Dig Jel Kisnyári jegyzet / Képletek

$$2j\cdot\sin(\omega t) = e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}$$

$$2\cdot\cos(\omega t) = e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}$$

$$\begin{array}{ccc} h(n) & \longrightarrow & DFT/FFT \\ IDFT \uparrow & \downarrow DFT & \\ H(\omega) & \xrightarrow[m.v.]{} & H(\ell) \end{array}$$

$$DTFT: H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\cdot e^{-j\omega n}$$

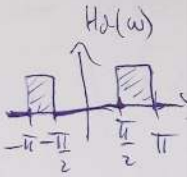
$$IDTFT: h(n) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)\cdot e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)\cdot z^{-n} \qquad Z\{u(n)\cdot \alpha^n\} = \frac{z}{z-\alpha} \quad \text{for: } |z| > |\alpha|$$

$$FIR: \underline{h} = \left[\tfrac{1}{4}\ 0\ \tfrac{1}{4}\ 0\right]$$

$$H(\omega) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot e^{-j\omega 2} = \frac{1}{2}\cdot e^{-j\omega}\left(\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right) = e^{-j\omega}\cdot\frac{\cos\omega}{2}$$

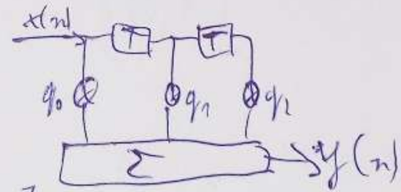
$$|H(\omega)| = \underbrace{\left|e^{-j\omega}\right|}_{=1}\cdot\left|\frac{\cos\omega}{2}\right|$$



FIR szűrő tervezés $[\pi/2; \pi]$ felüláteresztő, $N=3$. $h(n) = ?$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)\cdot e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{-\pi/2} e^{j\omega n}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\pi/2}^{\pi} e^{j\omega n}\,d\omega$$

$$\left.\begin{array}{l} h_d(-1) \rightarrow q(0) \\ h_d(0) \rightarrow q(1) \\ h_d(1) \rightarrow q(2) \end{array}\right\} \text{ eltolás } \text{-k.}$$



$$\underline{h} = [q_0\ \ q_1\ \ q_2]$$
$$\uparrow$$

Spektrálanalízis (DFT, FFT)

$x(t) \to \boxed{\text{Sp.}} \to X(\omega)$

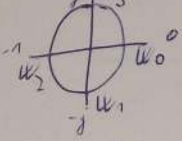
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\text{DTFT: } X_d(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega)=H(\omega)\cdot X_d(\omega)$$

$h(n)=[1/4\ \ 1/4\ \ 1/4\ \ \frac{1}{4}]$ Számolja ki az imp. válasz DFT-jét FFT segítségével. lépésben.

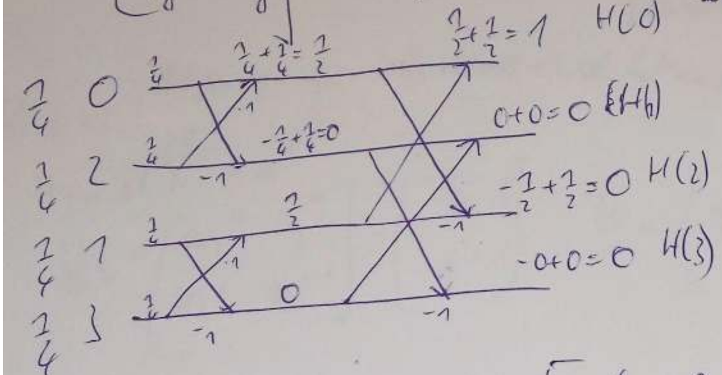
$$W_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}$$



(összeadás, lépés) $(\underline{W}_{ij}=W^{i\cdot j})$ elem szorzás sorrendje

0 –
2 –
1 –
3 –

↳ a bemenetek megfordításánál (indexek)



Sor-oszlopszorzás van egységgyök.

$$\text{DFT: } \underline{W}_N\cdot \underline{x}_N=\underline{X}_N \Rightarrow \begin{bmatrix}W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0\\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \\ \vdots & & W_N^n & \\ W_N^0 & & & W_N^{(n-1)^2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(0)\\ x(1)\\ x(2)\\ \vdots\\ x(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X(\\ X(\\ \\ X\end{bmatrix}$$

↑ bemenet.

DIGJELVIZSGA, 40 2014.06.04.

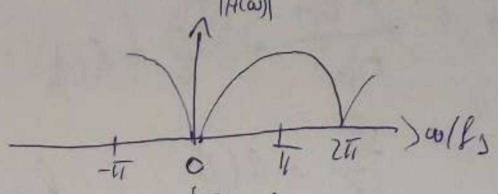
1.) $h(n) = [1 \; -1]$ impulzusválaszú szűrő.

1/a.) Adja meg a szűrő $H(f)$ átviteli karakterisztikáját! Milyen jellegű ez a szűrő?

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\cdot e^{-j\omega n} = 1 - e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\omega/2}\right) =$$

$$= e^{-j\omega/2}\cdot 2j\cdot \sin\frac{\omega}{2} = e^{-j\omega/2}\cdot 2j\cdot\sin\frac{\omega}{2}$$

$$|H(\omega)| = 2\cdot\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|$$



felüláteresztő.

Adja meg a szűrő $H(k)$ mintavett átviteli karakterisztikát $N=2$, $N=4$, $N=8$ pontos DFT-

1/b.) $N=2$

$$W_2 = e^{-j\frac{2\pi}{2}} = e^{-j\pi}$$

$$\underline{\underline{W}}_2 = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^{1\cdot 1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad \underline{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\end{pmatrix}$$

$N=2$

$$W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{\underline{W}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j\end{pmatrix} \qquad \underline{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{W}}_4\cdot\underline{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+j \\ 2 \\ 1-j\end{pmatrix}$$

...15/1. VIZSGA/ 1. LAP

...GJEL VIZSGA MO/ 2016. 06. 04. 8 pontos DFT

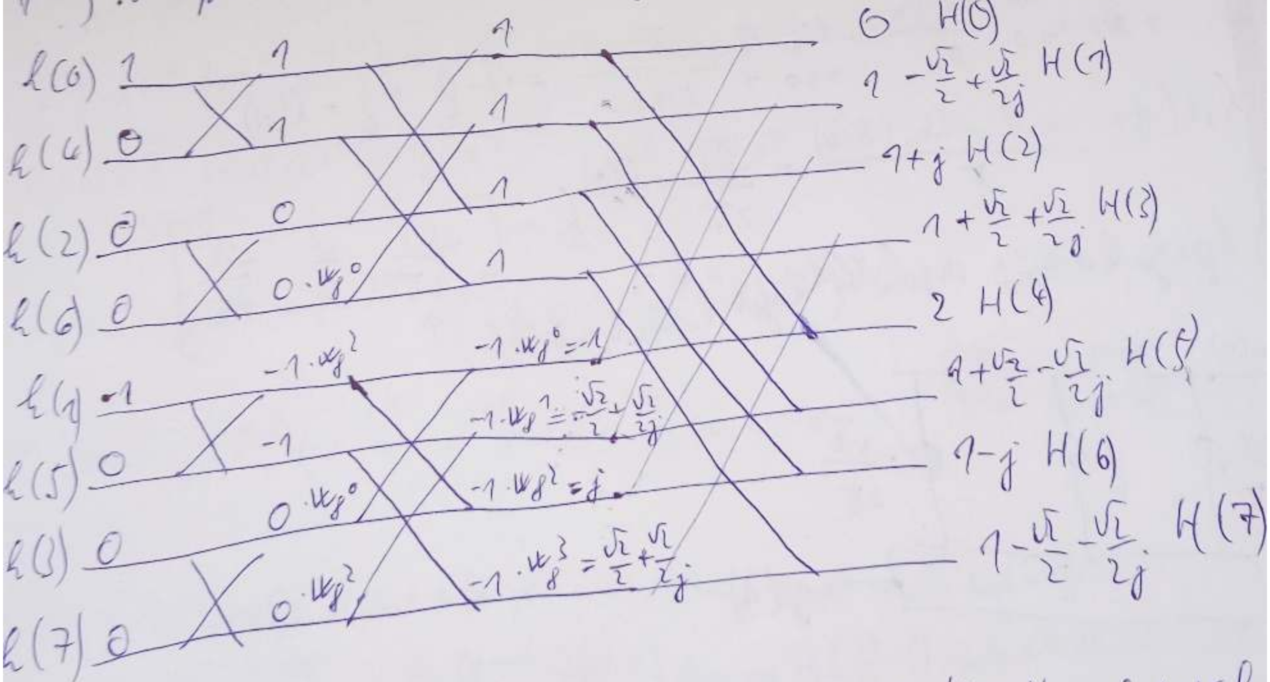
...e feladat N=8

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{W}}_8 \cdot \underline{h} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j & \\ 1 & -j & \cdots \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j & \\ 1 & -1 & \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j & \\ 1 & j & \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j \\ 1+j \\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j \\ 2 \\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j \\ 1-j \\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j \end{pmatrix}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j$

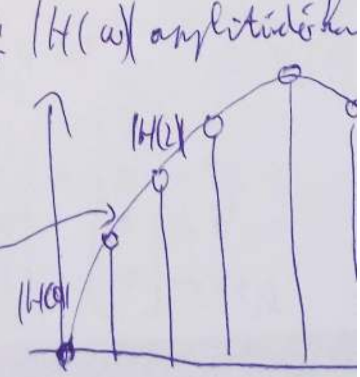
(1,2,4... részen rajzolt a ...)

1/c.) N=8 pontos DFT-je kiszámítását mutassa meg az FFT kapcsolásán a részeredményekkel.



1/d.) Adja meg a rel. frekv. tart-n rajzolja le a mért |H(ω)| amplitúdó... felhasználásával együtt |H(k)| mintavett amplitúdó karakterisztikát.

$$|H(\omega)| = 2\left|\cos\frac{\omega}{2}\right|$$



$-\pi/4$ $\qquad$ $\pi/4$

3 fokszámú FIR szűrő tervezése ablakozással.

(a) Adja meg a ~~(ideális)~~ $[\pi/4, \pi]$ sáv. hatv. tat-n ideális felüláteresztő szűrő derékszögű ablakfv-el vett közelítésének impulzusválasz fv-ét, $J=3$ esetén.

$[\pi/4, \pi]$ ideális felüláteresztő, $J=3$.

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega n}}{jn}\right]_{-\pi}^{-\pi/4} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega n}}{jn}\right]_{\pi/4}^{\pi}$$

$$h_d(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)\cdot e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/4} e^{j\omega n}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi} e^{j\omega n}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\pi n} + e^{j\pi n} - e^{j\frac{\pi}{4}n}}{jn} = \frac{(\sin \pi n - \sin \frac{\pi}{4} n)\cancel{2j}}{\pi n \cdot \cancel{2j}}$$

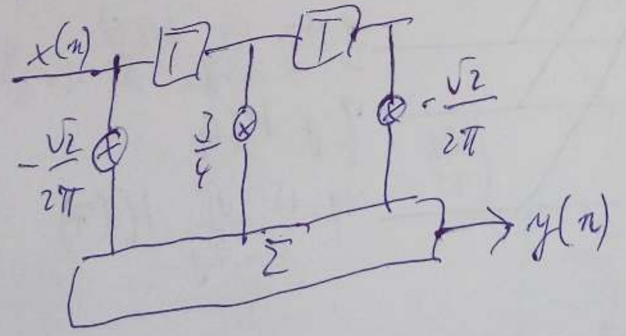
$$h_d(-1) = \frac{\sin -\pi - \sin \frac{-\pi}{4}}{-\pi} = \frac{-\sqrt{2}}{2\pi} = h(0)$$

$$h_d(0) = \lim_{n\to 0}\frac{\sin \pi n}{\pi n} - \lim_{n\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin \pi/4 \cdot n}{\pi/4\, n} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = h(1)$$

$$h_d(1) = \frac{\sin \pi - \sin(\pi/4)}{\pi} = \frac{-\sqrt{2}}{2\pi} = h(2)$$

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \end{bmatrix}$$

b.) Rajzolja a szűrő realizációját késleltetőkkel.



$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{e^{j\omega n}}{jn} \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{\pi n 2j} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}$$

rel. [illegible]

$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ideális alul át.

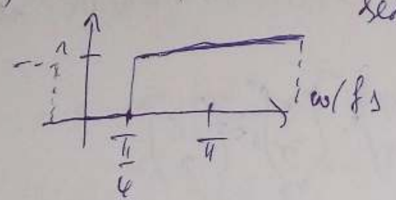
$J = 3$

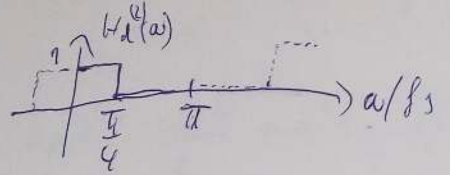
$$h_d(-1) = \frac{\sin\frac{-\pi}{4}}{-\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} = h(0)$$

$$h_d(0) = \lim_{n \to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi/4n} = \frac{1}{4} = h(1)$$

$$h_d(1) = \frac{\sin\pi/4}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} = h(2) \qquad \underline{h} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \end{bmatrix}$$

d.) $H_d(\omega)^{(1)}$ Mi történik, ha a 2 szűrőt sorba kapcsoljuk? Milyen lenne az ideális szűrő átviteli karakterisztika, ill. impulzusválasza? Ebben képest milyen lesz a) és c) szűrő sorba kapcs. szűrő impulzusválasza?





$H_e(\omega) = H_d^{(1)}(\omega) \cdot H_d^{(2)}(\omega) = 0$, ekkor nem engedi át a bemenetet, azonnal 0 kimenetet ad. $(\to h_e(\omega) = 0)$

$$h_e(n) = h^{(1)}(n) * h^{(2)}(n)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \end{pmatrix}$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2\pi} \quad \frac{3}{4} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$$

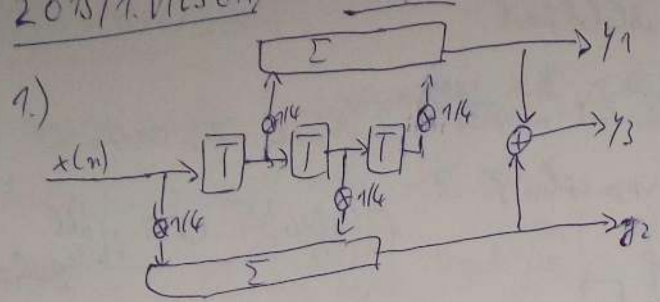
$$\frac{3}{4} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2\pi^2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{8\pi} - \frac{\sqrt{2}}{8\pi} = \sqrt{2}/4\pi \\ \frac{3}{16} - \frac{1}{\pi^2} \\ \sqrt{2}/4\pi \\ -1/2\pi^2 \end{bmatrix}$$

$0] \quad [1/4] \quad [0] \to \pi \cdot 3/2$

2015/1. VIZSGA   1. LAP

1.)



$$\boxed{e^{-j\omega t}+e^{j\omega t}=2\cdot\cos(\omega t)}$$

$$\boxed{-e^{-j\omega t}+e^{j\omega t}=2j\cdot\sin(\omega t)}$$

a.) Adja meg $H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$ és $H_3(\omega)$ átviteli karakterisztikáját.

$h_1(n)=1/4\,\delta(n-1)+1/4\,\delta(n-3)$

$h_2(n)=1/4\,\delta(n)+1/4\,\delta(n-2)$

$h_3(n)=h_1(n)+h_2(n)=1/4\,\delta(n)+1/4\,\delta(n-1)+1/4\,\delta(n-2)+1/4\,\delta(n-3)$

$$H_1(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_1(n)\cdot e^{-j\omega n}=\cancel{\left(\frac{1}{4}e^{-j\omega 0}+1/4\,e^{-j\omega 2}=\frac{1}{4}+1/4\,e^{-j\omega 2}\right)}\ \frac{1}{4}e^{-j\omega 1}+\frac{1}{4}\cdot e^{-j\omega 3}=$$

$$=e^{-2j\omega}\cdot\frac{\cos\omega}{2}\Rightarrow\left|\frac{\cos\omega}{2}\right|$$

$$H_2(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_2(n)\cdot e^{-j\omega n}=\frac{1}{4}\cdot e^{-j\omega 0}+\frac{1}{4}\cdot e^{-j\omega 2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot e^{-j\omega 2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{-j\omega}\cdot\left(\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}\right)=e^{-j\omega}\cdot\frac{\cos\omega}{2}\Rightarrow|\cos\omega/2|=|H_2(\omega)|$$

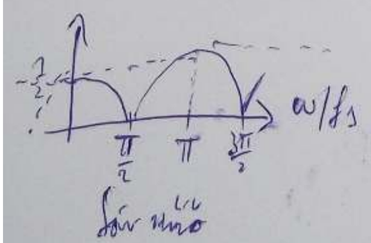
$$H_3(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_3(n)\cdot e^{-j\omega n}=\frac{1}{4}\cdot e^{-j\omega 0}+\frac{1}{4}\cdot e^{-j\omega 1}+\frac{1}{4}\cdot e^{-j\omega 2}+\frac{1}{4}\cdot e^{-j\omega 3}=$$

$$=e^{-j\omega}\cdot\frac{\cos\omega}{2}+e^{-2j\omega}\cdot\frac{\cos\omega}{2}=\frac{\cos\omega}{2}\left(e^{-j\omega}+e^{-2j\omega}\right)=$$

$$=\frac{\cos\omega}{2}\cdot e^{-j\omega 3/2}\left(e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2}\right)=e^{-j\omega 3/2}\cdot\cos\omega\cdot\cos\frac{\omega}{2}\Rightarrow H_3(\omega)=|\cos\omega|\,|\cos\frac{\omega}{2}|$$

b.) $H_n(\omega)$-k karakterisztikája alapján milyen jellegűek. (szűrő [illegible])

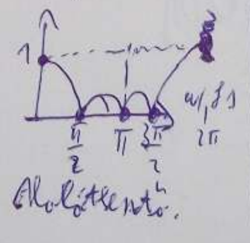
$|H_1(\omega)|$, $|H_2(\omega)|=\dfrac{\cos\omega}{2}$



Sáv záró

$|H_3(k)|$ [illegible] pontok

$|H_3(\omega)|$ [illegible]



Aluláteresztő.

c.) Adja meg $H_3\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$ mintavett átviteli karakterisztikáját. $k=0,1,2,3$ $W_4\cdot h_3=H_3$ $N=4$ Abs. $H_3(k)$

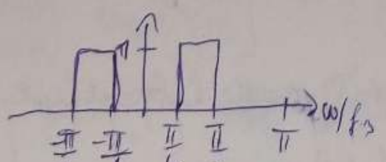
$$\underset{W_4}{\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}}\cdot\underset{h_3}{\begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{bmatrix}}=\underset{H_3}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}}\begin{matrix}\to 0\\\to\pi/2\\\to\pi\\\to\pi\cdot 3/2\end{matrix}$$

2.) 3 fokszámú FIR szűrő tervezés ablakolással.

a.) Adja meg a $[\pi/4, \pi/2]$ relatív frekv. tart-n ideális sáváteresztő szűrő derékszögű ablak fv-el, $J=3$ -ra ett kialakításnál imp válasz fv-ét.

MINDIG $\boxed{-\pi\text{-től } \pi\text{-ig}}$ kell integrálni.

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $J=3$



$J=3 \rightarrow n=-1,0,1$

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)\cdot e^{j\omega n}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} H_d(\omega)\cdot e^{j\omega n}\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} H_d(\omega)\cdot e^{j\omega n}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi/2}^{-\pi/4} 1\cdot e^{j\omega n}\,d\omega+\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2} 1\cdot e^{j\omega n}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{e^{j\omega n}}{jn}\right]_{-\pi/2}^{-\pi/4}+\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{e^{j\omega n}}{jn}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}n}-e^{-j\frac{\pi}{2}n}+e^{j\frac{\pi}{2}n}-e^{j\frac{\pi}{4}n}}{jn}=\frac{\sin \pi/2\, n-\sin \pi/4\, n}{\pi n}=h_d(n)$$

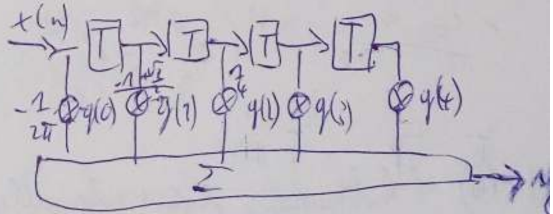
$$h_d(0)=\frac{\sin \pi/2\cdot 0-\sin \pi/4\cdot 0}{\pi\cdot 0}=\lim_{n\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{(\pi/2)n}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin \pi/4}{(\pi/4)n}\right\}=1/4=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$h_d(-1)=\frac{\sin -\pi/2-\sin -\pi/4}{-\pi}=\frac{-1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\pi}\qquad h_d(1)=\cancel{\sin}-\frac{1}{2\pi}=q(3)$$

$h_d(2)=q(4)$

$h_d(-2)=q(0)$, $h_d(-1)=q(1)$ $h_d(0)=q(2)$

b.) Rajzolja le a szűrő architektúrát konkrét súlyokkal



c.) Adja meg a megvalósított szűrő $|H(k)|$ mintavett amplitúdó karakterisztikáját FFT-v

$\underline{H}=\underline{\underline{W_4}}\cdot\underline{h}$ $\qquad \underline{h}=[h_d(-1), h_d(0), h_d(1), h_d(2)]$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&1\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\pi}\\ \frac{1}{4}\\ (-1+\sqrt{2}/2)/-\pi\\ 0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\leftarrow h_d(-1)\\ = \ldots\\ \leftarrow h_d(0)\\ \leftarrow h_d(1)\\ \leftarrow 0\end{array}$$

2015/1. VIZSGA/ 2. LAP

3.) Adaptív, prediktív tömörítés esetén egy x_ℓ-ed részletlen felj. auto.kov. fv-e:

$R(l) = E\{x_\ell \, x_{\ell-l}\} = a^{|l|}$, ahol $|a|<1$

a) $w_{opt} = ?$ Mi legyen a másodfokú prediktor w_{opt} optimális súlyegyüttható vektora

$$R = \begin{bmatrix} R(0) & R(1) \\ R(1) & R(0) \end{bmatrix} \quad w_{opt} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \end{bmatrix}$$

$$R \cdot w_{opt} \overset{!}{=} r$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}; \; r = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \quad w_{opt} = R^{-1} \cdot r$$

$$w_{opt} = \frac{1}{1-a^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ a^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-a^2} \cdot \begin{bmatrix} a - a^3 \\ -a^2 + a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \cdot w_1 + a \cdot w_2 = a \,/\cdot a \\ a \cdot w_1 + w_2 = a^2 \end{pmatrix}$$

b) Mekkora $E\{x_\ell^2\} / E\{\varepsilon_\ell^2\}$ predikciós nyereség? Mely a esetén a legnagyobb?

$$E[\varepsilon_\ell^2] = E[x_\ell^2] + w^T \cdot R \cdot w - 2 r^T \cdot w \qquad (R \cdot w_{opt} = r)$$

$$\min E[\varepsilon_\ell^2] = E[x_\ell^2] - r^T \cdot w = 1 - [a \; a^2] \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = 1 - a^2$$

$E[x_\ell^2] / E[\varepsilon_\ell^2] = 1/1-a^2 \Rightarrow$ 1-nél a legnagyobb $\Big|$ $\dfrac{E(x_\ell^2)}{E(\varepsilon_\ell^2)} = \dfrac{1}{1-a^2} \Rightarrow a = 1$-nél legn.

c.) Adja meg a Robbins-Monro approximáció konkrét setre vonatk. alakját.

Most: $w_l(\ell+1) = w_l(\ell) - \Delta\{x_\ell - (w_1(\ell) \cdot x_{\ell-1} + w_2(\ell) \cdot x_{\ell-2})\} \cdot x_{\ell-l}$ $(l = 1, 2)$

ált: $w_l(\ell+1) = w_l(\ell) - \Delta \left\{ \sum_{j=0}^{J} w_j \cdot x_{\ell-j} - d_\ell \right\} \cdot x_{\ell-l}$

d.) adaptív: alkalmazható.

2015/2.) VIZSGA (2015.06.10) 1.LAP

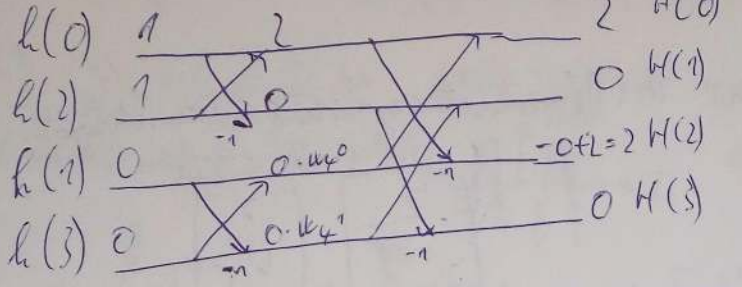
1.) $\underline{h} = [1\ 0\ 1]$

Számolja ki: mátrix-vektor szorzással.

a.) kell N=4 pontos DFT

$$\underline{H} = \underline{\underline{W}} \cdot \underline{h} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

FFT lepkéken számítással.



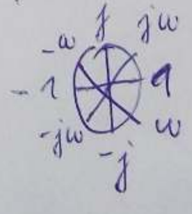
b.) számolja ki mx-vektor szorzással N=8 pontos DFT-jét + FFT lepkén számítással.

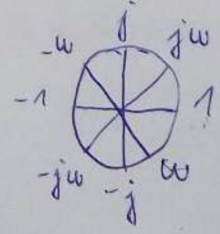
[a 0 0 0]

ez a 2 sor kell

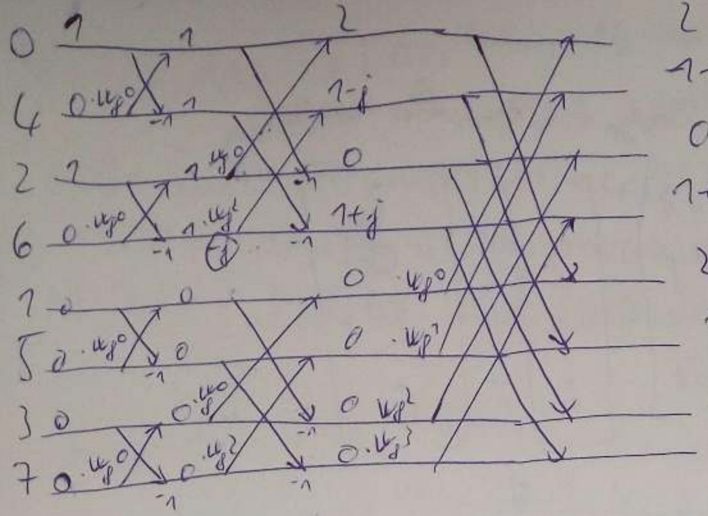
$$H = \underline{\underline{W}} \cdot \underline{h} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & -j & -j\omega & -1 & -\omega & j & j\omega \\ 1 & -j & -1 & & & & & \\ 1 & & -j & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & \\ 1 & & -j & & & & & \\ 1 & & -1 & & & & & \\ 1 & j & j & & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-j \\ 0 \\ 1+j \\ 2 \\ 1-j \\ 0 \\ 1+j \end{bmatrix}$$

$\rightarrow W_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = \omega$



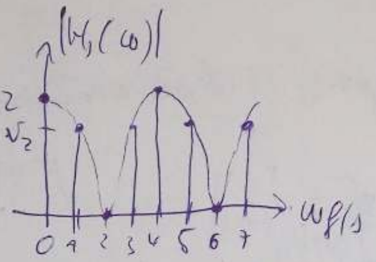


$N=8$ pontos FFT lepke $W_8^0=1$; $W_8^2=-j$



2	$H(0)$
$1-j$	$H(1)$
0	$H(2)$
$1+j$	$H(3)$
2	$H(4)$
$1-j$	$H(5)$
0	$H(6)$
$1+j$	$H(7)$

c.) az előző feladatban megad., legyen $|H(k)|$ mintavett amplitúdó karakterisztikáját. Milyen jellegű a szűrő?



SÁVZÁRÓ!!

abs. értékek

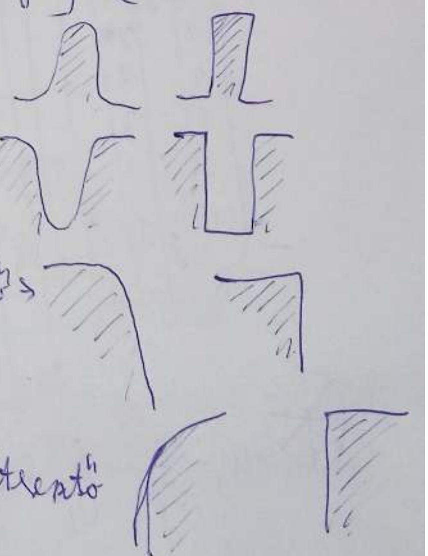
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1-j \\ 0 \\ 1+j \\ 2 \\ 1-j \\ 0 \\ 1+j \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

sáváteresztő ⇒

sávzáró ⇒

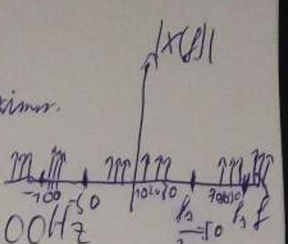
aluláteresztő ⇒

felüláteresztő



2015/2) VIZSGA 2. LAP

2.) Szűrőtervezés. a $[0,\pi]$ tartományt elég vizsgálni, mert periodikus a számos.



$$f_1 = 10Hz \quad f_2 = 20Hz \quad f_3 = 30Hz$$

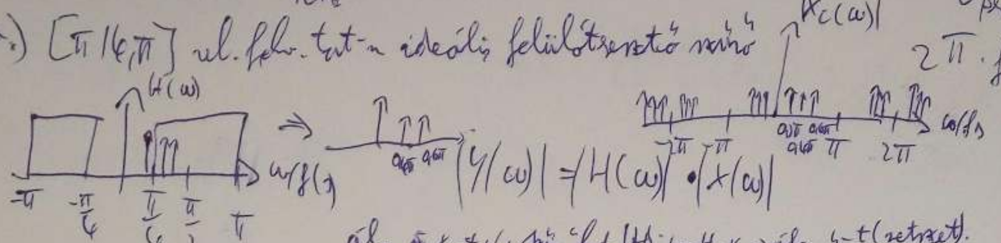
$$x(t) = \sin(2\pi 10 t) - \sin(2\pi 20 t) + \cos(2\pi 30 t) \qquad f_s = 100Hz$$

ω/f_s tart-ba $\to$ $10Hz \to \frac{2\pi}{10Hz} = 0{,}2\pi$; $20Hz \to 0{,}4\pi$; $30Hz \to 0{,}6\pi$

mintavétel → periodikus

$$2\pi \cdot f_s = 200\pi$$

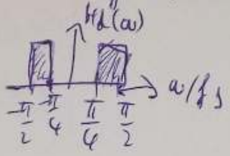
a.) $[\pi/4, \pi]$ sel. fekv. tart-n ideális felüláteresztő szűrő



$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| \cdot |X(\omega)|$$

ált. x-t v, színhat (H); $y = H \cdot x$ → ált. y-t (setrest).

b.) $[\pi/4, \pi/2]$ sel. fekv. tart-n ideális sáváteresztő szűrő derékszögű ablakfv-el vett közelítésével imp. válasz fv-e. $T = 3$ esetén.

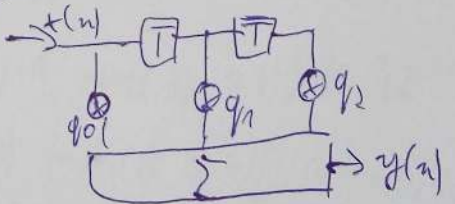


$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega n}}{jn}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega n}}{jn}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\frac{\pi}{2}n} - e^{j\frac{\pi}{4}n}}{jn} = \frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{2}n - \sin\frac{\pi}{4}n\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\frac{\pi}{2}n} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\frac{\pi}{4}n}$$



$$h_d(-1) = \frac{-\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4}}{-\pi} = \frac{-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\pi} \to q_0$$

$$h_d(0) = 1/4 \to q_1$$

$$h_d(1) = \frac{\sin\pi/2 - \sin\pi/4}{\pi} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi} \to q_2$$

C.) $H(\ell)$ kiszámítása gyors. FFT + FFT lépésszám-összehasonlítás.

DTFT → $G(\omega)$

$N = 4$ DFT → $G(\ell)$

$\underline{G} = [0{,}436 \quad -\frac{1}{4}$

$-0{,}064$

2015/2.) VIZSGA

3. LAP

3.) adaptív $\mu = 1$ $E\{d_\ell^2\} = 1$

$E\{d_\ell x_\ell\} = 0{,}64$ $\qquad w_{opt} = ?$

$E\{d_\ell x_{\ell-1}\} = 0{,}55$

$E\{x_\ell^2\} = 1$ $\qquad \min E[\varepsilon_\ell^2] = E\{x_\ell^2\} - 2\underline{r}^T \cdot \underline{w} + \underline{w}^T \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{w}$

$E\{x_\ell \cdot x_{\ell-1}\} = 0{,}7$

$\underline{\underline{R}} \cdot \underline{w}_{opt} = r \Rightarrow \underline{w}_{opt} = \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{r}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}7 \\ 0{,}7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}64 \\ 0{,}55 \end{bmatrix}$$

b.) $x_\ell = 1$ $\quad x_{\ell-1} = 0{,}6$ $\quad x_{\ell-2} = 0{,}4$ ← bemenetek

$d_\ell = 1{,}2$ $\quad d_{\ell-1} = 0{,}3$ $\quad d_{\ell-2} = 0{,}1$ ← kimenetek $\quad \mu = 1$

HA $w(0) = [0\ 0]^T$, akkor KELL: $\underline{w}(1)$ együtthatóvektor. (első iteráció után)

$$w_\ell(\ell+1) = w_\ell(\ell) + \mu \cdot \left\{ d_\ell - \sum_{j=0}^{J} w_j \cdot x_{\ell-j} \right\} x_{\ell-\ell} \qquad \ell = 0 \dots J$$

$$w_0(1) = w_0(0) + 1 \cdot \{1{,}2 - (w_0(0) \cdot 1 + w_1(0) \cdot 0{,}6)\} \cdot 1 = 1{,}2$$

$$w_1(1) = w_1(0) + \{1{,}2 - (w_0(0) \cdot 1 + w_1(0) \cdot 0{,}6)\} \cdot 0{,}6 = 0{,}72$$

c.) w_{opt} és $w(1)$ esetén a minimális négyzetes hiba?

$$J(w_{opt}) = \underbrace{E\{d_\ell^2\}}_{=1} - \underline{r}^T \cdot \underline{w}_{opt} = 0{,}57$$

min. négyz. hiba

$$J(w(1)) = 1 - 2 \cdot \underline{r}^T \cdot \underline{w}(1) + w^T(1) \cdot \underline{\underline{R}} \cdot w(1) = 0{,}9692$$