9. Előadás

Digitális SP: elemi ~~erőfor~~ operációk $(T, \times, +)$ együttese

- HW
- SW

LTI kauzálisra: $y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(n-k)\,x(k)$

Mivel csak rekurzív szerkezetet tudunk megvalósítani

$\Rightarrow$ leírása diffegyenlettel:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i\, y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j\, x(n-j)$$

$$y(n) = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \lambda_i^N + y_p(n) \xrightarrow[\delta(n) = x(n)]{} h(n) = \sum_{i=1}^{N} c_i\, \lambda_i^n$$

jön ide? kell ezt a z-transzformált

Kanonikus alak:

Z transzformált:

$Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$, ROC $\rightarrow$ konvergenciatart.-t mindig meg kell adni, mert ezen értelmezési tart.-on belül konvergens

Speciális fv-ek Z-transzformáltja:

$x(n)$	$X(z)$
$\delta(n)$	1
$\varepsilon(n)$	$\frac{z}{z-1}$
$\varepsilon(n)\, a^n$	$\frac{z}{z-a}$
$\varepsilon(n) \cos n\omega$	$\frac{1}{2} \frac{z}{z-e^{-j\omega}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-e^{j\omega}}$

Z-transzformált tulajdonságai

1) Lineáris, homogén
(0 transzformáltja 0)

$$Z\{a x(n) + b y(n)\} = a X(z) + b Y(z)$$

Biz.: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a x(n) + b \cdot y(n)\right) \cdot z^{-n} = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n} =$

$$a X(z) + b Y(z)$$

2.) $\mathcal{Z}\{x(n-k)\} = z^{-k} \cdot X(z)$

<u>Biz.</u>: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k) z^{-n} \underset{\uparrow}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-(m+k)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} \cdot z^{-k} =$

$m := n-k$

$n = m+k$

$= z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot z^{-m}$

3.) $\mathcal{Z}\{a^n \cdot x(n)\} = X(a^{-1} z)$

<u>Biz.</u>: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) (z \cdot a^{-1})^{-n} = X(a^{-1} z)$

4.) $\mathcal{Z}\{n \cdot x(n)\} = -z \dfrac{dX(z)}{dz}$

<u>Biz.</u>: $\dfrac{dX(z)}{dz} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{d}{dz} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot (-n) z^{-n-1} =$

mindig ∃, mert egy gyűrűtartományon analitikus

$= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n x(n)) z^{-n} = -z^{-1} \cdot \mathcal{Z}\{n \cdot x(n)\}$

$\mathcal{Z}\{n x(n)\} = -z \dfrac{dX(z)}{dz}$

5.) $\mathcal{Z}\{x(n) * y(n)\} = X(z) \cdot Y(z)$

<u>Biz.</u>: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)\, y(k) \right) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)\, y(k)\, z^{-(n-k)} z^{-k} =$

$\underset{\uparrow}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(m)\, y(k)\, z^{-m} \cdot z^{-k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-m} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k) z^{-k} =$

$m = n-k$

$= X(z) \cdot Y(z)$

Adott $x(n) = \{3 \cdot (0{,}5)^n - 2{,}5(-0{,}2)^n\} \varepsilon(n)$

$X(z) = 3 \cdot \dfrac{z}{z-0{,}5} - 2{,}5 \cdot \dfrac{z}{z+0{,}2}$

Adott $x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \dots N-1 \\ 0 & \text{máshol} \end{cases}$ $\quad \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot z^{-n} = \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = \dfrac{z^N - 1}{z^N - z^{N-1}}$

$x(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-N)$

$X(z) = \dfrac{z}{z-1} - z^{-N} \dfrac{z}{z-1}$

Adott $x(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

$$x(n) = n \cdot \varepsilon(n) \xrightarrow{Z} \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\varepsilon(n) \rightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = -\frac{1}{(z-1)^2}$$

dott $Z = \{ n \cdot a^n \cdot \varepsilon(n) \}$

$$\frac{z}{(z-1)^2} \xrightarrow{z := z \cdot a^{-1}} \frac{z \cdot a^{-1}}{(z a^{-1} - 1)^2} = \frac{a}{(z-a)^2}$$

Inverz Z-transzformáció

$$x(n) \underset{Z^{-1}}{\overset{Z}{\rightleftarrows}} X(z)$$

Cauchy-féle integrálformula

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_G z^{n-1} dz = \delta_{n0} = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 0 \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_G z^{n-k-1} dz = \delta_{nk}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_G X(z) z^{n-1} dz$$

Biz.: $\frac{1}{2\pi j} \oint_G X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_G \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} z^{n-1} dz =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \underbrace{\frac{1}{2\pi j} \oint_G z^{n-k-1} dz}_{\delta_{kn}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta_{kn} = x(n)$$

Konstruktív módszerek:

1.) Táblázat megfordítása

$$Z^{-1}\left\{ 2 \frac{z}{z-1} + 3 \frac{z}{(z-1)^2} \right\} \Rightarrow 2\varepsilon(n) + 3n\varepsilon(n)$$

2.) $X(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{M} q_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} p_i z^{-i}} = x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + \ldots$

polinomosztás

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

3.) $X(z) = z \tilde{X}(z) = z \cdot \sum_i A_i \frac{z}{z-z_i} \xrightarrow{Z^{-1}} x(n) = \sum_i A_i z_i^n \varepsilon(n)$

$P(z_i) = 0 \rightarrow$ nevező gyökei (pólusok)

Parciális részlettörtekre bontás

$$X(z) = z \cdot \frac{Q(z)}{P(z)} \longrightarrow A_\ell = \frac{Q(z)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq \ell}}^{N} (z-z_i)}\Bigg|_{z=z_\ell}$$

$$z \cdot \frac{Q(z)}{\prod\limits_{i=1}^{N}(z-z_i)}$$

Pl.: $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{z^2-1{,}5\cdot z+0{,}5}\right\}$

1) $z_{1,2} = \frac{1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25-4\cdot 0{,}5}}{2} \nearrow 1 \searrow \frac{1}{2}$

$$z\,\frac{z}{(z-1)(z-0{,}5)}$$

2.) $A_1 = \frac{z}{z-0{,}5}\Big|_{z=1} = 2 \cdot 1 = 2$

$A_2 = \frac{z}{z-1}\Big|_{z=0{,}5} = -1$

$$X(z) = 2\cdot\frac{z}{z-1} - 1\,\frac{z}{z-0{,}5} \Rightarrow x(n) = 2\,\varepsilon(n) - (0{,}5)^n\,\varepsilon(n)$$

Pl.: $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}\right\}$

$$z\,\frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = z\left\{A_1\frac{1}{z+1} + A_3\frac{1}{z-1} + A_2\frac{1}{(z-1)^2}\right\}$$

$$A_1 = \frac{z^2}{(z-1)^2}\Big|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \frac{z^2}{z+1}\Big|_{z=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{z+1}\right)\Big|_{z=1} = \frac{2z(z+1)-z^2}{(z+1)^2}\Big|_{z=1} = \frac{z^2+2z}{(z+1)^2}\Big|_{z=1} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\,\frac{z}{z+1} + \frac{3}{4}\,\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\,\frac{z}{(z-1)^2}$$

$\frac{1}{4}(-1)^n\varepsilon(n) + \frac{3}{4}\,\varepsilon(n) + \frac{1}{2}\,n\,\varepsilon(n) \longrightarrow$ inverz Z-transzformált

Alkalmazás lineáris, rendszerekben (LTI)
+ időinvariáns

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)\,x(k) \longrightarrow Y(z) = H(z)\cdot X(z)$$

$H(z)$: átviteli fv.

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\sum_{i=0}^{N} a_i\, y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j\, x(n-j) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \left(\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}\right) Y(z) = \left(\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}\right) X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} = z^{N-M} \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{M-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{N-i}} = z^{N-M} \frac{B(z)}{A(z)}$$

$\Rightarrow H(z)$ racionális tört fv.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{ts}\, dt$$

10. Gyakorlat

$h(n) = \{1\ 0\ {-1}\ 0\}$

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

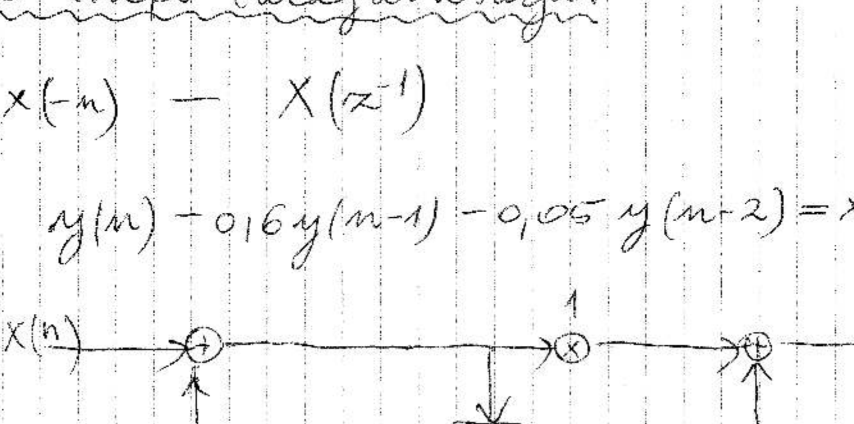
$1 \cdot e^0 + 0 \cdot e^{-j\omega} - 1\, e^{-2j\omega} + 0\, e^{-3j\omega}$

$1 z^0 + 0 \cdot z^{-1} - 1 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3}$

Z-trafó tulajdonságai

$x(-n) \quad — \quad X(z^{-1})$

$y(n) - 0{,}6\, y(n-1) - 0{,}05\, y(n-2) = x(n) - 1{,}1\, x(n-1)$



$Y(z) - 0{,}6\, z^{-1} Y(z) - 0{,}05\, z^{-2} Y(z) = X(z) - 1{,}1\, z^{-1} X(z)$

$Y(z)\left(z^0 - 0{,}6\, z^{-1} - 0{,}05\, z^{-2}\right) = X(z)\left(1 - 1{,}1 \cdot z^{-1}\right)$

$Q(z)\, Y(z) = P(z)\, X(z)$

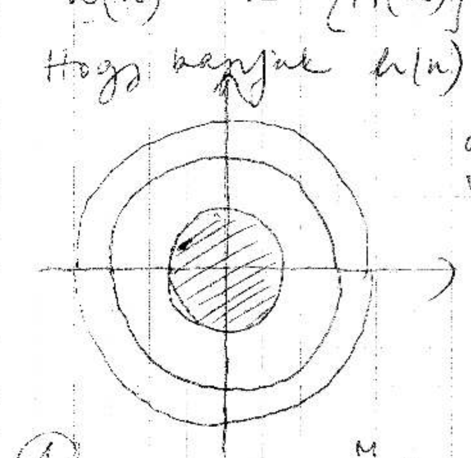
$y(n) = h(n) * x(n)$

$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \Longrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$

$$H(z) = \frac{1-1,1\cdot z^{-1}}{1-0,6z^{-1}-0,05z^{-2}} = \frac{z^2-1,1z}{z^2-0,6z-0,05}$$

$h(n) = Z^{-1}\{H(z)\}$ → ha csak belépő jelekkel dolgozunk ⇒ egyértelmű a konvergenciatart. (ROC)

Hogy kapjuk $h(n)$-t?



a legszűkebbet vesszük, mindig belül vagyunk

(1)

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)}{\prod_{j=1}^{N}(z-p_i)}$$ → pólusok, zérusok

$$z^2-0,6z-0,05=0$$

$$p_{1,2} = \frac{0,06 \pm \sqrt{0,36+0,2}}{2} = \begin{cases} 0,6742 \\ -0,0742 \end{cases}$$

$$H(z) = \frac{z^2-1,1z}{(z-0,6742)(z+0,0742)} = z\left(\frac{A_1}{(z-p_1)} + \frac{A_2}{(z-p_2)}\right)$$

azért kell kiemelni z-t, hogy utána ránézésre tudjunk z-transzformálni

$\neq$

$$= \boxed{\frac{z}{z-p_i}}A_1 + \boxed{\frac{z}{z-p_i}}A_2$$ → mert a DE mo-a a^n alakú lesz, aminek ez a Z-transzformáltja ⇒ ilyen alakra kell tudnunk hozni $H(z)$-t!

$$\frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} = \frac{A_1(z-p_2)+A_2(z-p_1)}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

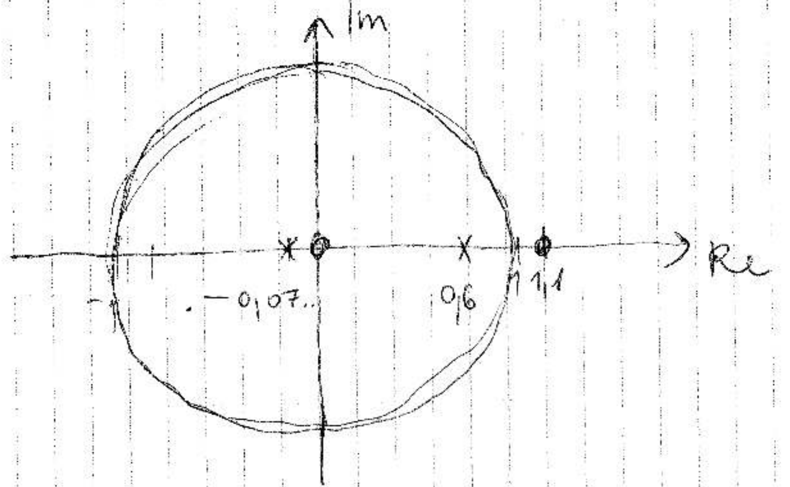
$$z-1,1 = A_1(z-p_2) + A_2(z-p_1)$$

$$z-1,1 = A_1z + A_2z - A_1p_2 - A_2p_1$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{z} &= A_1\cancel{z} + A_2\cancel{z} \\ -1,1 &= -A_1p_2 - A_2p_1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} A_1 &= -0,5689 \\ A_2 &= 1,5689 \end{aligned}$$

⇒ Megvannak az A_1, A_2, p_1, p_2 tagok

$$\frac{z}{z-p_1}A_1 + \frac{z}{z-p_2}A_2 = H(z) \xrightarrow{Z^{-1}\{\}} A_1 \cdot p_1^n \varepsilon(n) + A_2 p_2^n \varepsilon(n)$$



x - pólus
o - zérus

$$X(n) = \varepsilon(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$\downarrow$ egys.ugr.

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$Y(z) = \left(\frac{z}{z-p_1} A_1 + \frac{z}{z-p_2} A_2\right) \frac{z}{z-1} =$$

$$= \frac{z^3 - 1{,}1 z^2}{z^3 - 1{,}6 z^2 + 0{,}55 z + 0{,}05} = \frac{z^3 - 1{,}1 z^2}{(z-p_1)(z-p_2)(z-1)} =$$

$$= z \left(\frac{z^2 - 1{,}1 z}{(\ )(\ )(\ )} \right)$$

$$\left(\frac{A_1}{z-1}\right) + \left(\frac{A_2}{z-p_1}\right) + \left(\frac{A_3}{z-p_2}\right)$$

$$A_1 = \left. \frac{z^2 - 1{,}1}{(z-p_1)(z-p_2)} \right|_{z=1} = -0{,}2857$$

$$A_2 = \left. \frac{z^2 - 1{,}1}{(z-1)(z-p_2)} \right|_{z=p_1} = 1{,}1774$$

$$A_3 = \qquad = 0{,}1081$$

$$Y(z) = A_1 \cdot \frac{z}{z-1} + A_2 \cdot \frac{z}{z-p_1} + A_3 \frac{z}{z-p_2}$$

$\Downarrow z^{-1}\{\}$

$$y(n) = \varepsilon(n)\left(A_1 + A_2 \cdot p_1^n + A_3 \, p_2^n\right)$$

2) $y(n) - 0{,}4\, y(n-1) + 0{,}04\, y(n-2) = x(n) + x(n-2)$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - 0{,}4 z^{-1} + 0{,}04 z^{-2}}$$

A parc. törtekre bontás akkor alkalmazható, ha $\frac{P(z)}{Q(z)}$ $\deg(P(z)) < \deg(Q(z))$

fokszám

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = A(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}$$ → ilyet akarunk

$\deg(R(z)) < \deg(P(z))$

$$z^2 - 0{,}4 z + 0{,}04 \;\Big|\; \boxed{z^2} + 0 \cdot z^1 + 1 \quad 1$$

$$\ominus\; z^2 - 0{,}4 z + 0{,}04$$

$$0 + \boxed{0{,}4 z} + 0{,}96$$

1. $z^2 / z^2 \to 1$
2. $z^2 - 0{,}4 z$

$$H(z) = 1 + \frac{0{,}4 z + 0{,}96}{z^2 - 0{,}4 z + 0{,}04}$$ → ezt már lehet parciális részlettörtekre bontani

$$\Rightarrow \frac{0{,}4 z + 0{,}96}{(z - 0{,}2)^2} + 1$$

↘ többszörös gyök!

$$\frac{A_1}{z - 0{,}2} + \frac{A_2}{(z - 0{,}2)^2}$$ → kitakarjuk az ahhoz tartozó polinom-gyökös tagokat

$$A_2 = 0{,}4 z + 0{,}96 \Big|_{z=0{,}2} = 1{,}04$$

$$A_1 = \frac{d}{dz}(0{,}4 z + 0{,}96)\Big|_{z=0{,}2} = 0{,}4$$

$$H(z) = 1 + \frac{1{,}04}{(z-0{,}2)^2} + \frac{0{,}4}{z - 0{,}2} =$$

$$= 1 + \underbrace{1{,}04 \cdot z^{-2} \frac{z^2}{(z-0{,}2)^2}}_{5{,}2 \cdot z^{-1} \cdot \frac{0{,}2 z^{-1}}{(1 - 0{,}2 z^{-1})^2}} + 0{,}4 \cdot z^{-1} \cdot \frac{z}{z - 0{,}2}$$

$$(n-1)\, 0{,}2^{n-1}\, \varepsilon(n-1) \qquad 0{,}2^{n-1} \cdot \varepsilon(n-1)$$

Em. z-trafó ~ komplex hatv. sor

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad \& \quad ROC$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_G X(z) z^{n-1} dz \quad \longrightarrow \text{ parc. részlöntekre bontás}$$

1) $\mathcal{Z}\{\alpha x(n) + \beta y(n)\} = \alpha \cdot X(z) + \beta \cdot Y(z)$

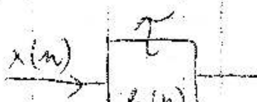
2) $\mathcal{Z}\{x(n-k)\} = z^{-k} X(z)$

3) $\mathcal{Z}\{a^n \cdot x(n)\} = X(a^{-1} z)$

4) $\mathcal{Z}\{n\, x(n)\} = -z \dfrac{dX(z)}{dz}$

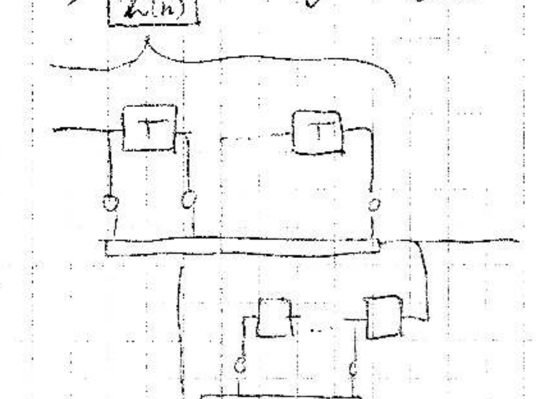
5) $\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k) y(k)\right\} = X(z) \cdot Y(z)$

Alkalmazás LTI rdsz-ekre:



$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k) h(k) \implies Y(z) = X(z) \cdot H(z)$

(átviteli fv / impulzusválasz fv.)



$$\sum_{i=0}^{M} a_i\, y(n-i) = \sum_{j=0}^{N} b_j\, x(n-j) \implies$$

$$\implies \sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i} \cdot Y(z) = \sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j} \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j \cdot z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} = \left(z^{N-M}\right) \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{M-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{N-i}} =$$

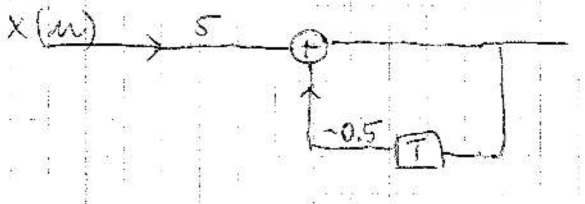
$$= \frac{B(z)}{A(z)} = \text{const.} \frac{\prod_j (z - z_j)}{\prod_i (z - z_i)}$$

zérus

pólus (szinguláris pontja van itt)

LTI: karakterizálható a pólusokkal és zérusokkal
→ leírható a pólus-zérus képpel

Pl.:



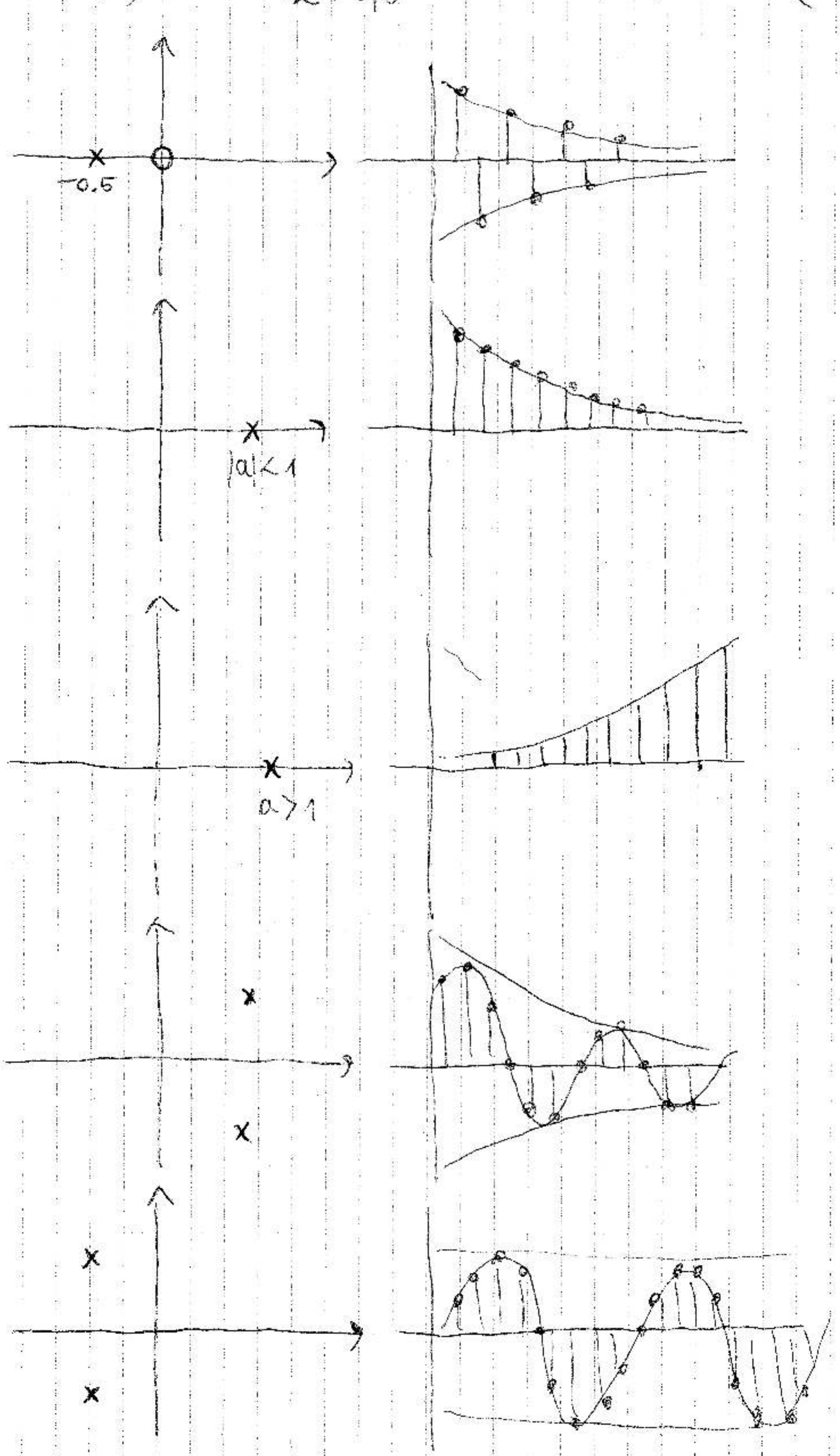
$$y(n) = 5x(n) - 0{,}5\, y(n-1)$$

$$Y(z)\left(1 + 0.5 z^{-1}\right) = 5 X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{5}{1 + 0.5 z^{-1}} = \frac{5z}{z + 0{,}5} \longrightarrow h(n) = 5(-0{,}5)^n \cdot \varepsilon(n)$$

LTI leírása pólus-zérus képpel

$$H(z) = 5 \cdot \frac{z}{z+0{,}5} \rightarrow h(n) = 5 \cdot (-0{,}5)^n \cdot \varepsilon(n)$$



$$DSP(LTI) \overset{Z}{\Longrightarrow} H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \Rightarrow H(z) = \text{const} \frac{\Pi(z-z_j)}{\Pi(z-z_i)} \Rightarrow$$

$\bar{a}, \bar{b}$ $\Rightarrow$ P-Z kép $\Rightarrow$ Dinamikus viselkedés