

DIGITÁLIS JELFELDOLGOZÁS

MÉRNÖKI SÁVSZÉLESSÉG NÉGYSZÖGJELEN

Rudner Tamás IBYG8Z

2015. március 4.

Tartalomjegyzék

1. Feladat	2
2. Háttér	2
2.1. Felhasznált matematika	2
2.1.1. Fourier Transzformáció	2
2.1.2. A $\frac{\sin t}{t}$ függvény maximuma	2
2.1.3. A $\sin(At)$ sorfejtése	2
2.1.4. A $\frac{\sin^2(At)}{t^2}$ függvény integrálja $\mathbf{R}$ -en	3
3. Megoldás menete	3
3.1. Négyyszögjel Fourier-transzformáltjának meghatározása	3
3.2. A transzformált függvény abszolútértéke, energiája	3
3.2.1. Az abszolútérték kiszámítása	3
3.2.2. A jel energiájának kiszámítása	4
3.3. Sávszélesség meghatározása	5
3.3.1. Sávszélesség ϵ paraméter segítségével	5
3.3.2. Sávszélesség η paraméter segítségével	8
4. Összegzés	11
5. Felhasznált programok	12
6. Forrás	12

1. Feladat

Az alábbiakban egy tetszőleges $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ intervallumon értelmezett, egységnyi négyzöggel sávszélességének karakterisztikáját határozom meg, mérnöki módszerekkel. Előbb a jel transzformáltjának abszolútmaximumából, majd a jel energiájából írom fel a sávszélesség paraméterfüggését.

2. Háttér

2.1. Felhasznált matematika

2.1.1. Fourier Transzformáció

Adott egy $x: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ függvény melyre igazak az alábbi feltételek:

- Tetszőleges $I \subset \mathbf{R}$ véges intervallum esetén x leszűkítése az intervallumra véges sok pontot kivéve folytonosan differenciálható.
- Ha t_0 szakadási pont, akkor ez a szakadás elsőfajú, és itt a függvényérték:

$$x(t_0) = \frac{x(t_0 + 0) + x(t_0 - 0)}{2} \quad (1)$$

- A függvény abszolútintegrálható, tehát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (2)$$

Definíció: Ha x teljesíti a fenti három feltételt, akkor a *Fourier transzformáltja* az az $X: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ komplex értékű függvény, melyet így definiálunk:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (3)$$

2.1.2. A $\frac{\sin t}{t}$ függvény maximuma

Állítás: A $\frac{\sin t}{t}$ határértéke a $t = 0$ pontban:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (4)$$

2.1.3. A $\sin(At)$ sorfejtése

Állítás: A $\sin(At)$ függvény Taylor-sora a $t_0 = 0$ pont körül:

$$\sin At = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (A)^{2i+1}}{2i+1} t^{2i+1} \quad (5)$$

Megjegyzés: A $t_0 = 0$ pont körüli sorfejtést szokás McLaurin-sornak is hívni.

2.1.4. A $\frac{\sin^2(At)}{t^2}$ függvény integrálja $\mathbf{R}$ -en

Állítás: Adott egy $A \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám. Ekkor a $\frac{\sin^2(At)}{t^2}$ alakú függvény integrálja az egész számegegyenesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(At)}{t^2} dt = \pi|A| \quad (6)$$

3. Megoldás menete

1. Négyszögjel Fourier-transzformáltjának meghatározása
2. A transzformált függvény abszolútértéke és energiája
3. Sávszélesség meghatározása a transzformált jel
 - (a) Abszolútmaximumából(ϵ)
 - (b) Energiaprofiljából(η)

3.1. Négyszögjel Fourier-transzformáltjának meghatározása

Állítás: Adott egy $x(t)$ jel, mely a következőképpen néz ki:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \in [-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}] \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor ennek a jelnek a Fourier transzformáltja:

$$X(f) = \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \quad (7)$$

Bizonyítás:

Végezzük el a Fourier-transzformációt az $x(t)$ függvényre:

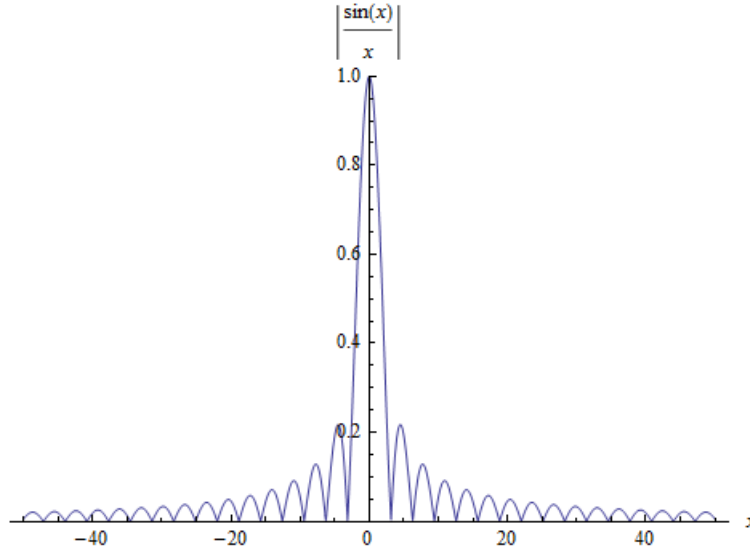
$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j2\pi ft} dt = \left. \frac{-e^{-j2\pi f}}{j2\pi f} \right|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = \\ &= -\frac{e^{-jT_0\pi f}}{j2\pi f} + \frac{e^{jT_0\pi f}}{j2\pi f} = \frac{1}{\pi f} \frac{e^{jT_0\pi f} - e^{-jT_0\pi f}}{2j} = \frac{1}{\pi f} \sin T_0 \pi f = \underline{\underline{\frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f}}} \end{aligned} \quad (8)$$

Ezzel beláttuk a fenti állítást.

3.2. A transzformált függvény abszolútértéke, energiája

3.2.1. Az abszolútérték kiszámítása

Az általános $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$ függvény grafikonjáról látható, hogy a maximuma $x = 0$ -ban található és szimmetrikus az y tengelyre:



1. ábra.

Állítás: Egy tetszőleges $\left|\frac{\sin Ax}{x}\right|$ függvény maximuma is $x=0$ -ban található, és pontosan A értékét veszi fel:

$$\max_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{\sin Ax}{x} \right| = A \quad (9)$$

Bizonyítás: Nézzünk határértéket $x \rightarrow 0$ esetén

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin Ax}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin Ax}{x} \frac{A}{A} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin Ax}{Ax} A \right| = \underline{\underline{A}}. \quad (10)$$

Következmény: Az $x(t)$ függvény frekvenciatartományba transzformáltjának maximuma:

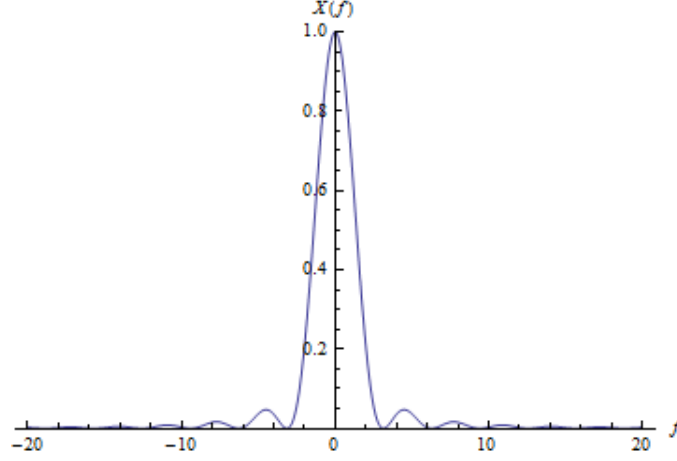
$$\max_{f \in \mathbf{R}} |X(f)| = \max_{f \in \mathbf{R}} \left| \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \right| = \lim_{f \rightarrow 0} \left| \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \right| = T_0. \quad (11)$$

3.2.2. A jel energiájának kiszámítása

Állítás: A jel energiáját a Parseval-tétel segítségével írhatjuk fel:

$$E_{X(f)} = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \right|^2 df = \frac{\pi |\pi T_0|}{\pi^2} = |T_0| = T_0 \quad (12)$$

A $|X(f)|$ függvény grafikonja:



2. ábra.

Megjegyzés: 1. ábrával összevetve látható, hogy sokkal "gyorsabban" konvergál nullához a függvény

3.3. Sávzélesség meghatározása

3.3.1. Sávzélesség ϵ paraméter segítségével

Definíció: Tegyük fel, hogy egy $x(t)$ véges tartójú jel frekvencia-tartománybeli transzformáltja páros. Ekkor $x(t)$ jel sávzélessége meghatározható, ha rögzítünk egy $\epsilon \in (0,1)$ paramétert, és $I \in \mathbf{R}$ szimmetrikus, nyílt intervallumot, akkor $\forall f \notin I$ esetén

$$|X(f)| < \epsilon \cdot \max_{f \in \mathbf{R}} |X(f)| = \epsilon \cdot T_0 \quad (13)$$

Következmény: Ekkor a jel sávzélessége $I = (-B, B)$ intervallum hosszának fele, tehát B .

Sávzélesség kiszámítása:

Első megközelítés: Mivel $|X(f)|$ periodikusan veszi fel a nullát, azaz:

$$|X(f)| = |X(f + P)| = 0 \quad (14)$$

továbbá $P = k/T_0$, amennyiben $k \in \mathbf{Z}$ ugyanis

$$\left| X(f) \right| \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \left| \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \right| \Big|_{f=\frac{k}{T_0}} = \left| \frac{\sin T_0 \pi \frac{k}{T_0}}{\pi \frac{k}{T_0}} \right| = \left| T_0 \cdot \frac{\sin k \pi}{\pi k} \right| = 0 \quad (15)$$

Ezután pedig elegendő lesz az egyes periódusonként esedékes $(\frac{k}{T_0}, \frac{k+1}{T_0})$ intervallumok maximumát vizsgálni elsődlegesen, ami majdnem pontosan az intervallum felére esik (a tényleges maximumhely abszolútértékben kisebb - ha $T_0 > \frac{1}{\pi}$ -, vagy nagyobb - $T_0 < \frac{1}{\pi}$ -, mint az intervallum fele, de ezt most elhanyagoljuk). Ekkor ugyanis, ha a submaximum már kisebb, mint a referencia értéknek választott ϵT_0 , akkor a $(\frac{k-1}{T_0}, \frac{k}{T_0})$ intervallumban való értékek voltak az utolsók, amiket figyelembe kell vennünk a sávzélesség meghatározásánál.

Ekkor a $(\frac{k-1}{T_0}, \frac{k}{T_0})$ intervallumon kell megoldanunk az alábbi egyenletet:

$$\left| \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \right| = \epsilon \cdot T_0 \quad (16)$$

Tegyük fel, hogy $f > 0$, ugyanis $f < 0$ esettel a szimmetria miatt felesleges foglalkoznunk - továbbá ennek fizikai tartalma amúgy sincs. Ekkor az egyenlet a következő alakban írható, elvégezve az egyenletrendezést:

$$|\sin T_0 \pi f| = \epsilon \pi T_0 f \quad (17)$$

Az egyenletet analitikusan nem lehet megoldani, a $\sin T_0 \pi f$ függvényt azonban felírhatjuk McLaurient sorfejtéssel, felhasználva az (5) egyenletet. Majd, ha vesszük ennek a végtelen összegnek egy bizonyos N küszöbindex előtti tagjait, akkor egy N -ed fokú polinómot kapunk az egyenletre, amit már meg tudunk oldani, de csak közelítésekkel, tehát a

$$\left| \sum_{i=0}^N \frac{(-1)^i (T_0 \pi)^{2i+1}}{2i+1} f^i \right| = \epsilon \cdot T_0 \quad (18)$$

egyenlet $(\frac{k-1}{T_0}, \frac{k}{T_0})$ -ba eső megoldása(i) lesz(nek) a számunkra releváns megoldások. Ekkor a B sávszélesség megegyezik a (17) egyenlet, fenti intervallumba eső megoldásával (két megoldás esetén a nagyobb megoldással), hiszen ekkor a $(-B, B)$ intervallumon kívül eső függvényrész már sohasem lesz az eredetileg kijelölt referenciaérték felett.

Második megközelítés: Tulajdonképpen az előző megoldásmenet első részét vesszük. Mivel a fenti probléma még N -től is függne, hogy mennyire pontosan tudjuk megadni (minél nagyobb N , annál pontosabb lesz a számolásunk), ezért egyszerűsítjük a problémát, és csak azt a legnagyobb $k \in \mathbf{N}$ indexet keressük melyre, ha definiáljuk f_{max_k} számot, mint a $(\frac{k}{T_0}, \frac{k+1}{T_0})$ intervallum közepét (ami a fenti indokok miatt csupán submaximum), akkor az alábbi egyenlőtlenség igaz

$$\left| \frac{\sin T_0 \pi f_{max_k}}{\pi f_{max_k}} \right| < \epsilon \cdot T_0 \quad (19)$$

ahol

$$f_{max_k} = \frac{\frac{k}{T_0} + \frac{k+1}{T_0}}{2} = \frac{2k+1}{2T_0} = \frac{2k+1}{2T_0}. \quad (20)$$

(20)-at helyettesítve (19)-be:

$$\left| \frac{\sin T_0 \pi \frac{2k+1}{2T_0}}{\pi \frac{2k+1}{2T_0}} \right| = \left| \frac{\sin \pi \frac{2k+1}{2}}{\pi \frac{2k+1}{2T_0}} \right| < \epsilon \cdot T_0 \quad (21)$$

Ezt átrendezve:

$$\left| \sin (2k+1) \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\epsilon \pi (2k+1)}{2} \quad (22)$$

A legutolsó (22) egyenlet már sokkal barátságosabb, mint a (17)-es, ugyanis egy egyszerű iterációval minden ϵ -ra kiszámolható a k és, ha ezt meghatároztuk, akkor az azt jelenti,

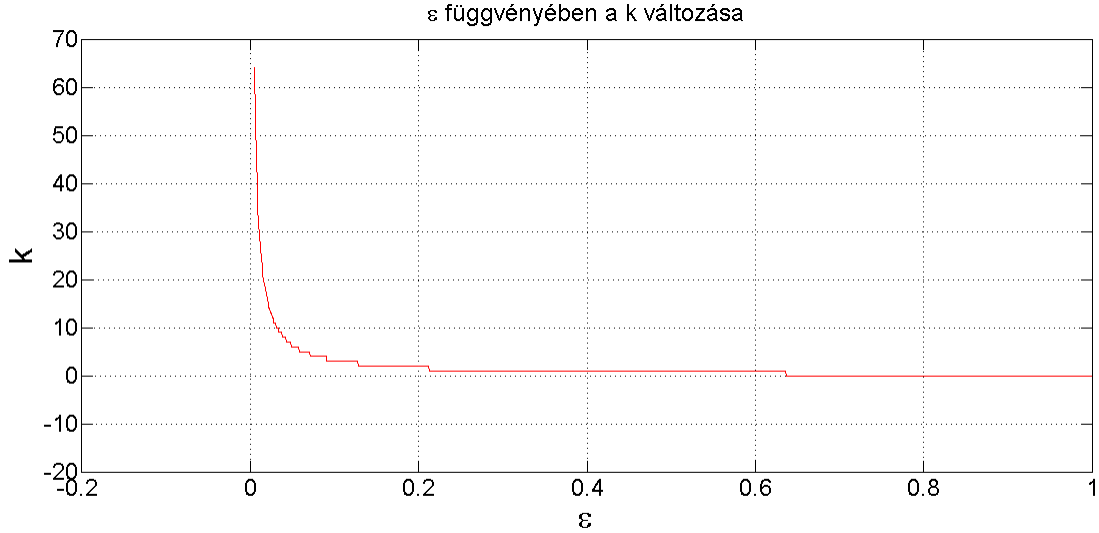
hogy a k . intervallum már nagy valószínűségre nem lesz sávszélesség-meghatározó, és az egyszerűsítés kedvéért a k . intervallum felső határát tekinthetjük a sávszélességnek, tehát

$$B = \frac{k+1}{T_0} \quad (23)$$

Megjegyzés: Azért választottuk a k . intervallum felső határát, mert így az esetleges hibánk maximuma $\left| \frac{2k+1}{2T_0} - \frac{k+1}{T_0} \right|$ (amennyiben eltekintünk attól, hogy a maximum választásunk ténylegesen csak submaximum, így $\epsilon \ll 1$ esetén már tapasztalhatunk ennél nagyobb hibát, de ettől most eltekintünk). A mintavételi frekvencia egyébként is a mintevételi tétel miatt $f_s \geq 2B$, ahol f_s a mintavételi frekvencia, és B a sávszélesség.

Második módszer eredménye:

Az iterációkat elvégezve midőn $\epsilon \rightarrow 0$, megkaphatjuk a k lehetséges értékeit, amelyet az alábbi ábra szemléltet:



3. ábra. $T_0 = 1$ s esetén ez ekvivalens B változásával is

Megjegyzés: A fenti grafikonon is látszik, hogy ϵ és k fordítottan arányos egymással, ami már a (20)-ban is látszott. Az T_0 szorzótól, pontosabban ennek reciprokától eltekintve (mivel, hogy ez csak egy konstans paraméter) a B sávszélesség változásának karakterisztikája is megfigyelhető az ábrán. Jól látható a hogy $T_0 > k+1$ esetén a (22) miatt a B ennél kisebb értékeket vesz fel ϵ függvényében, míg $T_0 < k+1$ esetén a B ennél nagyobb értékeket vesz fel.

Következmény: Az első módszerben bemutatott számolást numerikusan elvégezve ugyan- ehhez a karakterisztikához jutunk, a különbséget a probléma diszkretizálása jelenti, ezért lett lépcsős a függvény, de az ϵ -tól való függését a sávszélességnek a 3. ábra remekül szemlélteti. Amennyiben rögzített ϵ és T_0 esetén kíváncsiak vagyunk a tényleges B sávszélességre, akkor

a (17) egyenletet az első lépésben ismeretett algoritmussal megoldhatjuk numerikusan, felhasználva a második megközelítésben kapott eredményt, könnyítve a numerikus számolást.

Megjegyzés: Számítógéppel számolva a $y_1 = \left| \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \right|$, illetve a konstans $y_2 = \epsilon \cdot T_0$ függvény különbségét tekintve könnyen meghatározhatjuk rögzített ϵ -ra és T_0 -ra a sáv szélességet.

3.3.2. Sáv szélesség η paraméter segítségével

Definíció: Tegyük fel, hogy egy $x(t)$ véges tartójú jel frekvencia-tartománybeli transzformáltja páros. Ekkor $x(t)$ jel sáv szélessége meghatározható, ha rögzítünk egy $\eta \in (0, 1)$ paramétert, és a frekvencia-tartománybeli $|X(f)|^2$ függvénynek egy olyan $I : (-B, B) \in \mathbf{R}$ szimmetrikus, nyílt intervallumra vett megszorítását nézzük, ahol

$$E_{X(f)} = \int_{-B}^B |X(f)|^2 df = \int_{-B}^B \left| \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \right|^2 df = \eta T_0 \quad (24)$$

ahol ηT_0 a jel energiájának η -szorososa, ahogy azt (12)-ben láttuk.

Következmény: Ekkor a jel sáv szélessége $I = (-B, B)$ intervallum hosszának fele, azaz B .

Sáv szélesség kiszámítása:

Az előző (3.3.1) fejezetben ismeretett módszerhez hasonlóan fogjuk meghatározni ez esetben is a sáv szélességet.

Első megközelítés: Vegyük a (25) egyenletet. Az integrálást elegendő elvégezni csak a tartomány felére, ugyanis a függvény szimmetriája miatt a teljes integrál az intervallumra felére vett integrál kétszerese lesz. Így az alábbi improprius integrált kapjuk:

$$\begin{aligned} \lim_{C \rightarrow 0} \int_C^B |X(f)|^2 df &= \lim_{C \rightarrow 0} \int_C^B \left| \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \right|^2 df = \lim_{C \rightarrow 0} \frac{2\pi f T_0 \int_0^{2\pi f T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau + \cos(2\pi f T_0) - 1}{2\pi^2 f} \Bigg|_C^B = \\ &= \frac{2\pi B T_0 \int_0^{2\pi B T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau + \cos(2\pi B T_0) - 1}{2\pi^2 B} + \lim_{C \rightarrow 0} \frac{2\pi C T_0 \int_0^{2\pi C T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau + \cos(2\pi C T_0) - 1}{2\pi^2 C} = \\ &= \frac{T_0 \int_0^{2\pi B T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau}{\pi} - \frac{-\cos(2\pi B T_0) + 1}{2\pi^2 B} + \lim_{C \rightarrow 0} \left(\frac{T_0 \int_0^{2\pi C T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau}{\pi} - \frac{-\cos(2\pi C T_0) + 1}{2\pi^2 C} \right) = \\ &= \frac{T_0 \int_0^{2\pi B T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau}{\pi} - \frac{\sin^2(\pi B T_0)}{\pi^2 B} + \lim_{C \rightarrow 0} \left(\frac{T_0 \int_0^{2\pi C T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau}{\pi} - \frac{\sin^2(\pi C T_0)}{\pi^2 C} \right) = \\ &= \frac{T_0 \int_0^{2\pi B T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau}{\pi} - \frac{\sin^2(\pi B T_0)}{\pi^2 B} - (T_0)^2 = \frac{\eta T_0}{2} \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \quad (25)$$

és

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = 0. \quad (26)$$

A fenti egyenletet sem lehet megoldani analitikusan, de **3.3.1**-hez hasonlóan más úton is közelíthetünk a problémához.

Második megközelítés: Írjuk fel az előbbi integrált, mint a $(\frac{k}{T_0}, \frac{k+1}{T_0})$, $k \in \mathbb{N}$, intervallumon értelmezett integrálok összegeként, azaz

$$\int_0^B |X(f)|^2 df = \sum_{k=0}^N \int_{\frac{k}{T_0}}^{\frac{k+1}{T_0}} \left| \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \right|^2 df, \text{ ahol } N \in \mathbb{N} \quad (27)$$

Számoljuk ki a k . integrál értékét:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k}{T_0}}^{\frac{k+1}{T_0}} \left| \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \right|^2 df &= \frac{2\pi f T_0 \int_0^{2\pi f T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau + \cos(2\pi f T_0) - 1}{2\pi^2 f} \Bigg|_{\frac{k}{T_0}}^{\frac{k+1}{T_0}} = \\ &= \frac{2\pi \frac{k+1}{T_0} T_0 \int_0^{2\pi \frac{k+1}{T_0} T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau + \cos(2\pi \frac{k+1}{T_0} T_0) - 1}{2\pi^2 \frac{k+1}{T_0}} - \frac{2\pi \frac{k}{T_0} T_0 \int_0^{2\pi \frac{k}{T_0} T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau + \cos(2\pi \frac{k}{T_0} T_0) - 1}{2\pi^2 \frac{k}{T_0}} = \\ &= \frac{T_0 \int_0^{2\pi(k+1)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau}{\pi} - \frac{T_0 \int_0^{2\pi k} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau}{\pi} \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\cos(2k\pi) = \cos(2(k+1)\pi) = \cos(2\pi) = \cos 0 = 1 \quad (28)$$

a cosinus függvény periodicitása miatt.

Következmény: Tehát az eredményünket beírva a fenti szummába, és elvégezve egy-két egyenletrendezést:

$$\frac{T_0}{\pi} \sum_{k=0}^N \left(\int_0^{2\pi(k+1)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau - \int_0^{2\pi k} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right) \quad (29)$$

A szumma kibontása után, pedig a következő eredményre jutunk:

$$\frac{T_0}{\pi} \int_0^{2\pi(N+1)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau - \frac{T_0}{\pi} \int_0^0 \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \frac{T_0}{\pi} \int_0^{2\pi(N+1)} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \quad (30)$$

(26) egyenlőség miatt.

Következmény: Így zárt alakban megkaptuk az k . intervallumig az integrál értékét. Ekkor tekintenünk kell azt a legkisebb $M_{min} \in \mathbb{N}$ számot, melyre az alábbi egyenlőtlenség teljesül

$$\int_0^{2\pi(M_{min})} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau > \frac{\eta\pi}{2} \quad (31)$$

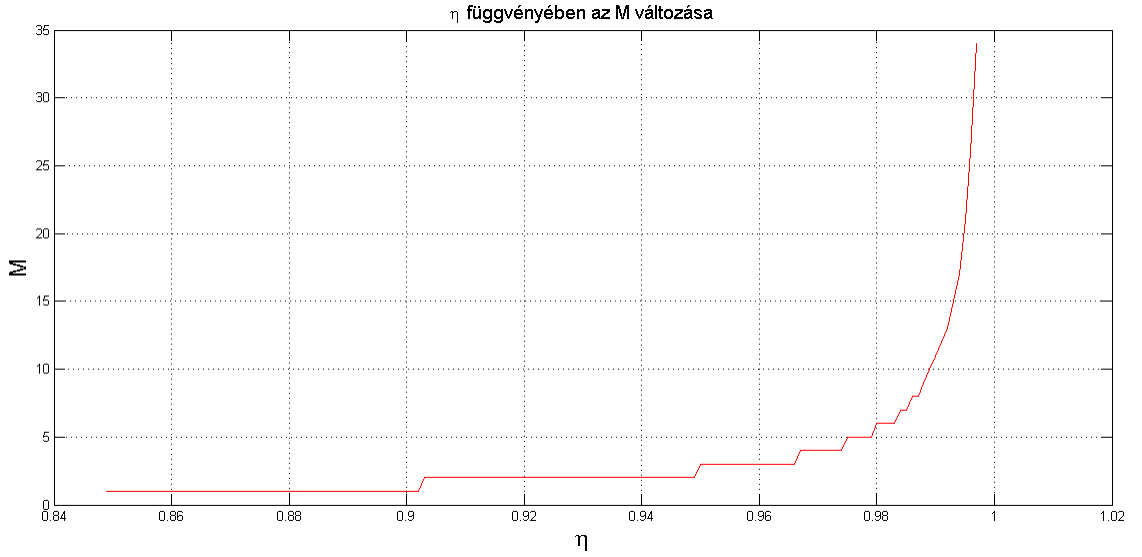
és ekkor (23)-at figyelembe véve $B = \frac{M_{min}}{T_0}$ választással adhatjuk meg a sávszélességet az energiaprofilból, ha elvégezzük az iterációt. Fontos különbség az előző fejezetben taglaltakhoz azonban, hogy itt a függvény függvény nagyon "gyorsan" konvergál 0-hoz, és így $T_0 = 1$

választás esetén megmutatható, hogy $k = 2$ -re a $(\frac{-k}{T_0}, \frac{k}{T_0})$ intervallumon van a függvény energiájának 95%-a

$$\int_{\frac{-k}{T_0}}^{\frac{k}{T_0}} |X(f)|^2 df = \int_{\frac{-k}{T_0}}^{\frac{k}{T_0}} \left| \frac{\sin T_0 \pi f}{\pi f} \right|^2 df = 0.9499 \quad (32)$$

ahol a függvény teljes energiája (12) miatt $T_0 = 1$.

Következmény: A 3.3.1 fejezetben ismeretett második megközelítéshez hasonlóan itt is lépcsős függvényt fogunk kapni, ami a karakterisztikát szépen mutatja, ám itt most az $\eta \downarrow 0.85$ esetet nem vizsgáljuk, ott a sáv szélesség a $(\frac{-k}{T_0}, \frac{k}{T_0})$ intervallumba fog esni, tehát a számolásunk miatt $M \equiv 1$.



4. ábra.

1. Megjegyzés: Jól látható a grafikonon, hogy $\eta \rightarrow 1$ esetén a meredeksége a grafikonnak a végtelenbe konvergál.

2. Megjegyzés: Az előző fejezettel ellentétesen itt most a rögzített paraméterrel egyenesen arányos a sáv szélesség. Ugyanehhez a karakterisztikához jutnánk, ha az egzakt egyenletet próbáljuk meg numerikusan közelíteni, de ez még néha számítógépeknek is komoly feladat, ezért egyszerűsítettük a problémát. Amennyiben rögzített η és T_0 mellett szeretnénk meghatározni a sáv szélességet, úgy a

$$\frac{T_0 \int_0^{2\pi B T_0} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau}{\pi} - \frac{\sin^2(\pi B T_0)}{\pi^2 B} - (T_0)^2 = \frac{\eta T_0}{2} \quad (33)$$

egyenletet kell megoldanunk numerikusan.

4. Összegzés

Ennek a problémának a meghatározásához a folytonos problémákat célszerű volt diszkrétizálni, és az alapján meghatározni a karakterisztikáját a sávszélességnek ϵ és η paraméterek mellett.

Fontos megjegyezni, hogy a karakterisztikákat meghatározó módszerek NEM alkalmasak arra, hogy ténylegesen számoljunk sávszélességet, de ez esetben célravezetőnek bizonyultak.

5. Felhasznált programok

1 Wolfram Mathematica 9.0

2 MATLAB R2014a

6. Forrás

1 `users.itk.ppke.hu/~nasma1`