

N.1) Adott egy lineáris, időinvariáns rendszer az impulzusválaszával:

$$h(n) = u(n) \cdot \{n \cdot 0.2^n - 2 \cdot 0.2^n\}$$

- Adja meg a rendszer átviteli függvényét, és rajzolja le a pólus-zérus elrendezését! Stabili-e a rendszer?
- Adja meg a rendszert leíró differenciaegyenletet (rendszerregyenletet)! Milyen típusú a rendszer?
- Adja meg Z-transzformáció alkalmazásával a rendszer válaszát az $x(n) = u(n)0.5^n$ gerjesztés, és a $y(-2) = y(-1) = 0$ kezdeti feltételek esetén!

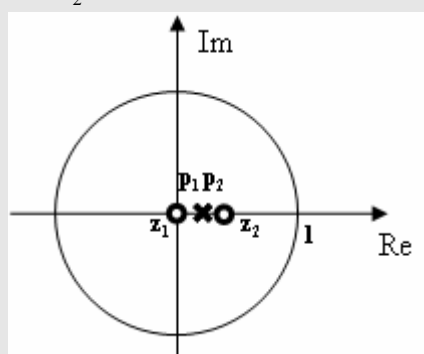
Megoldás

a)

A rendszer átviteli függvénye az impulzusválasz Z transzformációja:

$$H(z) = Z\{h(n)\} = \frac{0.2z}{(z-0.2)^2} - 2 \frac{z}{z-0.2} = -2 \frac{z(z-0.3)}{(z-0.2)^2},$$

Amiből látható, hogy a rendszernek egy kétszeres multiplicitású $p_1 = p_2 = 0.2$ pólusa és két egyszeres multiplicitású $z_1 = 0$ és $z_2 = 0.3$ zérusa van.



A rendszer BIBO stabil, mivel minden pólusa az egység sugarú körön belül van.

b)

Az átviteli függvény alapján átszorzás és rendezés után kapjuk az $Y(z)[1 - 0.4z^{-1} + 0.04z^{-2}] = X(z)[-2 + 0.6z^{-1}]$

egyenletet, amiből inverz Z transzformációval megkapható a rendszerregyenletet a következő alakot ölti:

$$y(n) - 0.4y(n-1) + 0.04y(n-2) = -2x(n) + 0.6x(n-1).$$

A rendszer rekurzív IIR szűrő.

d)

Az a) feladatban számolt $H(z) = -2 \frac{z(z-0.3)}{(z-0.2)^2}$ átviteli függvénynek és a gerjesztés

$$X(z) = Z\{u(n)0.5^n\} = \frac{z}{z-0.5}$$

Z tartománybeli alakjának szorzata adja a válasz Z transzformáltját:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{-2z^2(z-0.3)}{(z-0.2)^2(z-0.5)},$$

Amiből inverz Z transzformációval kapjuk meg a válasz időbeli alakját:

$$y(n) = Z^{-1} \left\{ \frac{-2z^2(z-0.3)}{(z-0.2)^2(z-0.5)} \right\} = Z^{-1} \left\{ z \frac{A}{(z-0.2)^2} + z \frac{B}{z-0.2} + z \frac{C}{z-0.5} \right\},$$

ahol az együtthatók megoldásához szükséges egyenletrendszert két polinom egyenlőségéből kapjuk meg:

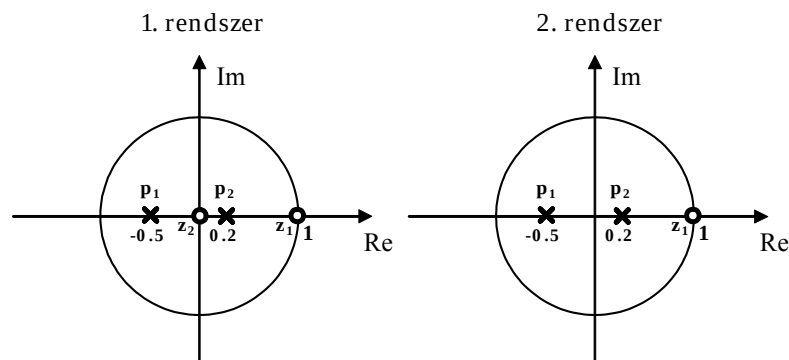
$$A(z-0.5) + B(z-0.2)(z-0.5) + C(z-0.2)^2 = -2z^2 + 0.6z,$$

amiből $A = -\frac{2}{15}$, $B = \frac{2}{9}$ és $C = -\frac{20}{9}$. Ezzel a válasz időbeli jelalakja végül a következő lesz:

$$y(n) = Z^{-1} \left\{ -\frac{2}{3} \frac{0.2z}{(z-0.2)^2} + \frac{2}{9} \frac{z}{z-0.2} - \frac{20}{9} \frac{z}{z-0.5} \right\} = u(n) \left[-\frac{2}{3} \cdot n \cdot 0.2^n + \frac{2}{9} \cdot 0.2^n - \frac{20}{9} \cdot 0.5^n \right].$$

Az eredmény helyes, mivel a fenti formulával adott válasz $n=0$ és $n=1$ helyettesítéssel egyezik a differenciaegyenletből behelyettesítéssel kapott $y(0)=-2$ és $y(1)=-1.2$ értékekkel.

N.2) Adott két lineáris, időinvariáns, kauzális rendszer pólus-zérus képe:



- Adja meg mindkét rendszer átviteli függvényét (konvergencia régióval együtt)!
- Adja meg mindkét rendszer impulzusválaszát! Rajzolja le az impulzusválasz függvényt a $[0,5]$ intervallumon!
- Az $x(n) = u(n)$ gerjesztés esetén adja meg az 1. rendszer válaszát az rendszert leíró differenciaegyenlet időbeli megoldásával, relaxált rendszer esetén!

Megoldás

a)

A $H_1(z) = \frac{z(z-1)}{(z+0.5)(z-0.2)}$ és $H_2(z) = \frac{(z-1)}{(z+0.5)(z-0.2)}$ átviteli függvények közvetlenül

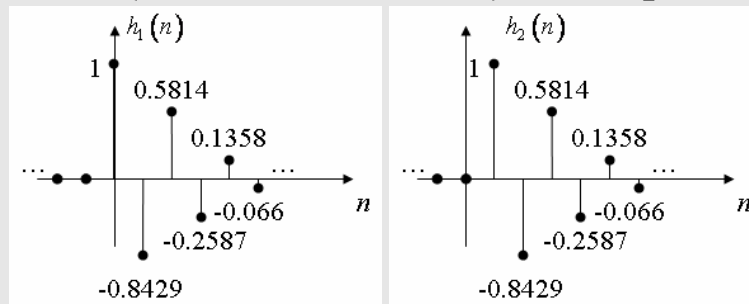
kiolvashatóak a pólus-zérus diagramból. A konvergencia tartomány mindkét esetre $RoC := \{|z| > 0.5\}$, mivel a rendszer kauzális.

b)

Az impulzusválaszokat az átviteli függvények inverz Z transzformálásából kapjuk:

$$h_1(n) = Z^{-1}\{H_1(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{15}{7} \frac{z}{z+0.5} - \frac{8}{7} \frac{z}{z-0.2}\right\} = u(n) \left[\frac{15}{7} (-0.5)^n - \frac{8}{7} (0.2)^n \right] \text{ és}$$

$$h_2(n) = Z^{-1}\{H_2(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{15}{7} z^{-1} \frac{z}{z+0.5} - \frac{8}{7} z^{-1} \frac{z}{z-0.2}\right\} = u(n-1) \left[\frac{15}{7} (-0.5)^{n-1} - \frac{8}{7} (0.2)^{n-1} \right].$$



c)

A rendszert leíró differencia egyenlet a $H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-z^{-1}}{1+0.3z^{-1}-0.1z^{-2}}$ átviteli

függvényből közvetlenül felírható:

$$y(n) + 0.3y(n-1) - 0.1y(n-2) = x(n) - x(n-1).$$

A $p_1 = -0.5$ és $p_2 = 0.2$ pólusok alapján a homogén megoldás $y_h(n) = C_1(-0.5)^n + C_2(0.2)^n$ alakú. A partikuláris megoldást az $x(n) = u(n)$ gerjesztés alapján az $y_p(n) = M$ alakban keressük, ahol M együtthatót a differencia egyenletbe történő behelyettesítés után kapjuk meg $M + 0.3 \cdot M - 0.1 \cdot M = 1 - 1$

, amiből $M = 0$ adódik, és ezzel a rendszer válasza $y_{\text{át}}(n) = C_1(-0.5)^n + C_2(0.2)^n$ alakú, ahol C_1 és C_2 együtthatókat a behelyettesítésből kapott $y(0) = 1$ és $y(1) = -0.3$ alapján ($y(M-N+1)$ és $y(M-N+2)$) a következő egyenletekből számítjuk:

$$y(0) = 1 = C_1 + C_2 \text{ és}$$

$$y(1) = -0.3 = C_1 \cdot (-0.5) + C_2 \cdot 0.2,$$

amiből $C_1 = \frac{5}{7}$ és $C_2 = \frac{2}{7}$. Az válasz kifejezése ezek után:

$$y_{\text{át}}(n) = u(n) \left[\frac{5}{7} (-0.5)^n + \frac{2}{7} \cdot 0.2^n \right].$$

Az $n=2$ formulába helyettesítés esetén a $y_{\text{át}}(2) = \frac{5}{7} (-0.5)^2 + \frac{2}{7} 0.2^2 = 0.19$ érték és a differencia egyenletből behelyettesítéssel kapott $y(2) = 0.19$ érték összevetéséből látható, hogy a megoldás helyes.

K.1) Adott egy szűrő $h(n) = u(n) [0.5^n - 3 \cdot 0.9^n]$ impulzusválasz függvénye. Rajzolja le a rendszer kanonikus blokkdiagramját!

Megoldás

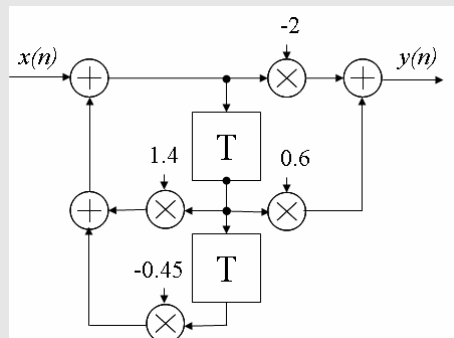
Az impulzusválasz függvényből Z transzformációval kapjuk meg az $H(z)$ átviteli

függvényt: $H(z) = \frac{z}{z-0.5} - 3 \frac{z}{z-0.9} = \frac{-2z^2 + 0.6z}{(z-0.5)(z-0.9)} = \frac{-2 + 0.6z^{-1}}{1 - 1.4z^{-1} + 0.45z^{-2}}$. Mivel az

átviteli függvény a $Y(z)$ kimeneti és a $X(z)$ bemeneti Z transzformált hányadosa, ezért az $(1 - 1.4z^{-1} + 0.45z^{-2})Y(z) = (-2 + 0.6z^{-1})X(z)$ egyenlet írható fel, amiből inverz Z transzformáció után kapjuk a rendszeregyenletet:

$$y(n) - 1.4y(n-1) + 0.45y(n-2) = -2x(n) + 0.6x(n-1),$$

amiből a kanonikus alak már egyszerűen felrajzolható.



K.2) Egy jel $X(z) = \frac{z(z-3)}{(z-0.2)(z+0.3)}$ Z transzformáltja alapján adja meg az $x_1(n)$, $x_2(n)$ és $x_3(n)$ időbeli jelalakot, ha a konvergencia rendre a $RoC_1 := \{z, |z| > 0.3\}$, $RoC_2 := \{0.2 < |z| < 0.3\}$ $RoC_3 := \{|z| < 0.2\}$ tartományokra értelmezett!

Megoldás

Első lépésben az $X(z)$ Z tartománybeli jelet résztörtekre kell bontani:

$$X(z) = \frac{z(z-3)}{(z-0.2)(z+0.3)} = 6.6 \cdot \frac{z}{(z-0.3)} - 5.6 \cdot \frac{z}{(z-0.2)},$$

a megadott konvergencia tartományok alapján az egyes résztörtek inverz Z transzformáltja a következő:

$$Z^{-1} \left\{ 6.6 \cdot \frac{z}{(z-0.3)} \right\} = \begin{cases} 6.6 \cdot u(n) 0.3^n & \text{ha } z \in RoC_1 \{z, 0.3 < |z|\} \\ -6.6 \cdot u(-n-1) 0.3^{-n-1} & \text{ha } z \in RoC_2 \{z, 0.2 < |z| < 0.3\} \\ -6.6 \cdot u(-n-1) 0.3^{-n-1} & \text{ha } z \in RoC_3 \{z, |z| < 0.2\}, \end{cases}$$

és

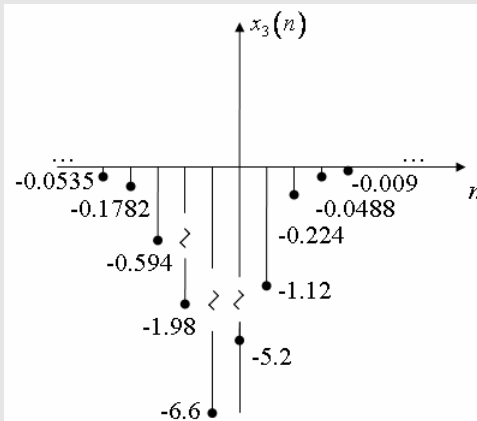
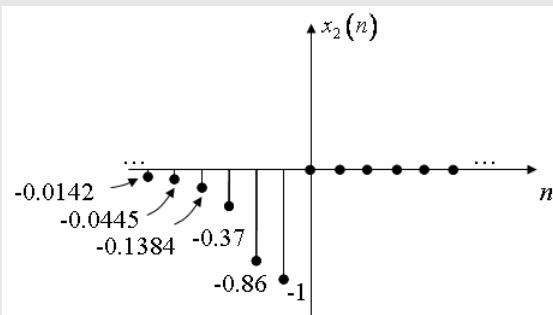
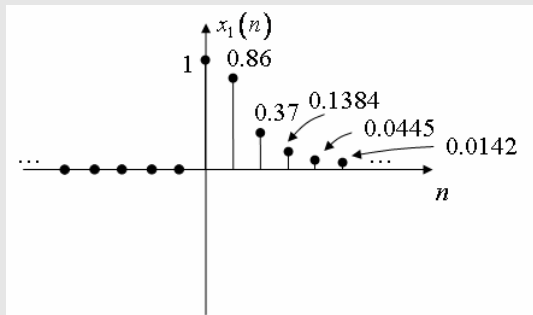
$$Z^{-1} \left\{ -5.6 \cdot \frac{z}{(z-0.2)} \right\} = \begin{cases} -5.6 \cdot u(n) 0.2^n & \text{ha } z \in RoC_1 \{z, 0.3 < |z|\} \\ -5.6 \cdot u(n) 0.2^n & \text{ha } z \in RoC_2 \{z, 0.2 < |z| < 0.3\} \\ 5.6 \cdot u(-n-1) 0.2^{-n-1} & \text{ha } z \in RoC_3 \{z, |z| < 0.2\}, \end{cases}$$

és a kettő együtt adja a keresett $x_1(n)$, $x_2(n)$ és $x_3(n)$ időbeli jelalakot:

$$x_1(n) = u(n) [6.6 \cdot 0.3^n - 5.6 \cdot 0.2^n],$$

$$x_2(n) = -6.6 \cdot u(-n-1) 0.3^{-n-1} - 5.6 \cdot u(n) 0.2^n \text{ és végül}$$

$$x_3(n) = u(-n-1) \left[-6.6 \cdot 0.3^{-n-1} + 5.6 \cdot 0.2^{-n-1} \right].$$



K.3) Az $x(n) = [-5 \ x(1) \ 3 \ x(3)]$ jel 4 pontos DFT-je $X(k) = [3 \ -8+9j \ X(2) \ X(3)]$. Határozza meg az ismeretlen értékeket!

Megoldás

A DFT $\mathbf{X} = \mathbf{W}_4 \mathbf{x}$ vektoros alakja alapján felírható egyenletrendszerből megkaphatóak a keresett értékek:

$$\begin{bmatrix} -5 \\ x(1) \\ 3 \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -8+9j \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix},$$

amiből $x(1) = 25 - 12j$, $x(3) = 11 + 12j$, $X(2) = -4$ és $X(3) = 4 - 9j$.

K.4) Adja meg a $[0, \pi/2]$ relatív frekvenciatartományon ideális aluláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének az impulzusválasz függvényét!

Megoldás

A

K.5) [Hogyan tudjuk becsülni az \$\mathbf{R}\$ korrelációs mátrixot megfigyelések alapján?](#) Mutasson egy példát $\mathbf{R}$ korrelációs mátrixra, ha a dimenziószáma legalább 4!

Megoldás

Egy sztochasztikus folyamat korrelációs mátrixa definíció szerint $R_{ij} = E\{x_i x_j\}$, a megfigyelések alapján a korrelációs mátrix becsülhető az $\tilde{R}_{ij} = \frac{1}{K - \max(i, j)} \sum_{m=0}^{K - \max(i, j)} x_{i+m} x_{j+m}$ statisztikával. Példa egy 4 dimenziós korrelációs mátrixra:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

K.6) Az előző korrelációs mátrix alapján írja fel a Wiener szűrő optimális beállítására vonatkozó rekurzióját a leggyorsabb konvergenciát garantáló Δ paraméterrel! (7p)

Megoldás

A leggyorsabb konvergenciát garantáló Δ paramétert az $\mathbf{R}$ korrelációs mátrix sajátértékeiből

határozhatjuk meg. Az $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 0.191$, $\lambda_2 = 0.691$,

$\lambda_3 = 1.309$ és $\lambda_4 = 1.809$, amiből az optimális Δ paraméter a következő:

$$\Delta_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} = \frac{2}{0.191 + 1.809} = 1.$$