2 \mathrm{d}w$$

Jelölje $\overline{x}$ és $\overline{w}$ a hely és a momentum átlagát a megadott valószínűségek szerint:

$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot |f(x)|^2 \ \mathrm{d}x, \qquad \overline{w} = \int_{-\infty}^{\infty} w \cdot \left|\hat{f}(w)\right|^2 \mathrm{d}w$$

A szórásnégyzetek:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 \cdot |f(x)|^2 \ \mathrm{d}x, \qquad \sigma_w^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (w - \overline{w})^2 \cdot \left|\hat{f}(w)\right|^2 \mathrm{d}w$$

A Heisenberg-féle határozatlansági elv azt mondja ki, hogy σ_x és σ_w nem lehetnek „egyszerre kicsik”, azaz $\sigma_x^2 \sigma_w^2 \geq 1/4$.

Bizonyítás a Hilbert-térben

Tegyük fel, hogy $\overline{x} = 0$ és $\overline{w} = 0$. Ezt eltolással megtehetjük és eközben nem veszítünk az általánosságból. A $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ Hilbert-térben két operátort fogunk definiálni:

$$Mf(x) = x\,f(x)$$

$$Df(x) = f'(x)$$

Mindkét operátor a fenti Hilbert-tér egy-egy alterében, de bizonyításunk szempontjából „jó helyen" vannak.

Lemma $\|Mf\|^2 = \sigma_x^2$ és $\|Df\|^2 = \sigma_w^2$

Bizonyítás

$$\|Mf\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x \cdot f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot |f(x)|^2\,dx = \sigma_x^2$$

A második rész több lépésből áll. A Parseval-egyenlőség miatt $\|Df\|^2 = \left\|\widehat{Df}\right\|^2$. A norma definíciója szerint

$$\left\|\widehat{Df}\right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{Df}(w)\right|^2 \mathrm{d}w$$

A Fourier-transzformáció egyik alaptulajdonsága a deriváltfüggvény Fourier-transzformáltjáról szól: $\widehat{Df}(w) = iw\hat{f}(w)$, ezért

$$\|Df\|^2 = \cdots = \int_{-\infty}^{\infty} w^2 \left|\hat{f}(w)\right|^2 \mathrm{d}w = \sigma_w^2$$

■

Ezután egy sajátos, meglepő tulajdonságát látjuk be az operátorainknak:

Lemma Az előbb definiált operátorok kielégítik az alábbi operátor-egyenletet:

$$DM - MD = I$$

Bizonyítás Egyszerűen a szorzat-deriválási szabályt alkalmazzuk:

$$\left(x\,f(x)\right)' = f(x) + xf'(x)$$

ami operátor-alakban $D \circ M(f) = I(f) + M \circ D(f)$. ■

Lemma Az M operátor önadjungált, azaz $\langle Mf, g\rangle = \langle f, Mg\rangle$. A D operátor adjungáltja $-D$, azaz $\langle Df, g\rangle = -\langle f, Dg\rangle$.

Bizonyítás

$$\langle Mf, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,x\,g(x)\,\mathrm{d}x = \langle f, Mg\rangle$$

A második részben parciálisan integrálva:

$$\langle Df, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'g = fg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} fg' = -\langle f, Dg\rangle$$

Közben felhasználtuk, hogy $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ esetén $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$. ■

A fenti lemmák segítségével végre igazolhatjuk a Heisenberg-féle bizonytalansági tételt:

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \langle f, (DM - MD)f\rangle = \langle f, DMf\rangle - \langle f, MDf\rangle = -\langle Df, Mf\rangle - \langle Mf, Df\rangle =$$
$$= -2\langle Df, Mf\rangle$$

Mivel $\|f\|^2 = 1$, ezért a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwaz-egyenlőtlenség alapján

$$1 = -2\langle Df, Mf\rangle, \qquad |\langle Df, Mf\rangle| \leq \|Mf\| \cdot \|Df\|$$

ahonnan átrendezéssel épp a Heisenberg-féle határozatlansági elvet kapjuk.

Jegyzetek

Évközi eredmény

		maximális pontszám	elért pontszám
Házi feladat zárthelyi dolgozatok	1. házi feladat zárthelyi dolgozat	5	
	2. házi feladat zárthelyi dolgozat	5	
	Összesen	**10**	
	I. Elért pontszám		
	Pluszpont		
Nagy zárthelyi dolgozatok	1. nagy zárthelyi dolgozat	45	
	2. nagy zárthelyi dolgozat	45	
	Összesen	**90**	
	II. Elért pontszám		
	I. + II. + pluszpont **Az évközi dolgozatok pontszáma**	**100**	

Megajánlott jegy

Érdemjegy	ponthatárok
–	0 – 39
aláírás	40 – 59
2 (elégséges)	60 – 79
3 (közepes)	80 – 99
4 (jó)	100 –

Megajánlott jegy

Osztályzás

		1	**2**	**3**	**tételek száma**
megajánlott jegy	**nincs**	3	4	5	
	2	4	5		
	3	5			
	4	5			

Egyetlen tétellel 2 jegy javítható, ha a tételt a vizsgázó kiválóan tudja, és el tudja mondani az órán bemutatott bizonyításokat is. Minden további tétellel további egy jegy javítható, ha a tételt a vizsgázó kiválóan tudja. Ha valaki egyik kihúzott tételét nem tudja, vizsgája elégtelen.