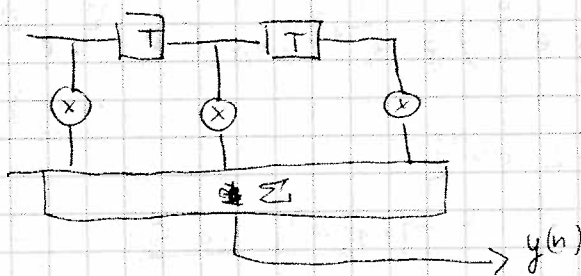
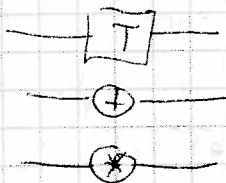
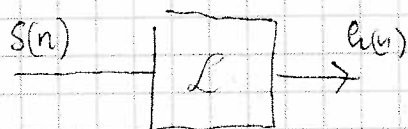


normális  
konvolúciós

$$\alpha \in \{\tau, \rho, w\}$$



$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)$$



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) x(k)$$

impulzusválasz  
h(n) megismerhetem

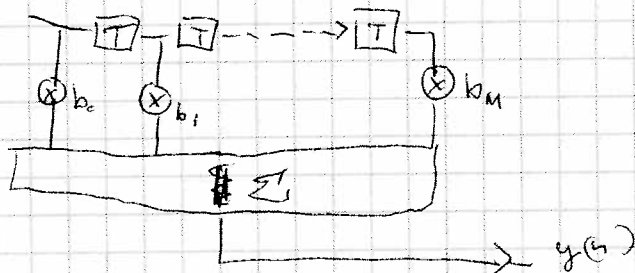
Kauszális :  $h(n) = 0 \quad n < 0$

BIBO stabil :  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad x(n)$  korlátos jel

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k) x(n-k) = \sum_{k=0}^n h(n-k) x(k)$$

## 1) FIR rendszerek

lineáris időinvariáns rendszerek : 1) FIR (Finite Impulse Response)

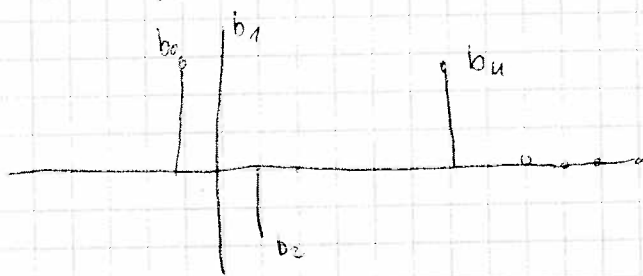


$$y(n) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

$$y(n) = \sum_{j=0}^n h(j) x(n-j)$$

Egy olyan LTIS rendszeret reprezentál az ábrán az impulzusválasz  $h(n)$

$$h_j) = b_j, \quad j = 0, \dots, M$$

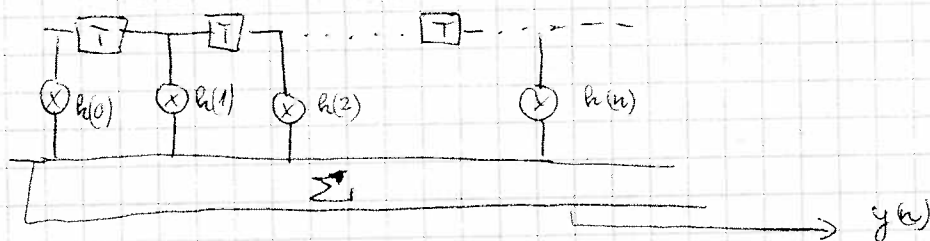
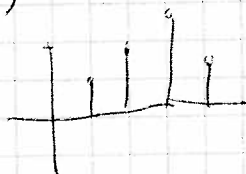


impulzusváltak → végén a kitéző

ör egy feed forward hálózattal (előzetes)

2) IIR (Infinite Impulse Response)

$$y(n) = \sum_{k=0}^n h(k) x(n-k)$$



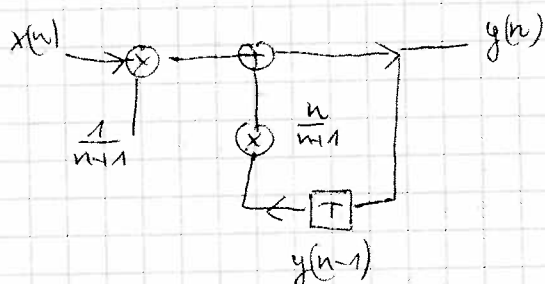
PE:  $y(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x(k)$  → így nem lehet implementálni

(átalakítás)

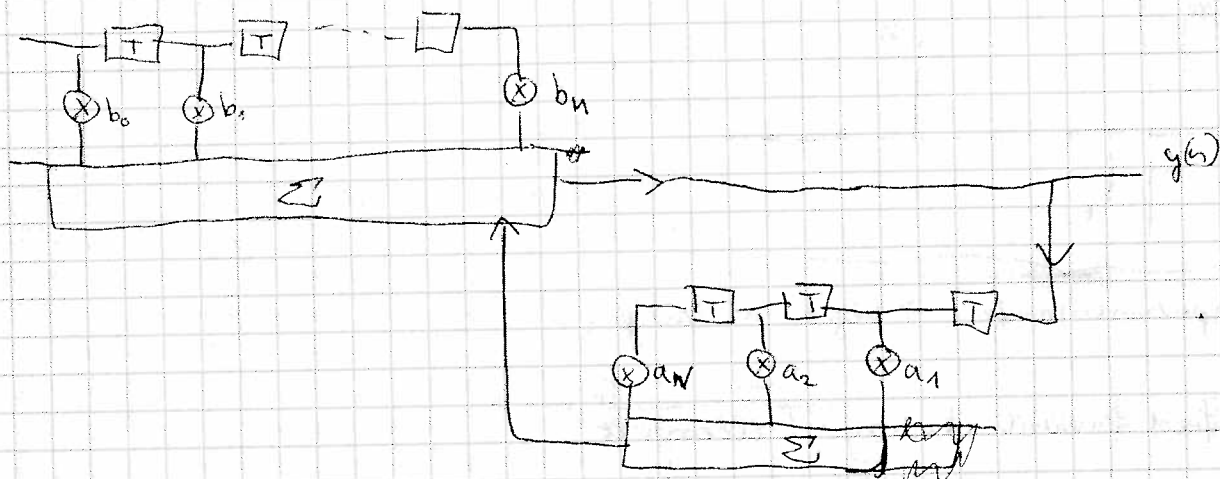
$$(n+1) y(n) = x(n) + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x(k)}_{n \cdot y(n-1)}$$

$$y(n) = \frac{n}{n+1} y(n-1) + \frac{1}{n+1} x(n)$$

→ így már implementálható → végig kell számolni



### 3) Rekursív rendszerek



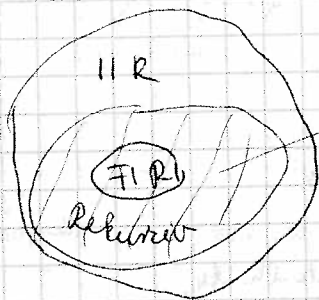
$$y[n] = - \sum_{i=1}^N a_i y[n-i] + \sum_{j=0}^M b_j x[n-j]$$

$$y[n] + \sum_{i=1}^N a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^M b_j x[n-j] \quad ; \quad a_0 = 1$$

feedback

feedforward

→ N-edrendű és differenciál



függőleges megvalósítás

→ IIR-hoz technikailag olyan rekursív rendszert találunk ami C-körben jól implementálható

### Rekursív rendszerek

$N, M, \bar{a}, \bar{b}$

koeficiensok  
 $\bar{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_N)$   
 $\bar{b} = (b_0, b_1, \dots, b_M)$

→ ez jelölés az egy rekursív lineáris  
 jelalakozórendszer

### Alapfeladatok:

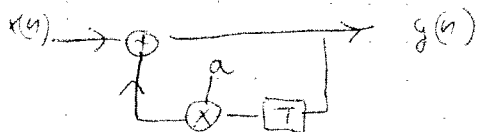
1) Analízis: adott  $\bar{a}, \bar{b}, M, N \xrightarrow{??} h[n]$  mi az imp. válasz.  
 $\xrightarrow{??} \text{adott } x[n] \rightarrow y[n]$

2) Szintézis: adott  $h[n] \xrightarrow{??} \bar{a}, \bar{b}, M, N$  Hogyan kell megvalósítani az arch. + techn. ad  
 h az megvalósítás az előző feladatok

speciális eset:

$$y(n) = a \cdot y(n-1) + x(n)$$

rekurzív m.



szinguláris kezdőérték

$$n=0$$

$y(-1) \leftarrow$  kezdeti érték

amikor kezdje a szingulárisot van kezdeti érték  
y-on

$$n=0 \quad y(0) = a y(-1) + x(0)$$

$$n=1 \quad y(1) = a y(0) + x(1) = a^2 y(-1) + a x(0) + x(1)$$

$$n=2 \quad y(2) = a y(1) + x(2) = a^3 y(-1) + a^2 x(0) + a x(1) + x(2)$$

$$y(k) = a^{k+1} y(-1) + \sum_{i=0}^k a^i x(n-i)$$

zero input tag (ZI)

zero state (ZS)

ha input = 0 akkor  $y(k) = a^{k+1} y(-1)$

ha m. belső állapotváltozók 0-ak

stacionárius - amikor már eltűnt a transziens rész  
(kellően nagy k esetén)

transziens rész  $k < 1$  esetén  
homogén nem részesel benne a m. bemenete

ekvivalens  
elnevezések

inhomogén m.o

N-edrendű lineáris állandó együtthatós differencia egyenlet megoldása

$y(n)$  bemenő jel lineáris kombinációi, gesztus

$$y(n) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

$$S^i y(n) = y(n-i)$$

$$D = \sum_{i=0}^N a_i S^i$$

Ha:

$$1) D y_{ha}(n) = 0, \quad 2) D y_{ip}(n) = g(n)$$

lineáris, mert eltolásop-ak summája  
differencia op

akkor

$$y(n) = \underbrace{y_{ha}(n)}_{ZI} + \underbrace{y_{ip}(n)}_{ZS}$$

$$D(y_{ha}(n) + y_{ip}(n)) = D y_{ha}(n) + D y_{ip}(n) = g(n)$$

$$\sum_{i=0}^N a_i S^i y(n) = g(n)$$

$$\boxed{D y(n) = g(n)}$$

$$y(n) = y_{ha}(n) + y_{ip}(n) ; \quad D y_{ha}(n) = 0 \quad ; \quad D y_{ip}(n) = g(n)$$

$$D (y_{ha}(n) + y_{ip}(n)) = D y_{ha}(n) + D y_{ip}(n) = g(n)$$

$$S y(n) = \text{const } p(n)$$

$$S \lambda^n = \lambda^{n-1} = \lambda^{-1} \cdot \lambda^n = \text{const} \cdot \lambda^n$$

$$S^i \lambda^n = \lambda^{ni} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{const}}}{\lambda^{-i}} \cdot \lambda^n$$

$$D \lambda^n = 0$$

$$\sum_{i=0}^N a_i S^i \lambda^n = \sum_{i=0}^N a_i \cdot \lambda^{-i} \cdot \lambda^n = \lambda^n \sum_{i=0}^N a_i \lambda^{-i} = 0$$

W.B.N

$$\sum_{i=0}^N a_i \lambda^{-i} = 0 \rightarrow \text{karakteristisches polynom} \quad / \cdot \lambda^N$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^N a_i \lambda^{N-i} = 0}$$

$$\lambda_l \quad l=1, \dots, N \quad \sum_{i=0}^N a_i \lambda_l^{N-i} = 0$$

$$y_{ha}(n) = \sum_{l=1}^N c_l \lambda_l^n ; \quad D y_{ha}(n) = 0$$

$$\sum_{i=0}^N a_i S^i \left( \sum_{l=1}^N c_l \lambda_l^n \right) = \sum_{l=1}^N c_l \sum_{i=0}^N a_i S^i \lambda_l^n = \sum_{l=1}^N c_l \left( \sum_{i=0}^N a_i \lambda_l^{-i} \cdot \lambda_l^n \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^N c_l \lambda_l^n \boxed{\sum_{i=0}^N a_i \lambda_l^{-i}} =$$

W

$$y(n) + 3y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

Karakterisztikus polinom:

$$1 - 3\lambda^{-1} + 4\lambda^{-2} = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

$$y_{ha}(n) = C_1 4^n + C_2 (-1)^n$$

Partikuláris (stacionár) megoldás

→ ez akkor dominál ha  $t \rightarrow \infty$  (mert addigra eltűnik a konstans megoldás)

Hasonló alakban keressük mint  $g(n)$

|       | $g(n)$                           | $g_p(n)$                                    |
|-------|----------------------------------|---------------------------------------------|
| const | A                                | K                                           |
| exp   | $A \cdot a^n$                    | $K \cdot a^n$                               |
|       | $n^M \cdot a^n$                  | $(K_0 + K_1 n + \dots + K_M n^M) \cdot a^n$ |
|       | $\sin n\omega$<br>$\cos n\omega$ | $K_1 \sin n\omega + K_2 \cos n\omega$       |

Típus

$$x(n) = u(n) \rightarrow \text{egységugrás fv.}$$



mivel  $\sigma < 1 \rightarrow$  jól értékelünk akár nem létezőként közelítve  $y(n) = y(n-1) = y(n-2) = K$

$$y(n) + 3y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

$$K + 3K + 4K = 1 + 2$$

$$8K = 3$$

$$\rightarrow K = \frac{3}{8}$$

$$y_p(n) = \frac{3}{8} u(n)$$

$$y(n) = C_1 4^n + C_2 (-1)^n + \frac{3}{8} u(n)$$

tablázatból

$$y(n) = \sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^n + y_p(n)$$

karakt. polinomból

$c_i$  - együtthatók meghatározása

$$y(-N), y(-N+1), \dots, y(-1) \rightarrow N \text{ db}$$

$$y(n) = -\sum_{i=1}^N a_i y(n-i) + \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

$$n=0 \quad y(0) = -\sum_{i=1}^N a_i y(-i) + \sum_{j=0}^M b_j x(-j) \Rightarrow y(0) = \sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^0 + y_p(0)$$

$$n=1 \quad y(1) = - \sum_{i=1}^N a_i y(1-i) + \sum_{j=0}^M b_j x(1-j) \Rightarrow y(1) = \sum_{i=1}^N c_i a_i^2 + y_{ip}(1)$$

$$n=N-1 \quad y(N-1) = - \sum_{i=1}^N a_i y(N-1-i) + \sum_{j=0}^M b_j x(N-1-j)$$

$$\Rightarrow y(N-1) = \sum_{i=1}^N c_i a_i^{N-1} + y_{ip}(N-1)$$

$$\sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^0 = y(0) - y_{ip}(0) = r_0$$

$$\sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^1 = y(1) - y_{ip}(1) = r_1$$

$$\sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^{N-1} = y(N-1) - y_{ip}(N-1) = r_{N-1}$$

N db. egyenlet  
 $c_1, \dots, c_N$

$$\overline{\Lambda} \overline{c} = \overline{r} \Rightarrow \overline{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

↑  
 nagy  $\lambda$

$\Rightarrow$  ennel a determináns  
 sosem 0

$$\det(\overline{\Lambda}) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

✓  
 A-g lin. függetlenek az  
 oszlopok

✓  
 mindig van megoldás

