# Funkcionálanalízis kisokos

Horváth Gergely

2016-2017/2

## 1 Absztrakt terek

### 1.1 Metrikus tér

$$(X, d) \qquad\qquad d : X \times X \to \mathbb{R}$$

A $d$ leképezés metrika ha teljesül:

| | | |
|---|---|---|
| $I.$ | $d(x, y) \geq 0$ | Nem negatív |
| $II.$ | $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ | Nem degenerált |
| $III.$ | $d(x, y) = d(y, x)$ | Szimmetrikus |
| $IV.$ | $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ | Háromszög egyenlőtlenség |

Ha $X \neq \emptyset$ és a $d : X \times X \to \mathbb{R}$ leképezés metrika, akkor az $\langle X, d\rangle$ párt metrikus térnek nevezzük.

### 1.2 Vektortér / Lineáris tér

*Metrikus térnél nem volt kikötés a halmazra. Bármilyen nem $\emptyset$ lehetett.*

$$V \qquad\qquad ||.|| : V \to \mathbb{R}$$

V vektortér/lineáris tér $\mathbb{K}$ test felett ha:

$$x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$$
$$x \in V, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x \in V$$

Általában $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

### 1.3 Normált tér

$$(X, ||.||) \qquad\qquad ||.|| : X \times X \to \mathbb{R}$$

A norma olyan vektortéren vagy függvénytéren értelmezett leképezés, ami a nullvektor kivételével a tér minden vektorához egy pozitív számot rendel.
A $||.||$ leképezés norma ha teljesül:

| | | |
|---|---|---|
| $I.$ | $\|\|x\|\| \geq 0$ | Nem negatív |
| $II.$ | $\|\|x\|\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ | Nem degenerált |
| $III.$ | $\|\|\lambda x\|\| = \|\lambda\| \cdot \|\|x\|\|$ | Multiplikatív |
| $IV.$ | $\|\|x + y\|\| \leq \|\|x\|\| + \|\|y\|\|$ | Háromszög egyenlőtlenség |

Ha $X \neq \emptyset$ és a $d : X \times X \to \mathbb{R}$ leképezés norma, akkor az $(X, ||.||)$ párt normált térnek nevezzük.

### 1.3.1 Közismert normák

Függvények amik normát definiálnak $\mathbb{R}^n$-en:

$$\begin{aligned}
&\text{A.)}\quad ||x||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\
&\text{B.)}\quad ||x||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \\
&\text{C.)}\quad ||x||_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} \\
&\text{D.)}\quad ||x||_\infty := \max_{i=1\dots n} \{|x_i|\}
\end{aligned}$$

Elnevezések:

- A: 1-norma, Manhattan norma, Taxinorma, Rácsnorma
- B: 2-norma, Euklideszi norma
- C: p-norma
- D: $\infty$-norma, Maximum norma

### 1.3.2 Egységgömb

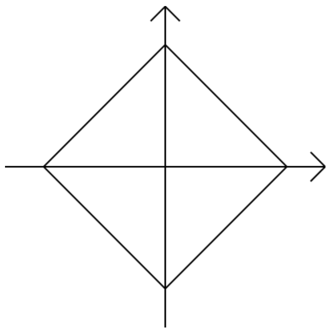
Azon pontok halmaza ahova egységnél kisebb normával eljuthatunk.

$$B_1(k) = \{\overline{x} \in \mathbb{R}, ||\overline{x} - k|| < 1\}$$

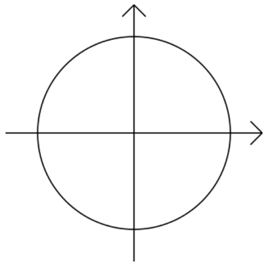
*Az alsó indexben a gömb sugara, a zárójelben a középpontja szerepel.*

### 1.3.3 Közismert egységgömbök

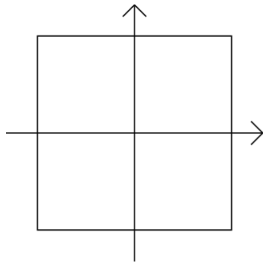
$||x||_1$



$||x||_2$



$||x||_\infty$



### 1.4 Skalárszorzat tér

$$(X, \langle . \rangle) \qquad\qquad \langle . \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$

A $\langle . \rangle$ leképezés skalárszorzat ha teljesül:

| | | |
|---|---|---|
| $I.$ | $\langle x, x \rangle \geq 0$ | Nem negatív |
| $II.$ | $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ | Nem degenerált |
| $III.$ | $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ | Szimmetrikus |
| $IV.$ | $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$ | Multiplikatív |
| $V.$ | $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ | Disztributív |

Ha $X \neq \emptyset$ és a $\langle . \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ leképezés skalárszorzat, akkor az $(X, \langle . \rangle)$ párt skalárszorzat térnek nevezzük.
Komplex számtérbe való leképezés is lehet skalárszorzat. Ebben az esetben a III. feltétel módosul.

$$(X, \langle . \rangle) \qquad\qquad \langle . \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$$

$$III. \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \text{Konjugáltan szimmetrikus}$$

Ekkor $(X, \langle . \rangle)$ komplex skalárszorzat tér.

## 2 Végtelen dimenziós vektorterek, függvényterek

### 2.1 $\ell^p$

Az $\ell^p$-terek azokból a sorozatokból állnak, amelyekben a tagok abszolút értékes p-edik hatványának összege konvergens.

$$\ell^p = \left\{ (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right) < \infty \right\}, \qquad p \in [1, \infty)$$

### 2.2 $\ell^\infty$

$$\ell^\infty = \left\{ (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\}$$

### 2.3 $C[0, 1]$

Azoknak a függvényeknek a halmaza, amelyek a [0,1] intervallumból a valós számokba adnak leképezést és folytonosak.

$$C[0, 1] = \{ f : [0, 1] \to \mathbb{R}, folytonos \}$$

## 3 Tételek

### 3.1 CBS tétel

$$\sum_i |x_i| \cdot |y_i| \leq \sqrt{\sum_i x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_i y_i^2}$$
$$< x; y > \leq ||x|| \cdot ||y||$$

## 3.2 De Morgan

$$S \setminus \bigcap_{i \in I} T_i = \bigcup_{i \in I} (S \setminus T_i)$$

Ahol $S$ és $T$ halmazok. $T_i$ a $T$ halmaz részhalmazai ahol $i \in I$ és $I$ az indexhalmaz.