

10.15: 239

14.15: 320

14k; 72; 100; 130

Funckionálanalízis 1. heti feladatok

2012. február 15.

1. Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}^2$ -ben

(a) $\|\cdot\|_1$,

(b) $\|\cdot\|_2$,

HF (c) $\|\cdot\|_\infty$

valóban normák.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ normák az X téren, akkor tetszőleges $\lambda, \lambda' > 0$ számokra $\lambda \|\cdot\| + \lambda' \|\cdot\|'$ is az.

3. Egy tér egységgömbje a $B_1(0) = \{x : \|x\| < 1\}$ halmaz. Rajzoljuk fel $\mathbb{R}^2$ egységgömbjét a

(a) $\|\cdot\|_1$,

(b) $\|\cdot\|_2$,

(c) $\|\cdot\|_\infty$,

HF (d) $\frac{1}{3} \|\cdot\|_1 + \frac{2}{3} \|\cdot\|_\infty$

normákban.

4. Ellenőrizzük, hogy minden normált térből kaphatunk metrikus teret, a $d(x, y) := \|x - y\|$ távolság bevezetésével. Keressen olyan metrikus teret, ahol a metrika nem normából származik.

5. Ellenőrizzük, hogy minden skalárszorzat-térből kaphatunk normált teret, a $\|x\| := (x, x)^{\frac{1}{2}}$ norma bevezetésével.

(a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy norma skalárszorzatból származik, akkor teljesíti a paralelogramma-szabályt: $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$.

(b) (nehéz!) Igazolja, hogy ha egy norma teljesíti a paralelogramma-szabályt, akkor skalárszorzatból származik.

6. Lásza be hogy $l^1 \subset l^2$. Mutassa meg, hogy l^1 valódi részhalmaz.

Def.: Normált tér ~~normált~~ $(V, \|\cdot\|)$

V egy $(\mathbb{R}$ feletti) vektortér

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ fv}$$

$$(i) \quad \|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V \quad (\text{nemnegatív})$$

$$(ii) \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad (\text{nemdegeneratív})$$

$$(iii) \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{multiplikatívitas})$$

$$(iv) \quad \|v+w\| \leq \|v\| + \|\cancel{u} w\| \quad (\triangle \text{ egyenlőtlenség})$$

Def.: vektortér $(\mathbb{R}$ feletti)

$V = (W, +, \cdot)$ $\hookrightarrow$ IF más feletti: $+$, $\cdot$ műveletek invertálhatóak, kivétel $\frac{1}{0}$

$$+ : W \times W \rightarrow W \text{ művelet} \text{ fv.}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times W \rightarrow W \text{ fv.}$$

$$(i) \quad u + (v + w) = (u + v) + w \quad (\text{asszociatív}, \text{csapcsolhatóság})$$

$$(ii) \quad u + v = v + u \quad (\text{kommutatív})$$

$$(iii) \quad \exists 0 \in W : 0 + v = v \quad \exists \text{ nullaelem}$$

$$(iv) \quad \forall v \in W \exists -v \in W : v + (-v) = 0 \quad \exists \text{ additív inverz}$$

$$(v) \quad a(u+v) = au + av \quad (a \in \mathbb{R}) \text{ distributív}$$

$$(vi) \quad (a+b)u = au + bu \quad (a, b \in \mathbb{R}) \text{ distributív}$$

$$(vii) \quad (ab)v = a(bv) \quad (a, b \in \mathbb{R}) \text{ kompatibilitás}$$

$$(viii) \quad 1v = v \quad \text{ahol } 1 \in \mathbb{R} \text{ egységszám}$$

Pl.: $\mathbb{R}^n$ vektortér

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\text{Pl.}: \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\text{Pl.}: \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

1/1

a, $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$
 $x \in \mathbb{R}^n$

norma
Taxi-
~~norma~~

• ~~$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \geq 0$~~
 $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \geq 0$
 $\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $\geq 0 \qquad \qquad \geq 0$

• $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| = 0$
 $\downarrow \quad \swarrow \quad \uparrow$
 $\geq 0 \quad |x_1| = 0 \text{ is } |x_2| = 0 \dots$
 $\uparrow$
 $x = 0$

• $\|\lambda x\|_1 = |\lambda x_1| + \dots + |\lambda x_n| = |\lambda| \cdot |x_1| + \dots + |\lambda| \cdot |x_n| =$
 $= |\lambda| (|x_1| + \dots + |x_n|) = |\lambda| \cdot \|x\|_1$

• $\|x + y\|_1 = |x_1 + y_1| + \dots + |x_n + y_n| \leq \underbrace{|x_1| + |y_1| + \dots + |x_n|}_{\|x\|_1} + \underbrace{|y_1| + \dots + |y_n|}_{\|y\|_1}$
 $= \|x\|_1 + \|y\|_1$

6,

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

$x \in \mathbb{R}^n$

Euklideszi norma

$$\bullet \|x\|_2 = \sqrt{\underbrace{|x_1|^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{|x_n|^2}_{\geq 0}} \geq 0$$

$$\bullet \|x\|_2 = 0$$

$$\uparrow$$

$$|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 0$$

$$\searrow \geq 0 \quad \checkmark \quad x_i = 0 \quad \forall i$$

$$x = \underline{0}$$

$$\bullet \|\lambda x\|_2 = \sqrt{|\lambda x_1|^2 + \dots + |\lambda x_n|^2} = \sqrt{|\lambda|^2 |x_1|^2 + \dots + |\lambda|^2 |x_n|^2}$$

$$= |\lambda| \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = |\lambda| \|x\|_2$$

$$\bullet \|x+y\|_2^2 = |x_1+y_1|^2 + \dots + |x_n+y_n|^2 =$$

~~$$|x_1|^2 + |y_1|^2 + 2x_1y_1 + \dots + |x_n|^2 + |y_n|^2 + 2x_ny_n$$~~

$$= |x_1|^2 + |y_1|^2 + 2x_1y_1 + \dots + |x_n|^2 + |y_n|^2 + 2x_ny_n$$

$$\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2(x_1y_1 + \dots + x_ny_n) \leq$$

$$\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \stackrel{\text{CaSB}}{\leq}$$

$$\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2 \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 =$$

Cauchy-Schwarz-
Bunjakowski'skij

$$= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

2. feladat (1/2)

$\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|'$ normák egy X vektortér felett.

$\lambda, \lambda' > 0$ tetszőleges valós konstansok

Bizonyítsd: $\lambda \|\cdot\| + \lambda' \|\cdot\|'$ is norma X felett.

Biz:

$$(i) \lambda \|\cdot\| + \lambda' \|\cdot\|' \geq 0 \quad \lambda \cdot 0 + \lambda' \cdot 0 = 0$$

$$(ii) \lambda \|\cdot\| + \lambda' \|\cdot\|' = 0$$

$$\Rightarrow \text{mert } \lambda \|\cdot\| \geq 0 \quad \text{és} \quad \lambda' \|\cdot\|' \geq 0$$

$$\lambda \|\cdot\| = 0$$

$$\text{és} \quad \lambda' \|\cdot\|' = 0$$

$$\Rightarrow \lambda, \lambda' \neq 0$$

$$\|\cdot\| = 0$$

$$\text{és} \quad \|\cdot\|' = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\lambda \|\cdot\| = 0$$

$$\cdot = 0$$

$$(iii) \lambda \|\cdot\| + \lambda' \|\cdot\|' =$$

$$= \lambda \|\cdot\| + \lambda' \|\cdot\|' = \lambda (\lambda \|\cdot\| + \lambda' \|\cdot\|') = \lambda \|\cdot\|'$$

$$(iv) \lambda \|\cdot\| + \lambda' \|\cdot\|' \leq$$

$$\leq \lambda (\|\cdot\| + \|\cdot\|) + \lambda' (\|\cdot\|' + \|\cdot\|') =$$

$$= (\lambda \|\cdot\| + \lambda' \|\cdot\|') + (\lambda \|\cdot\| + \lambda' \|\cdot\|') =$$

$$= \|\cdot\| + \|\cdot\|$$

2. feladat (1/3)

$$B_r(y) = \{x \in X : \|y - x\| < r\} \quad y \text{ körüli } r \text{ sugarú gömb}$$

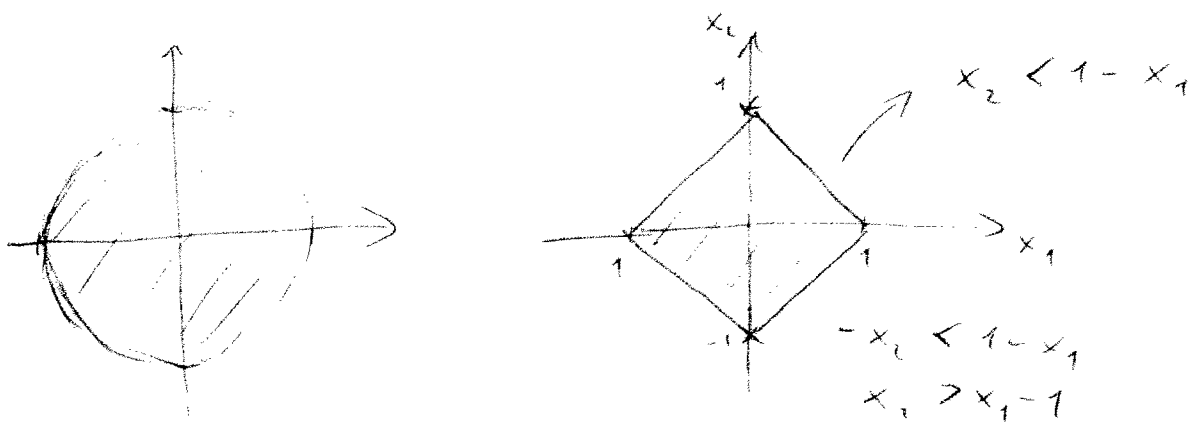
$$y=0, \quad r=1, \quad X = \mathbb{R}^2$$

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$$

a, $\|\cdot\|_1$

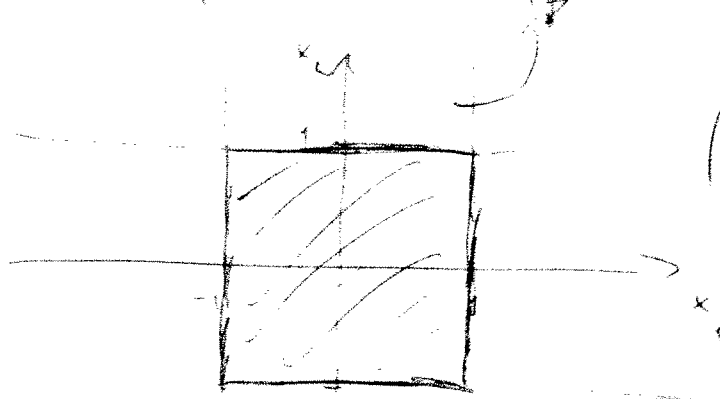
$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 < 1\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| < 1 - |x_1|\}$$



b, $\|\cdot\|_2$: $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$

c, $\|\cdot\|_\infty$: $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1 \text{ and } |x_2| < 1\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| < 1\} =$
 $= \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_2 < 1\}$



Megf: Isten látni, hogy a norma ~~általában~~ a távolság általánosítása

~~Def: Metrikus tér~~

Def: Metrikus tér: (M, d)

M halmaz

$$d: M \times M \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{fv.}$$

$\triangleq$ távolság, metrika

$$(i) \quad d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in M$$

(nemnegatív)

$$(ii) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(nondegeneratív)

$$(iii) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$$

(szimmetria)

$$(iv) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in M \quad (\triangleq \text{egyenlőtlenség})$$

Pl: $M = \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$$

Euklidészi metrika, távolság

Pl: $M = \mathbb{C}$

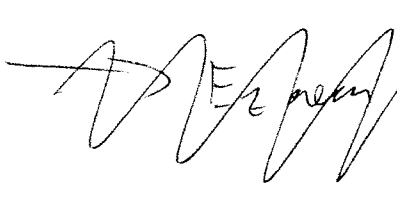
$$d(x, y) = |x - y|$$

~~Def~~

Pl: M tetszőleges halmaz

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \neq y \\ 0 & \text{ha } x = y \end{cases}$$

diszkrét metrika

 Ez nem a metrika általános formája

Pl : $f(x) = x$
 $g(x) = \sqrt{x}$

távolságra $[0, 1]$ -ben a supnorma szerint.

$$d(f, g) = \sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in [0, 1] \} =$$

$$= \sup \{ |x - \sqrt{x}| : x \in [0, 1] \} \rightarrow \text{egész intervallumon}$$

$$= \max \{ \quad \} \quad \text{helyi p.}$$

$$(x - \sqrt{x})' = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 2$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$(x - \sqrt{x})'' \Big|_{x=\frac{1}{4}} = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' \Big|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \Big|_{x=\frac{1}{4}} > 0$$

minimum

Ez helyettesítve, itt a fv. értéke $\left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$

$$d(f, g) = \frac{1}{4}$$

Metrikus tér

$$\uparrow d(x, y) = \|x - y\|$$

Normált tér

$$\uparrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Skalar szorzattal ellátott tér

4. $(X, \|\cdot\|)$ normált tér

Al: $d(x, y) = \|x - y\|$ ~~metrika~~ metrika

$$\bullet d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$$

$$\bullet d(x, y) = \|x - y\| \stackrel{!!!}{=} 0$$



$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

$$\bullet d(x, y) = \|x - y\| = \|\cancel{1}(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$$

$$\bullet d(x, y) = \|x - y\| = \underbrace{\|x - z\|}_{(\quad)} + \underbrace{\|z - y\|}_{(\quad)} \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$$

6. A diszkrét metrika nem származik normából.

$$x \neq y \text{ pontok} \quad 1 = d(x, y) = \|x - y\|$$

$$\frac{1}{2}x \neq \frac{1}{2}y$$

$$1 = d\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right) = \left\|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right\| = \frac{1}{2}\|x - y\| = \frac{1}{2}$$



~~Skalar szorzás~~

Def: Skalar szorzat

$$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

V (valós, $\mathbb{R}$ feletti) vektortér

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{fv.}$$

$$(i) \langle v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V \quad (\text{nonnegatív})$$

$$(ii) \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad (\text{nondegeneratív})$$

$$(iii) \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V \quad (\text{multiplikatív})$$

$$(iv) \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in V \quad (\text{szimmetrikus})$$

$$(v) \langle v, w+u \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle \quad \forall u, v, w \in V \quad (\text{disztributív})$$

Pl: $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

$$V = \mathbb{R}^n$$

Tétel: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ normált test (de nem minden normált
test kapható meg így)

Pl: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
 $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1 x_1 + \dots + x_n x_n}$

Pl: $\mathbb{R}^2, \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

biz.:

$$\bullet \|v\| = \sqrt{\underbrace{\langle v, v \rangle}_{\geq 0}} \geq 0$$

$$\bullet \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$\bullet \|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$$

$$\bullet \|x+y\|$$

✓ vektorienische
~~Werte~~

Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle$$



Norm

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$



Metrik

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

3. feladat (1/5)

norma

Egy normatartós számítás skalár térében, ha igaz rá a parallelogramma szabály:

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

biz: $\Rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle +$$

(v)

(-v)

$$+ \langle x, x \rangle + \langle x, -y \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle y, y \rangle =$$

"(v)"

"

$$- \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle$$

$$= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

$$\Leftarrow \text{de} \langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

↓

Ha van
rá idő

Be kell látni, hogy ez $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárszorzat:

$$(i) \quad \langle v, v \rangle = \frac{\|v+v\|^2 - \|v-v\|^2}{4} = \frac{\|2v\|^2 - \|0\|^2}{4} = \frac{4\|v\|^2 - 0}{4} =$$

$$= \|v\|^2 \geq 0$$

$$(ii) \quad \langle v, v \rangle = 0$$

$$\|v\|^2 = 0$$

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$(iv) \quad \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\|$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = \frac{\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2}{4} = \langle y, x \rangle$$

(v) :

lemma:

$$\|x+y+z\|^2 = \|x+y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x+z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2$$

inner:

$$\langle x, y+z \rangle = \text{def + lemma} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

$$(iii) : \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \langle 0, y \rangle = \frac{\|0+y\|^2 - \|0-y\|^2}{4} = \frac{\|y\|^2 - \|y\|^2}{4} = 0$$

For $\lambda = 0$:

$$\text{For } \lambda \in \mathbb{N}: \langle \lambda v, w \rangle = \langle (\lambda-1)v, w \rangle + \langle v, w \rangle = \dots = \lambda \langle v, w \rangle$$

$$\text{For } \lambda \in \mathbb{Z}^-: \langle \lambda v, w \rangle + \langle -\lambda v, w \rangle = \langle 0, w \rangle = 0$$

For $\lambda = \frac{p}{n} \in \mathbb{Q}$:

$$\langle \lambda v, w \rangle = -\langle -\lambda v, w \rangle = -(-\lambda) \langle v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

$$\langle \frac{p}{n} x, y \rangle = \frac{1}{n} \cdot p \langle \frac{1}{n} x, y \rangle = \frac{1}{n} \langle \frac{p}{n} x, y \rangle = \dots$$

$$= \frac{1}{n} \langle p x, y \rangle = \frac{p}{n} \langle x, y \rangle$$

Lemma: If $x, y \in V$, then $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

$$0 \leq \|x - \tau_n y\|^2 = \langle x - \tau_n y, x - \tau_n y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\tau_n \langle x, y \rangle + \tau_n^2 \langle y, y \rangle$$

$\nearrow \text{for } \tau_n \in \mathbb{C}$

$$= \|x\|^2 - 2\tau_n \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \tau_n^2 \frac{\langle y, y \rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2}$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

□

If $\lambda \in \mathbb{R}$ is $q_n \rightarrow \lambda$ quadratic form:

$$0 \leq |\langle q_n x, y \rangle - \langle \lambda x, y \rangle| =$$

$$= |\langle (q_n - \lambda)x, y \rangle| \leq \|q_n - \lambda\| \|x\| \|y\| \xrightarrow{q_n \rightarrow \lambda} 0$$

Thus: $\langle q_n x, y \rangle \rightarrow \langle \lambda x, y \rangle$

$$q_n \langle x, y \rangle \rightarrow \lambda \langle x, y \rangle$$

$\downarrow$
since $q_n \rightarrow \lambda$

Then $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$

Ex: $\mathbb{R}^2$, $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|)$

$$x = (a, 0) \quad a > 0$$

$$y = (0, a)$$

$$\|x\|^2 = a^2$$

$$\|y\|^2 = a^2$$

$$\langle x, y \rangle^2 = \langle (a, 0), (0, a) \rangle^2 = 0$$

$$\|x - y\|^2 = \|(a, -a)\|^2 = a^2$$

$$4a^2 = 2a^2 \quad \text{?}$$

Ex: $\mathbb{R}^2$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$$x = (a, 0)$$

$$y = (0, a)$$

□

(6.) $\ell_1 = \{ \cancel{x_1}, \cancel{x_2}, \dots \} : x_i \in \mathbb{R} \ \forall i \text{ s.t. } \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \}$

$\ell_2 = \{ \}$

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} < \infty$

All.; $\ell^1 \subseteq \ell^2$

~~MM~~ $x \in \ell^1$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \sum_{i: |x_i| > 1} |x_i|^2 + \sum_{i: |x_i| \leq 1} |x_i|^2 \leq$$

↓
Ebból csak

még sok van, mert

$$|x_i| \rightarrow 0, \text{ mert } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$$

$$\leq \sum_{i: |x_i| > 1} |x_i|^2 + \sum_{i: |x_i| \leq 1} |x_i| \leq \sum_{i: |x_i| > 1} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$$

$\underbrace{\sum_{i: |x_i| > 1} |x_i|^2}_{< \infty}$
 $\parallel$
 $\|x\|_1 < \infty$

Funkcionálanalízis házi feladat megoldások

1. feladatsor

1.3.d

Feladat: Egy tér egységgömbje $B_1 = \{x : \|x\| < 1\}$. Rajzoljuk fel $\mathbb{R}^2$ egység-gömbjét az $\frac{1}{3}\|\cdot\|_1 + \frac{2}{3}\|\cdot\|_\infty$ norma szerint.

Megoldás: $\frac{1}{3}\|x\|_1 + \frac{2}{3}\|x\|_\infty = \frac{1}{3}|x_1| + \frac{1}{3}|x_2| + \frac{2}{3}\max(|x_1|, |x_2|)$

Ha $x_1 \geq 0$ és $x_2 \geq 0$ és $x_1 \geq x_2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\|x\|_1 + \frac{2}{3}\|x\|_\infty &= x_1 + \frac{1}{3}x_2 < 1 \\ x_2 &< 3 - 3 \cdot x_1\end{aligned}$$

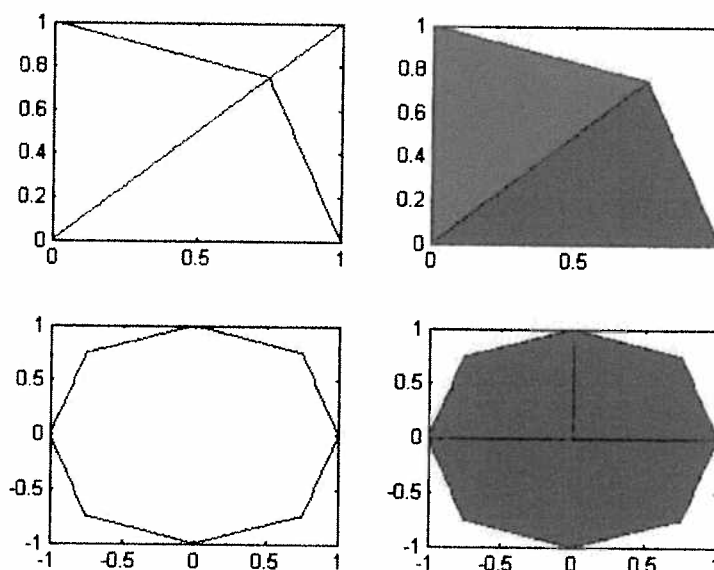
Ha $x_1 \geq 0$ és $x_2 \geq 0$ és $x_1 < x_2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\|x\|_1 + \frac{2}{3}\|x\|_\infty &= \frac{1}{3}x_1 + x_2 < 1 \\ x_2 &< 1 - \frac{1}{3}x_1\end{aligned}$$

Ezen két határoló egyenes közös pontja:

$$\begin{aligned}3 - 3 \cdot x_1 &= 1 - \frac{1}{3}x_1 \\ 2 &= \frac{8}{3}x_1 \\ \frac{3}{4} &= x_1 \\ x_2 &= 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

A többi ~~8~~ eset szimmetriai megfontolások alapján hasonlóan határozható meg. ~~7~~



1.5.a

Feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha egy norma skalárszorzatból származik, akkor teljesíti a paralelogramma-azonosságot: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Megoldás: Legyen $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ egy skalárszorzat.

Ekkor

$$\begin{aligned}
 \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \sqrt{\langle x+y, x+y \rangle}^2 + \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}^2 = \\
 &= |\langle x+y, x+y \rangle| + |\langle x-y, x-y \rangle| = \\
 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle = \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \\
 &\quad + \langle x, x \rangle + \langle x, -y \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle -y, -y \rangle = \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \\
 &\quad + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\
 &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle + \\
 &\quad + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle = \\
 &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = \\
 &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2
 \end{aligned}$$

Az első egyenlőség definíció. A második azonosság. A harmadik a skalárszorzat nemnegativitásából következik. A negyedik a disztributivitásból. Az ötödik a multiplikativitásból. A hatodik a szimmetriából. A hetedik összevonás eredménye. A nyolcadik ismét definíció.

1.5.b

Feladat: Igazolja, hogy ha egy norma teljesíti a paralelogramma-szabályt, akkor skalárszorzatból származik!

Megoldás: A megoldást erről a linkről tölthetitek le.