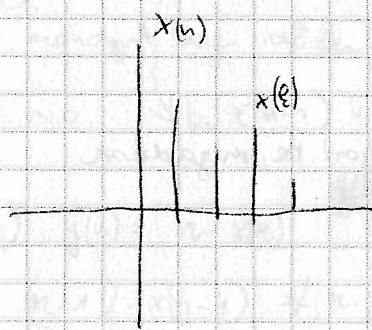


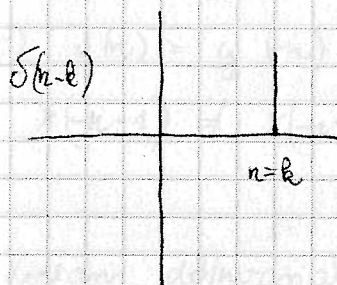
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n=0 \\ 0 & \text{if } n \neq 0 \end{cases}$$



konvolúciósomma

$$x(k) \delta(n-k) = x(n) \Big|_{n=k} \rightarrow x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) x(k)$$

$$= \delta(n) * x(n)$$



δ a konvolúciós egysegjelene
~~azt~~ $x(k)$

Minden jel dekomponálható Dirac deltaok lineáris kombinációjára

Elemi műveletek a digitális jeleken:

$\left(\begin{array}{c} \oplus \\ \Sigma \end{array} \right) \rightarrow y(n) = x_1(n) + x_2(n)$

$\left(\begin{array}{c} \times \\ \text{skálázás} \end{array} \right) \rightarrow y(n) = c \cdot x(n)$

időbeli eltolás (késleltetés) operátor

$x(n) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y(n) = x(n-1) \Rightarrow \boxed{T} \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{k} \boxed{T} \rightarrow y(n) = x(n-k)$

$$S x(n) = x(n-1)$$

$$S^k x(n) = x(n-k)$$

↑

Digitális jelfeldolgozó rendszer



$$y(n) = b x(n) \cdot x(n-1) + x(n)$$

digit. jelfeldolgozó matematikai reprezentációja

↓
gráf

elemi operátoroknál egy adott topológia szerinti összekapcsolása

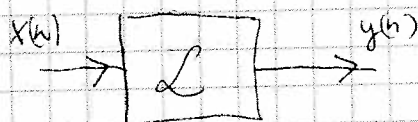
analízis } grafelméleti módszerrel egybeváltás
szintézis } mat. rep. el. ábrájának átírása → az alapjai felbontási gráf

→ gráf

$\{ \tau, \tilde{a}, O_p \}$ → dig. jelfeldolgozó r. megoldása

↑
topológia (gráfok rep.) ↑
kényszerítő paraméterek elemi op.-ok halmaza

adott feladattól függ megvalósításuk



↑
dekor. a topológia
topológia megvalósítás egy nemtriviális feladatot, ami eredményül adja y(n)-t

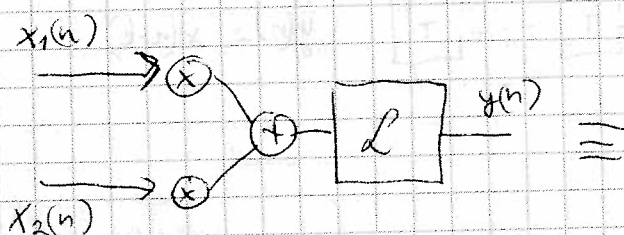
Lineáris r. - ek: (def.)

$$\mathcal{L}(c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)) = c_1 \mathcal{L}x_1(n) + c_2 \mathcal{L}x_2(n)$$

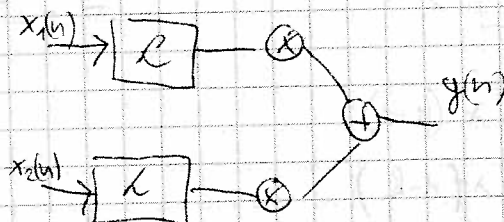
$$y(n) = c_1 y_1(n) + c_2 y_2(n);$$

$$y_1(n) = \mathcal{L}x_1(n);$$

$$y_2(n) = \mathcal{L}x_2(n);$$



ekvivalens



Időinvariáns rendszerek

$$S \mathcal{L} X(n) = \mathcal{L} S X(n)$$

időbeli eltolás operátora

rendszer op.

S és $\mathcal{L}$ operátorok egymással felcserélhetők



$$S^k \mathcal{L} X(n) = \mathcal{L} S^k X(n)$$

$$S y(n) = \mathcal{L} X(n-1)$$

$$y(n-1) = \mathcal{L} X(n-1)$$

$$y(n) = \mathcal{L} X(n)$$

PE:

a) mondjuk neg időben invariáns-e : $y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1)$

n.o. $\downarrow$ $b_0 x(n-1) + b_1 x(n-2) = b_0 x(n-1) + b_1 x(n-2)$

b) $y(n) = n \cdot x(n)$

$(n-1) \cdot x(n-1) \neq n \cdot x(n-1) \rightarrow$ nem időinv.

c) $y(n) = y(-n)$

$x(-n-1) \neq x(-n+1) \rightarrow$ nem időinv.

Lineáris időinvariáns rendszerek (Linear Time Invariant Systems [LTI])

Lineáris $\cap$ Időinv

(valaki mindig real-time megvalósítási)

kauzalitás : kánuálja m. -űt is van a n-dik időpillanatban
 értékek nem függnek $n+1, n+2, \dots, n+k$ időpillanatoktól

$$y(n) = F(x(n), x(n-1), \dots, x(-\infty))$$

$$y(n) \neq F(x(n+L), x(n+L-1), \dots, x(n+1), x(n), \dots, x(-\infty))$$

BIBO (Bounded Input Bounded Output) stabilitás

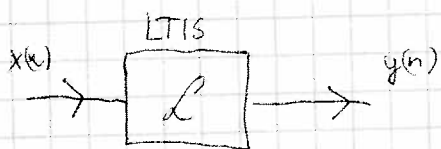
$$\exists M_x : |x(n)| \leq M_x \implies \exists M_y : |y(n)| \leq M_y \quad \forall n \text{ esetén}$$

korlátos jel korlátos
 nem végtelen az átlagérték

korlátos
 véges átlagérték



energia megmaradás



ha L invariáns akkor már a
kimenő is kimenő jelek segítségével
kell leírni a rendszert

"Black-box"

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \overset{\text{kiegészítő}}{\delta^k} \delta(n)$$

doboz invariáns az művelet végrehajtás → ráadásan δ -t → kimenőjel = $h(n)$

δ bemenése mi a vár. kimenete → $h(n)$

impulzusválasz fr.

$$y(n) = L x(n) = L \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta^k \delta(n) \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \overset{\substack{\text{lineáris, miatt} \\ \text{felcserélhető a } \sum \text{ és a } L}}{L \delta^k} \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \overset{\substack{\text{időinvariancia} \\ \text{miatt}}}{\delta^k h(n)}$$

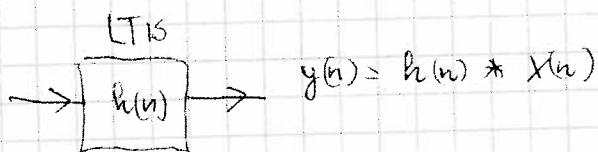
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta^k L \delta(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta^k h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$

L -t alkalmazva $\delta(n)$ -re → $h(n)$

$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) x(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n-m)$

Kongruencia

LTIS megismerhető méréssel : δ -ra nyúlni a rendszer
válaszát → $h(n)$ → az minden más jeles
infót tartalmaz → megkapunk vele a várt kimenet
bemenetét



Kongruencia tulajdonságai

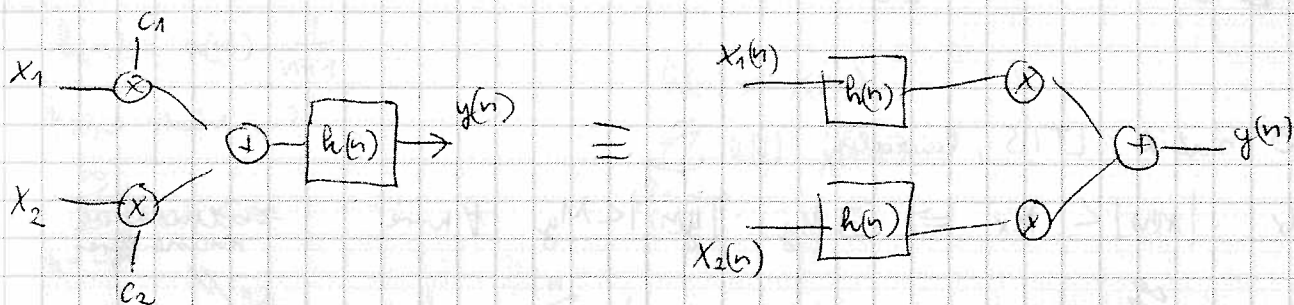
- kommutatív $x(n) * h_2(n) = h_2(n) * x(n)$

- asszociatív $y(n) = h_1(n) * (h_2(n) * x(n)) = h_2(n) * (h_1(n) * x(n))$



Konkrétan kapott elemek sorrendje felcserélhető azonos LTI a sor

$$y(n) = h(n) * \{c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)\} = c_1 h(n) * x_1(n) + c_2 h(n) * x_2(n)$$



konv * is + $\Rightarrow$ test (algebrai)

Kauzális LTIS

$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)}_{\text{LTIS}} \rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k) x(n-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

$$y(n) = \underbrace{\dots + h(-2)x(n+2) + h(-1)x(n+1)}_{\text{jövő}} + \underbrace{h(0) \cdot x(n) + h(1) \cdot x(n-1) + \dots}_{\text{jelen és múlt}}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k) \rightarrow \text{Kauzális LTIS}$$

$$h(n) = 0 \text{ ha } n < 0 \rightarrow \text{Kauzális LTIS}$$

Kauzális LTIS: $h(n)$ "Kauzális" jel, hiszen $n < 0$ esetén 0

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) x(k)$$

Kauzális LTIS Kauzális (belepő) bemenő jellel

$$x(n) = 0 \text{ ha } n < 0$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) = \sum_{k=0}^n h(k) x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n h(n-k) x(k) = \sum_{k=0}^n h(n-k) x(k)$$

BIBO stabil LTIS, kausalis

$$\exists M_x : |x(n)| < M_x \Rightarrow \exists M_y : |y(n)| < M_y \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \rightarrow \text{altalános rendszerek}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| \cdot |x(n-k)| \leq M_x \left(\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| \right)$$

ha $\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty$ akkor BIBO stabil az LTIS