

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar

BME MIT Tanszéki Munkaközösség

DIGITÁLIS JELFELDOLGOZÁS

Segédlet a „Digitális jelfeldolgozás” (BMEVIMM4084) tárgyhoz

MIT-VIMM4084-01

Kézirat, kizárólag a BME hallgatóinak használatára
2008. szeptember 17.

Szerzők:

Balogh László és dr. Kollár István: 3. fejezet

Dr. Kollár István: 1.4., 1.5., 2., 7.2.3., 7.3. (al)fejezetek, 1a-c melléletek

Dr. Péceli Gábor előadásai alapján írta **dr. Németh József:** 1.1., 1.2., 1.3., 4., 5., 7., 8. (al)fejezetek

Dr. Sujbert László: 6. fejezet

A 1., 4.-5., 7.-8. fejezetek ábráinak megrajzolásában közreműködött **Vargha Balázs**, a 2.-4., 6. és 7. fejezetek ábráinak elkészítésében **Bank Balázs**.

© Balogh László, Kollár István, Németh József, Péceli Gábor, Sujbert László, 2000-2008

Közzéteszi: BME Méréstechnika és Információs Rendszerek Tanszék

MIT-VIMM4084-01, 2008. szeptember 17.

Csak belső használatra, a BMEVIMM4084 (Digitális jelfeldolgozás) tárgyhoz.

Nyomtatás: Műegyetemi Kiadó

Terjedelem: 171 oldal

Tartalomjegyzék

Előszó	6
1. A mérési eljárások koncepcionális alapjai	7
1.1. Jel és rendszer a mérési eljárásban	7
1.2. A modellalkotás célja és alapfogalmai	7
1.3. Modell a mérési eljárásban	8
1.4. Modellillesztés, paraméterbecslés	10
1.5. A jelek csoportosítása és leírása	11
1.5.1. Determinisztikus jelek	12
1.5.2. Sztochasztikus jelek	17
1a. Melléklet: A Dirac-impulzus	25
1b. Melléklet: Valószínűségi változók második momentuma	26
1c. Melléklet: Komplex normális valószínűségi változók	27
2. Mintavételezés	29
2.1. Analóg jelek digitális reprezentációja	29
2.2. Mintavételezés az időtartományban	29
2.3. Az időfüggvény helyreállítása	33
2.4. Mintavételezés a frekvenciatartományban	34
2.5. A közelítő mintavételi tétel	35
2.6. A DFT, interpoláció FFT segítségével	35
2.7. Sztochasztikus jelek mintavételezése	37
2.8. Sávkorlátozott jelek mintavételezése	37
2.9. Alul- és túlmintavételezés	39
3. Kvantálás	41
3.1. A kvantálási hiba vizsgálata	42
3.2. A kvantáló kimenete	43
3.3. A kvantálás és az additív zajmodell összehasonlítása	48
3.4. Kvantálási tételek	49
3.4.1. A kvantált jel visszaállítása	50
3.5. Sheppard-korrektciók, a momentumok torzítása	50
3.5.1. Dither használata	52
3.6. A fehér zajspektrum feltétele	53
3.7. Néhány kiegészítő megjegyzés	54

4. Átlagolási eljárások	55
4.1. Ideális átlagolás	56
4.1.1. Rekurzív kiszámítás	56
4.1.2. Predikciós-korrekciós alak	56
4.1.3. Az alkalmazott jelölések	57
4.1.4. Az ideális átlagolás tulajdonságai	58
4.2. Exponenciális átlagolás	59
4.3. Csúszóablakos vagy mozgó átlagolás	61
4.4. Frekvenciatartománybeli jellemzés	61
4.4.1. Egyenletes mintavételezés, harmonikus-analízis	62
4.4.2. Átviteli karakterisztika, átviteli függvény	62
4.4.3. Két egyszerű példa	63
4.5. A mozgó átlagolás frekvenciatartománybeli jellemzése	65
4.5.1. A mozgó átlagolás átviteli függvénye	65
4.5.2. A mozgó átlagolás amplitúdó-karakterisztikája	66
4.5.3. A mozgó átlagolás fáziskarakterisztikája	66
4.5.4. A mozgó átlagolás szelektivitása, alkalmazása	66
4.5.5. A mozgó átlagolás pólus-zérus képe	68
4.6. Az exponenciális átlagolás a frekvenciatartományban	70
4.6.1. Átviteli függvény, amplitúdó-karakterisztika, pólus-zérus kép	70
4.6.2. Általánosítás az ideális átlagolásra	70
5. Rekurzív DFT, a megfigyelőelmélet alapjai	72
5.1. Bevezetés	72
5.2. DFT szűrő és DFT sorfejtő	73
5.2.1. Fésűs szűrő	73
5.2.2. DFT szűrő	73
5.2.3. Megvalósítás valós együtthatójú, másodfokú rezonátortagokkal	77
5.2.4. DFT sorfejtés, jelspektrum áthelyezése	79
5.3. A DFT alkalmazása spektrumbecsléshez	81
5.3.1. FFT-analizátor	81
5.3.2. Sávselektív Fourier transzformációs eljárás	83
5.4. A modell beépülése a mérési eljárásba	85
5.4.1. Jelmodell és modellkópia	85
5.4.2. Megfigyelő tervezése lineáris rendszerhez	86
5.4.3. Véges lépésben konvergáló megfigyelő	87
5.4.4. A megfigyelőelmélet alkalmazása	89
5.5. A DFT szűrő megfigyelő alakban	89
5.5.1. Az „egyenértékűség” bizonyítása	90
5.5.2. Általánosítás másfajta szűrőkre	92
5.5.3. A DFT szűrő és a megfigyelő alak összehasonlítása	93

6. Digitális szűrők	95
6.1. Bevezetés	95
6.2. IIR szűrők tervezése	97
6.3. FIR szűrők tervezése	104
6.4. Gyakorlati kérdések	108
7. Átlagolási eljárások, ablakozás	112
7.1. Bevezető	112
7.2. Az átlagolások statisztikai jellemzése	113
7.2.1. Várható érték	113
7.2.2. Variancia	115
7.2.3. Korrelált minták átlagolása	118
7.3. A DFT tulajdonságai, a periodogram	122
7.3.1. A periodogram	125
7.3.2. A korrelációbecslő varianciája	129
7.4. Ablakozási eljárások	130
7.4.1. Spektrumszivárgás és picket fence jelenség	131
7.4.2. Ablakozás	134
8. Modellillesztés	138
8.1. Bevezető	138
8.1.1. A fejezet tartalma	139
8.2. Regresszió-számítás	140
8.2.1. Regresszió-számítás teljesen specifikált statisztikai jellemzőkkel	141
8.2.2. Regresszió-számítás részben specifikált statisztikai jellemzőkkel	142
8.3. Adaptív lineáris kombinátor	144
8.4. Iteratív modellillesztés	150
8.4.1. Newton módszer	151
8.4.2. A legmeredekebb lejtő módszere	151
8.4.3. Az \mathbf{R} mátrix diagonalizálása; a szélsőérték-keresés konvergenciájának vizsgálata	153
8.4.4. LMS módszer	158
8.4.5. Kombinált módszerek	161
8.5. Általánosabb kritériumfüggvény Taylor sorfejtése	162
8.5.1. Modellillesztés a Taylor-sorfejtett kritériumfüggvény alapján	163
8.6. Adaptív végtelen impulzusválaszú rendszerek	163
8.6.1. Visszavezetés FIR problémára (EE)	165
8.6.2. A kimeneti hibán alapuló modellillesztések (OE)	166
Irodalomjegyzék	169

Előszó

A segédlet egy majdani jegyzet előzetes kézírata. Ezért az ábrák egy része még gyenge minőségű, és a gondos ellenőrzés ellenére lesznek még elgépelések, sajtóhibák. Kérjük, hogy aki ilyeneket talál, akár a kézzel javított példánnyal, akár email-en keresse meg Kollár Istvánt (Informatika épület E szárny IV. em. IE440, 463-1774, fax 463-4112, kollar@mit.bme.hu), hogy a hibákat bejelölhessük, és a legközelebbi kinyomtatásban kijavíthassuk.

Budapest, 2004. szept. 15.

A szerzők

1. fejezet

A mérési eljárások koncepcionális alapjai

1.1. Jel és rendszer a mérési eljárásban

A mérés *információgyűjtésből és információfeldolgozásból* áll. Az információfeldolgozási eljárások tárgyalásához a jel- és rendszerelmélet eszközei biztosítanak keretet.

A megfigyelt jelenségre vonatkozó információt valamilyen jel szállítja. A jelenség (jel) objektumok közötti kölcsönhatás kísérője, amely kölcsönhatás résztvevői *rendszerbe* foghatók össze. A figyelembe vett *kölcsönhatások* és kölcsönös összefüggések kijelölik a rendszert alkotó objektumok halmazát. A rendszer működésének leírásával a kölcsönhatásokban lejátszódó *információ- és energiacsere* mechanizmusait ragadjuk meg.

Amikor mérést végzünk, a mérőeszköz kölcsönhatásba lép a mérendő objektummal, azaz rendszerrel van dolgunk. Rendszerint kölcsönhatások láncolatáról van szó, ennek megjelenítésére vezetjük be a *jelátviteli csatornát* (avagy megfigyelési csatornát).

Mérési eljárás: valamely objektum jobb megismerése érdekében végzett információgyűjtés és információfeldolgozás

Jel: egy konkrét jelenség olyan jellemzője, amely információt hordoz valamely objektumra vonatkozóan

Rendszer: kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések által összekapcsolt objektumok halmaza

Kölcsönhatás: objektumok kölcsönös egymásra hatása által létrejövő energiafolyamatok, információátadással járó folyamatok

(Irodalom: Schnell I. kötet, Előszó, Méréselmélet rész bevezetője, 1.2.3 és 2.1)

1.2. A modellalkotás célja és alapfogalmai

A *modell célja ismeretek reprezentálása*. Az a priori (eleve meglévő) ismeretek összegyűjtése és rendszerezése, a modellezés munkafeltétel mind a mérés megtervezéséhez

1. A MÉRÉSI ELJÁRÁSOK KONCEPCIONÁLIS ALAPJAI

(mely ponton, hogyan mérjük, vagy hogyan gerjesszük a rendszert?), mind a megfigyelések feldolgozásához.

A rendszerek struktúrájukkal, paramétereikkel illetve adott pillanatbeli állapotokkal együttesen írhatók le.

Egy kísérlet vizsgálatához a rendszer tartós összefüggéseinek ismerete biztosít keretet. Ezeket az összefüggéseket nevezzük a rendszer *struktúrájának*. Ha a modell, például, egy koncentrált paraméterű hálózat, akkor a strukturális ismeretek határozzák meg a hálózat topológiáját. A topológia megadásával azt feltételezzük, hogy az ismeretlen rendszer ismert építőelemekből felépíthető, és egyúttal egy adott modell-osztályra szűkítjük le a lehetséges rendszerek halmazát.

Azokat az értékeket, mennyiségi viszonyokat, amelyek nem állandók, vagy nem rögzítettek a rendszer *paramétereinek* hívjuk. Ilyen lehet például egy lineáris dinamikus hálózat állapotváltozós leírásában az abban szereplő mátrixok nullától különböző elemei.

Azok a paraméterek, amelyek a rendszeren belüli kölcsönhatások függvényében változnak, és a rendszer pillanatnyi energiaviszonyait, állapotát tükrözik, *állapotváltozóknak* hívjuk. Ilyen például a lineáris dinamikus rendszerek tárolóinak a tartalma.

Modell: a rendelkezésre álló ismereteink összessége

Struktúra: a rendszer elemei közötti tartós összefüggések

Paraméter: a tartós összefüggések mennyiségi viszonyai

Állapot: kölcsönhatások adott időpontra vonatkozó viszonyai

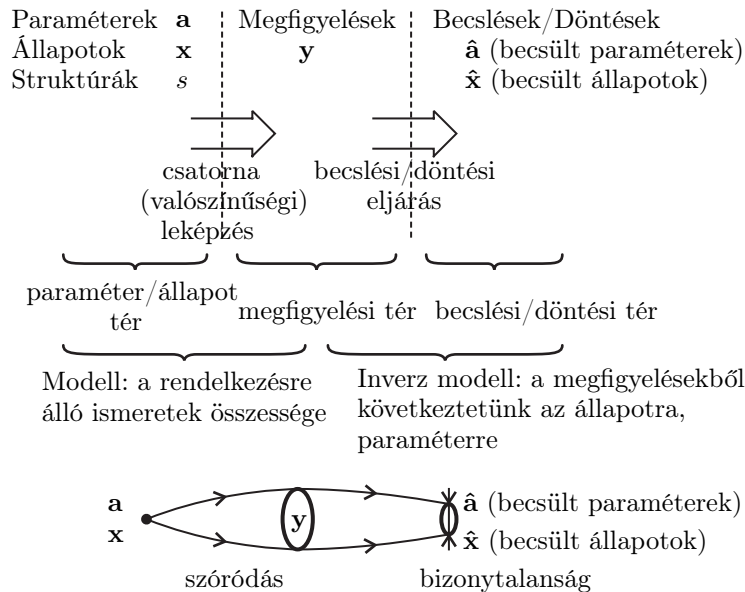
(Irodalom: Schnell I. kötet, 1.1-1.3 fejezetek)

1.3. Modell a mérési eljárásban

A valódi rendszerről már az információgyűjtés előtt rendelkezünk bizonyos előzetes (a priori) ismeretekkel, amelyek között egyrészt szelektálunk (bizonyos részleteket elhanyagolunk), másrészt rendszerezünk, tagolunk. Végeredményben az ismeretlen rendszert úgy képzeljük el, hogy az bizonyos ismert építőelemekből felépíthető. A valódságot a továbbiakban már „ezen az ablakon keresztül nézzük”, vagyis a mérés célja ezen modell struktúrájának (**S**), paramétereinek (**a**), ill. állapotának (**x**) a (teljesebb) megismerése (1.1. ábra).

Amikor a mérőeszközzel megfigyeléseket gyűjtünk, figyelembe kell vennünk a fizikai közeg különböző hatásait és az ezekből származó pontatlanságokat. Ennek megjelenítője a modellben a megfigyelési csatorna. Mivel az összes kölcsönhatást nem tudjuk figyelembe venni, ezért általában sztochasztikus leképzéssel írjuk le a megfigyelések megszületését. Ez a leggyakrabban azt jelenti, hogy a modellben egy megfigyelési zaj adódik hozzá az elvileg mérhető értékekhez („additív” zaj).

Összegezve tehát: a keresett mennyiséghez (pl. x) nem férünk hozzá közvetlenül, az információfeldolgozásnak a szóródó megfigyelésekből ($y(n)$) kell kiindulnia, viszont



1.1. ábra. A valóságról hírt hozó megfigyeléseket (\mathbf{y}) az ismereteinket leíró modell alapján származtatjuk. A becsléshez e modell alapján kell „visszaszűrni” a megfigyeléseket, ezt jelenti az inverz modell. A bizonytalanság nem küszöbölhető ki teljesen a becslésben.

rendelkezünk egy modellel, amely kifejezi a megfigyelések keletkezéséről alkotott ismereteinket. Az információfeldolgozás e modell alapján kell, hogy „visszaszűrje” a megfigyeléseket, vagyis egy „inverz modell” alapján tervezhető meg. Ettől eltérő megfontolások alapján is javasolható eljárás a jelfeldolgozásra, (pl. „végezzünk átlagolást a megfigyeléseken, mert az csökkenti a szórást”), de ha az valóban jól működik, akkor valahol benne szerepel az a modell, amely alapján a megfigyelések származtathatók. *A mérés és a modellezés valójában elválaszthatatlan. A modell mindig beépül a mérési eljárásba.*

A megfigyelések pontatlansága nem küszöbölhető ki teljes mértékben a feldolgozással, ezért a pontos érték helyett egy sáv lesz az eredmény, amelyet többféleképpen jellemezhetünk. Tehát a keresett mennyiség becselője (pl. \hat{x}) mellé mindig támpontot kell adni a becselő bizonytalanságát illetően is. A bizonytalanságot rendszeres és véletlen hibák okozhatják, amelyek közül az utóbbiak fokozatosan kiátlagolhatók a feldolgozott minták számának növelésével.

Megjegyzés: Abban az esetben, ha egy statikus jellemzőt, pl. egy stacionárius valószínűségi változó szórását kell becsülni, a modellben nem játszik szerepet az idő. Ha azonban a modell dinamikus, akkor a modell invertálása elvi problémába ütközik. A modellben előforduló késleltetés inverze ugyanis egy „siettetés” lenne, ami nem megvalósítható. Így hát az időbeni késedelmet fel kell vállalni, ami az eredmény használhatóságát korlátozhatja. Például visszacsatolt szabályozási körben a késedelem 180 fokos fázistolást eredményezhet, ami instabillá teheti a rendszert.

(Irodalom: Schnell I. kötet, 1.1.5, 1.2.3, 2.1., 2.2. fejezetek)

1.4. Modellillesztés, paraméterbecslés

Ha mérési eredményeink vannak, legtöbbször valamilyen származtatott mennyiséget szeretnénk meghatározni: frekvencia, szinusz-amplitúdó, stb. De hogyan? Az ad hoc módszerek sokszor segítenek, de cserben is hagyhatnak.

A legkézenfekvőbbnek látszó módszer a legkisebb négyzetek módszere. Ez azt jelenti, hogy a mért értékeket egy paraméteres modellel közelítjük, és a paramétereket úgy állítjuk be, hogy a modelltől számított és a mért értékek különbségeinek négyzetösszegét minimalizáljuk (legkisebb négyzetes vagy LS módszer).

Felmerül a kérdés, hogy az LS módszer mennyire jó, és nincs-e ennél jobb eljárás? Erre a válasz az, hogy amennyiben ismerjük a megfigyelés modelljét, beleértve a zaj beépülését a mért eredményekbe, akkor általában van. Ezt maximum likelihood módszernek nevezik. Bizonyos speciális esetekben az LS módszerre vezet, de nem mindig.

A maximum likelihood módszer lényege a következő.

1. Felírjuk a megfigyelések együttes sűrűségfüggvényét. Ez tartalmazza a meghatározni kívánt paramétereket.
2. A fenti függvényt (vagy annak logaritmusát, ha az egyszerűbb, hiszen a logaritmusfüggvény monoton) maximalizáljuk a paraméterek változtatásával. A maximalizálás gyakran (de nem mindig) deriválással történhet.

Példa

Határozzuk meg a középérték becslőjét N független, normális eloszlású megfigyelésből.

Megoldás

Az együttes sűrűségfüggvény a következő:

$$L(\mathbf{z}, \mu) = f(\mathbf{z}, \mu) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \sigma^N} e^{-\frac{(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})^T(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu})}{2\sigma^2}} \quad (1.1)$$

Ennek logaritmusát célszerű minimalizálni.

$$\ln L(\mathbf{z}, \mu) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - N \ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)^2 \quad (1.2)$$

Jól látszik, hogy az első két tag nem függ μ -től, ezért a harmadik tagot kell maximalizálni, vagyis minimalizálni a

$$\sum_{i=1}^N (z_i - \mu)^2 \quad (1.3)$$

kifejezést (tehát LS problémára jutottunk). Ennek minimuma:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^N (z_i - \mu)^2}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^N -2(z_i - \mu) = 0 \quad (1.4)$$

vagyis $\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i$, a számtani középérték.

A maximum likelihood becslőnek nagyon kellemes tulajdonságai vannak:

- aszimptotikusan torzítatlan (nagy N -ekre a torzítás nullához tart)
- aszimptotikusan hatásos (leegyszerűsítve nagy N -ekre a varianciája adott ismereteket felhasználva a lehető legkisebb)
- aszimptotikusan normális eloszlású
- egy függvény becslője egyenlő a becslő függvényével (vagyis mindegy, hogy pl. a σ paramétert, vagy a σ^2 paramétert becsüljük-e, és abból számítjuk a másikat)

Mikor jobb egy becslő a másiknál? Két jellemzőt szoktak megvizsgálni: a torzítást (az a jó, ha egy becslő torzítatlan) és a varianciát vagy szórásnégyzetet (az a jó, ha egy becslő varianciája kicsi).

A végeredményképpen kapott becslőt hibájával szokták jellemezni. A felhasználót azonban elsősorban nem ez érdekli, hanem az, hogy a keresett érték milyen intervallumba esik nagy valószínűséggel (hibahatár). Ez az ún. konfidencia-intervallum. Példaként kiszámítjuk a középérték konfidencia-intervallumát.

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az átlagérték varianciája N -ed része a minták varianciájának: $\text{var}\{\hat{\mu}_{\text{ML}}\} = \sigma^2/N$. Ebből felírható például a következő egyenlőtlenség a (2,5%,97,5%) sávra:

$$P\left(z_{2.5\%} < \frac{\hat{\mu}_{\text{ML}} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} < z_{97.5\%}\right) = 0.95. \quad (1.5)$$

Ebből átrendezéssel felírható a 95%-os konfidencia-állítás μ -re:

$$\hat{\mu}_{\text{ML}} - z_{97.5\%} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu}_{\text{ML}} - z_{2.5\%} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (1.6)$$

Ezt azért hívják konfidencia-állításnak és nem valószínűségi állításnak, mert az ismeretlen paraméterre ad meg határokat: itt nem a jellemzett mennyiség, hanem a *határok* a valószínűségi változók.

1.5. A jelek csoportosítása és leírása

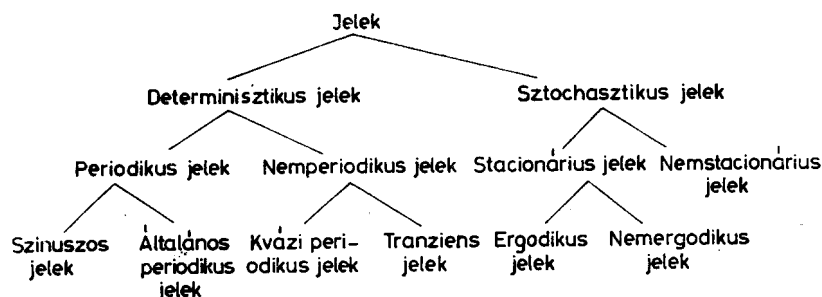
Manapság, amikor annyi minden digitális, az első kérdés az, hogy idősorral (minták sorozatával), vagy folytonos (idő)paraméterű jellel van-e dolgunk (a paraméter nemcsak idő, hanem például helykoordináta is lehet – mi a következő fejtegetésekben mindig időt emlegetünk, de minden paraméterre igazak az állítások). A digitális jelfeldolgozás egyik megközelítése az, hogy idősorból indul ki, és ennek tulajdonságait és feldolgozási lehetőségét vizsgálja a diszkrét időtartományban.

Ebben a tárgyban abból fogunk kiindulni, hogy a vizsgált jelenségek általában folytonos időparaméterűek, és amikor jelfeldolgozásról beszélünk, akkor a folytonos idejű

1. A MÉRÉSI ELJÁRÁSOK KONCEPCIONÁLIS ALAPJAI

jelek által hordozott információt akarjuk kinyerni. Ebben a megközelítésben idősorunk akkor van, ha ennek a folytonos idejű jelnek a mintáit vizsgáljuk. A kettő ekvivalenciájának lehetőségeivel foglalkozik a mintavételezés.

A folytonos idejű jelek egy ésszerű csoportosítása látható az 1.2. ábrán.



1.2. ábra. A jelek csoportosítása

A felsorolt jelcsoportok lefedik a gyakorlatban előforduló jelek legtöbbszörét.

Amikor jelekről beszélünk, akkor két dolog szokott keveredni. Egyrészt beszélhetünk a valódi jelekről és az őket létrehozó kísérletről, másrészt a jeleket leíró matematikai modellekről. Az alábbiakban mindkettőre kísérletet teszünk, de mindig tartunk szem előtt, hogy a kettő nem ugyanaz. A matematikai modell absztrakció, ennek illeszkedését a valósághoz mindig ellenőrizni és értelmezni kell.

Ebben a tárgyban lineáris rendszerekkel fogunk foglalkozni, ami azt jelenti, hogy jelek összetevőire egyenként kiszámítható és összegezhető a rendszer válasza (szuperpozíció). A modellek tehát a jelek additív összetevőit írják le, és elegendő az összetevők egyenkénti vizsgálata.

Az egyes jelek talán legfontosabbnak látszó tulajdonsága az, hogy a generáló kísérletet azonos körülmények között megismételve a kapott jel egybevágó-e a korábbival, vagy nem. Ha egybevágó, akkor determinisztikus (nem véletlenszerű) jelről beszélünk, vagyis a jelenség által meghatározott formájú jelről (modellje a determinisztikus jel). Ha ez nem igaz, akkor a jelről azt mondjuk, hogy véletlenszerű (modellje a sztochasztikus folyamat).

1.5.1. Determinisztikus jelek

A determinisztikus jel adott formájú, és az alábbiakban ezt a formát próbáljuk meg megfelelőképpen jellemezni. Célszerűnek látszik a periodikus jeleket külön kezelni, hiszen ezek gyakran előfordulnak, és ezért sokszor van dolgunk velük.

Periodikus jelek

Periodikus egy jel, ha adott T_p idővel eltolva önmagát kapjuk. Ez szépen hangzik, de a feldolgozás szempontjából nem elegendő. A periodikus jeleket Fourier-sorba is akarjuk fejteni. Szerencsére a gyakorlatban előforduló jelek kellő pontossággal Fourier-sorba fejthetők – elvben vannak ugyan olyan jelek, amelyeknek nincsen Fourier-sora,

vagy van megszámlálhatóan végtelen pontjuk, ahol a sor nem konvergál vagy nem a jelhez konvergál, de ezek gyakorlati jelentősége elhanyagolható. A továbbiakban olyan periodikus jelekkel fogunk foglalkozni, melyek Fourier-sora létezik, és ez véges számú diszkrét ponttól eltekintve előállítja a jelet.

A legkézenfekvőbb periodikus jel a szinuszejel. Ezt 3 paraméter egyértelműen meghatározza:

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) \quad (1.7)$$

azaz az (A_1, f_1, φ_1) számhármassal. Ha tudjuk azt, hogy szinuszejellel van dolgunk, a feldolgozásban ezek meghatározása a fontos, hiszen ezek már egyértelműen definiálják a jelet. Mivel azonban a mérésekben a mérési csatorna offszetje és driftje gyakran nem elhanyagolható, sokszor egy negyedik mennyiséget is figyelembe veszünk, a DC szintet, akkor is, ha elvben tiszta szinusszal lenne dolgunk:

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + C \quad (1.8)$$

Megemlítjük, hogy a szinuszos jelnek létezik egy másik reprezentációja is, amelyben a fázishelyzetet úgy vesszük figyelembe, hogy az eltolt szinuszos jelet egy-egy nulla fázisú szinuszejel és koszinusz-jel összegeként állítjuk elő, és így az A , B , C paraméterekkel vett lineáris kombinációként áll elő a jel:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_1 t) + B \sin(2\pi f_1 t) + C \quad (1.9)$$

Egymással összevetve a (1.8) és (1.9) kifejezéseket, könnyen belátható, hogy $A_1 = \sqrt{A^2 + B^2}$, és $\varphi_1 = \arctan(B/A) + (\pi \text{ ha } A < 0)$, illetve $A = A_1 \cos(\varphi_1)$, és $B = -A_1 \sin(\varphi_1)$.

Ennek a formának a paraméterbecslésekben van nagy jelentősége.

A szinuszos jel felírható két komplex exponenciális jel összegeként is, az Euler-formula felhasználásával:

$$A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) = C_1 e^{j2\pi f_1 t} + C_{-1} e^{-j2\pi f_1 t}, \quad (1.10)$$

ahol $C_1 = \frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1}$ és $C_{-1} = \overline{C_1}$ (komplex konjugált).

A szinuszejel matematikai értelemben nem Fourier-transzformálható. A fejezet mellékletében látni fogjuk azonban, hogy a komplex exponenciálisokhoz a Dirac-impulzus felhasználásával hozzárendelhető egy Fourier-transzformált. Így a (1.10) kifejezés alapján:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)\} &= \mathcal{F}\{C_1 e^{j2\pi f_1 t} + C_{-1} e^{-j2\pi f_1 t}\} \\ &= C_1 \delta(f - f_1) + C_{-1} \delta(f + f_1) \\ &= \frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1} \delta(f - f_1) + \frac{A_1}{2} e^{-j\varphi_1} \delta(f + f_1) \end{aligned} \quad (1.11)$$

A szinusz fontos jellemzője az átvitt teljesítmény. Mivel szívesen kezeljük a $\pm\infty$ közötti teljes frekvenciatengelyt, általában úgy járunk el, hogy a $\pm f_1$ frekvenciákhoz rendelünk

1. A MÉRÉSI ELJÁRÁSOK KONCEPCIONÁLIS ALAPJAI

$P_1 = A_1^2/4$, $P_{-1} = A_1^2/4$ teljesítményt. Látni fogjuk, hogy a többi jel feldolgozásakor ez a hasznos forma.

Az ún. teljesítmény-spektrum, melyet így definiálunk, a szinusz két fontos jellemzőjét (A_1, f_1) tartalmazza, a fázist azonban nem. Még a DC-nek megfelelő C^2 is hozzárendelhető az $f = 0$ frekvenciához.

Amennyiben a periodikus jel összetett, akkor Fourier-sor formájában írjuk fel. Mi a komplex Fourier-sort használjuk, mert így az eredmények könnyen összevethetők a komplex Fourier-transzformáció eredményeivel:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t}, C_{-k} = \overline{C_k} \quad (1.12)$$

A $C_{-k} = \overline{C_k}$ feltétel azért fontos, mert ekkor lesz az összeg valós.

Können belátható, hogy amennyiben a (1.8) szerinti jelről van szó, akkor a megfeleltetés $A_1 = 2|C_1|$, $\varphi_1 = \arg(C_1)$, $C = C_0$, és $P_1 = A_1^2/4 = |C_1|^2$.

Megemlítjük, hogy a komplex együtthatókat a (1.12) kifejezésben szereplő komplex exponenciális komplex konjugáltjával való szorzással és integrálással kaphatjuk meg:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi n f_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t} e^{-j2\pi n f_1 t} dt. \quad (1.13)$$

Ez azért van így, mert a $T = 1/f_1$ hosszúságú intervallumban csak ez a függvénypár az, melynek szorzata integrálva nem 0 (amit úgy szoktunk kifejezni, hogy a komplex Fourier-sor bázisfüggvényei a periódus hosszúságú intervallumon egymásra mind ortogonálisak, hiszen a skaláris szorzatot az egyik függvénynek a másik függvény komplex konjugáltjával való szorzata integráljaként definiáljuk):

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{j2\pi k f_1 t} e^{-j2\pi n f_1 t} dt = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = n \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (1.14)$$

A szinuszjelhez hasonlóan az összetett periodikus jelekhez is hozzárendelhető Fourier-transzformált.

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(f - k f_1) \quad (1.15)$$

Nem periodikus jelek

Azok a jelek, melyek nem periodikusak, sokfélék lehetnek. Mi két fő csoportjukkal foglalkozunk, a majdnem periodikus és a tranziens jelekkel.

Majdnem periodikus jelek

Majdnem periodikusnak nevezünk egy jelet akkor, ha periodikus komponensei vannak, de ezek összege nem periodikus. A gyakorlatban ez például akkor fordul elő, ha két szinkronizálatlan periodikus jelgenerátor jelét összeadjuk vagy összeszorozzuk. Így

kezelhetjük azt a szituációt is, amikor két szinuszos jelösszetevő szinkronizált ugyan, de frekvenciaarányuk nem fejezhető ki két elég kicsi egész szám hányadosaként. A jel szigorú értelemben periodikus ugyan, de a periódushossz nagyon nagy.

Matematikai modellként olyan szinuszos összetevők véges vagy végtelen összegét használjuk, melyeknek nincs közös alapharmonikusa vagy ennek létezését nem vesszük figyelembe.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi f_k t}, C_{-k} = \overline{C_k}, f_{-k} = -f_k. \quad (1.16)$$

A majdnem periodikus jelhez is hozzárendelhető Fourier-transzformált:

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi f_k t} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \delta(f - f_k) \quad (1.17)$$

Tranziens jelek

Ha egy determinisztikus jelnek nincsen periodikus összetevője, akkor általában feltételezhetjük, hogy a jel előbb-utóbb nullává válik.¹ Ezeket hívjuk tranziens jeleknek. Az „eltűnést” matematikailag úgy értelmezzük, hogy ezek a jelek abszolút integrálhatók, ami egyben azt is jelenti, hogy létezik a Fourier-transzformáltjuk.

A tranziens jelekre értelmezzük Fourier-transzformáltjukat, az ún. amplitúdó-spektrumot:

$$\mathcal{F} \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = X(f). \quad (1.18)$$

Amennyiben a tranziens jel négyzetesen is integrálható (ez nem mindig igaz, de a gyakorlatban szinte mindig), akkor értelmezhetjük az ún. tranziens korrelációt:

$$R_{\text{tr}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt. \quad (1.19)$$

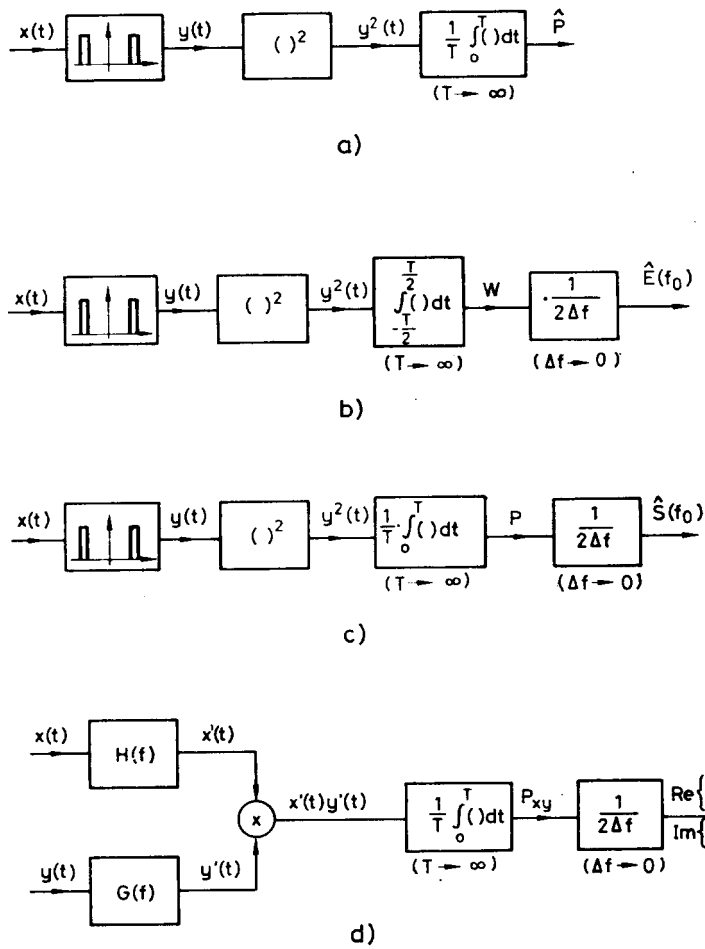
Ez a jel szerkezetére nézve ad bizonyos információt. Észrevehetünk egy nagyon érdekes összefüggést. $R_{\text{tr}}(\tau)$ nem más, mint a jelnek és tükörképének a konvolúciója. Ezért Fourier-transzformáltja nem más, mint az amplitúdó-spektrumnak és komplex konjugáltjának a szorzata:

$$\mathcal{F} \{R_{\text{tr}}(\tau)\} = \mathcal{F} \{x(-t) \star x(t)\} = \overline{X(f)} X(f) = |X(f)|^2 \quad (1.20)$$

Ezt a mennyiséget energia-sűrűségfüggvénynek is hívják, és $E(f)$ -fel jelölik. Ennek az az oka, hogy $E(f_0)df$ megadja az f_0 körüli df sávban szállított energia mennyiségét.

¹Ez nem teljesen igaz, hiszen a modulált jelek például nem feltétlenül tartoznak egyik fenti kategóriába sem, mégsem tűnnek el, de az azért igaz, hogy a jelek egy fontos csoportja időben előbb-utóbb nullává válik.

1. A MÉRÉSI ELJÁRÁSOK KONCEPCIONÁLIS ALAPJAI



1.3. ábra. Energetikai spektrumok mérése a) a sávteljesítmény mérése b) az energia-sűrűségfüggvény mérése c) a teljesítmény-sűrűségfüggvény mérése d) a kereszteljesítmény-sűrűségfüggvény mérése

Ezt könnyű belátni, ha megvizsgáljuk az ebben a sávban (és $-f_0$ körüli tükörképében) működő sávszűrőt (1.3b ábra).

A sávszűrő kimenetének energiája valóban a következő (felhasználva a Parseval-tételt):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df \quad (1.21)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)H(f)|^2 df \approx |X(f_0)|^2 df + |X(-f_0)|^2 df \quad (1.22)$$

$$= E(f_0)df + E(-f_0)df \quad (1.23)$$

Az energia-sűrűségfüggvény nemnegatív, amint az definíciójából következik, és értelmezése is sugallja.

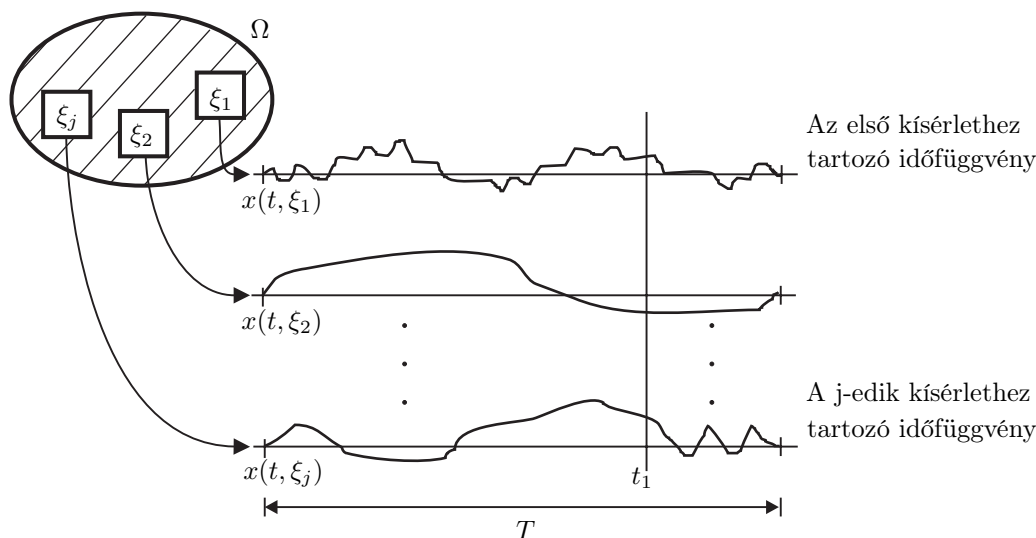
1.5.2. Sztochasztikus jelek

Itt egy filozófiai jellegű megjegyzést kell előre bocsátanunk. Számunkra a véletlen két dolgot jelenthet. Egyrészt a kísérletek megisméltésekor előforduló „látható ok nélküli” ingadozásokat, másrészt a megfelelő determinisztikus ismeretek hiányából vagy elhanyagolásából származó bizonytalanságot jelenti. Számunkra az ok azonban mindegy: a fontos az, hogy a körülmények nem definiálják egyértelműen a kísérlet eredményét.

A sztochasztikus jelek matematikai modellje a sztochasztikus folyamat. Ez a valószínűségi változó természetes általánosításaként fogható fel a legegyszerűbben: az elemi események itt függvények, vagyis minden bekövetkezés egy-egy függvény. Ezeket *mintafüggvény*nek hívjuk. Egy mérés, látszólag a véletlentől függően, különféle megfigyelt függvényeket eredményezhet, ezeket az eseteket egy-egy elemi eseménynek tekintjük, melyek halmazaihoz valamekkora valószínűséget rendelhetünk hozzá (ld. 1.4 ábra).

A sztochasztikus folyamatot a bekövetkezhető események halmazán értelmezett valószínűségi mérték definiálja, mely minden mérhető halmazra megmondja, mennyi halmaznak mint eseménynek a bekövetkezési valószínűsége. Így minden olyan esemény, amelyhez ilyen halmazt lehet rendelni, valószínűséggel rendelkezik: például a $[-2, 3]$ intervallumon a $+1$ értéket meg nem haladó függvények halmazának megadható a bekövetkezési valószínűsége. Az események, és így a halmazdefiníciók bonyolultak lehetnek, a sztochasztikus folyamat mint absztrakt fogalom vonzó, de kezelhetetlennek látszik. Szerencse, hogy az információfeldolgozás szempontjából nem maguk az egyes függvények, hanem a folyamat mintafüggvényeinek összességét jellemző paraméterek az érdekesek. Ezért az a priori ismeretek (v. feltételezések), és a konkrét megfigyelések alapján a folyamat statisztikai eloszlásairól kell becsléseket tenni. Ez könnyít a helyzeten, de sajnos nem eleget.

Ezen nehézségek miatt van nagy jelentősége az ún. Kolmogorov-féle alaptételnek. Kolmogorov bebizonyította, hogy a fenti definíció ekvivalens a következővel. A függvények t időpillanatban felvett értéke legyen $x(t)$. Ez t paraméterű valószínűségi változó,



1.4. ábra. A sztochasztikus folyamat, mint mintafüggvény-sokaság

hiszen értékét a konkrét bekövetkezés adja meg. Adjuk meg az összes $x(t)$ valószínűségi változó eloszlását, azután az összes $x(t_1), x(t_2)$ valószínűségi változó pár eloszlását, és így tovább, úgy, hogy az eloszlások mind kompatibilisek legyenek, vagyis az alacsonyabb rendszámú eloszlások a magasabb rendszámúak peremeloszlásai legyenek. A tétel szerint ez a megadás, és a fenti megadás ekvivalens, vagyis a sztochasztikus folyamat felfogható úgy is, mint egy valószínűségi változó-sorozat, melyet eloszlásaik egyértelműen definiálnak. Elegendő tehát paraméterfüggő eloszlás-seregben gondolkodnunk. Ezek segítségével azután különböző momentumokat definiálhatunk, melyek már ésszerű eszközökkel vizsgálhatók.

Sztochasztikus folyamatoknál a leggyakrabban vizsgált, sokszor időfüggő momentumok a következők:

- várható érték:

$$\mu_x(t) = E\{x(t)\}$$
- átlagos négyzetes érték és variancia:

$$\Psi_x^2(t) = E\{x^2(t)\}, \text{var}\{x(t)\} = \sigma_x^2(t) = \Psi_x^2(t) - \mu_x^2(t)$$
- autokorrelációs függvény és autokovariancia-függvény ($\tau = 0$ esetén ezek a fenti két mennyiséget adják):

$$R_x(t, \tau) = E\{x(t)x(t + \tau)\}, C_x(t, \tau) = R_x(t, \tau) - \mu_x^2(t)$$

Stacionárius folyamatok

Az „összes” sztochasztikus folyamat így még mindig kezelhetetlenül általános. Nagy jelentősége van viszont azoknak a folyamatoknak, melyek tulajdonságai az idő előre haladtával nem változnak, hiszen a valóságban is van szép számú időben állandó statisztikai tulajdonságú jelenség, melynek modellje lehet az ilyen folyamat. Ezeket a

folyamatokat (erősen) stacionárius sztochasztikus folyamatoknak hívjuk. Ilyenkor a felvett változók együttes eloszlása időeltolásra nézve invariáns, vagyis az eloszlások alakját csak a változók egymáshoz viszonyított helyzete szabja meg.

Ez az ismeret nagyban segítheti a mérést, és a mérések alapján a folyamatról alkotott kép kialakítását. Matematikailag:

$$\begin{aligned} F_{x_1, x_2, \dots, x_N}(z_1, z_2, \dots, z_N, t_1, t_2, \dots, t_N) \\ = F_{x_1, x_2, \dots, x_N}(z_1, z_2, \dots, z_N, t + t_1, t + t_2, \dots, t + t_N) \end{aligned} \quad (1.24)$$

a t_1, t_2, \dots, t_N időpontok tetszőleges megválasztása esetén, t -től függetlenül.

Sajnos eloszlásokat mérni eléggé körülményes, különösen, ha aránylag nagy pontosságot követelünk meg. Ezért az előirt tulajdonságokat nemigen lehet ellenőrizni. Redukáljuk tehát az igényeinket a *mérhető* mennyiségekre. Ezek a momentumok, a $E\{x^M\}$ alakú, illetve $E\{\prod_{i=1}^M x^{k_i}(t_i)\}$ alakú mennyiségek. Ezek már ellenőrizhetők is lehetnek, különösen, ha $M \leq 2$. Amennyiben legalább az első- és másodrendű momentumok időinvariánsak, a folyamatot gyengén stacionáriusnak nevezzük.

A legalább gyengén stacionárius sztochasztikus folyamatoknál a fenti momentumok időinvariánsak (a következő felsorolás redundáns, hiszen például $\Psi^2 = R(0)$, $\sigma^2 = \Psi^2 - \mu^2$ és $\text{var}\{x\} = \sigma^2(t)$, de a legfontosabb mennyiségeket fel szeretnénk volna tüntetni):

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu \\ \Psi^2(t) &= \Psi^2 \\ \text{var}\{x(t)\} &= \text{var}\{x\} \\ \sigma^2(t) &= \sigma^2 \\ R(t, \tau) &= R(\tau) \\ C(t, \tau) &= C(\tau) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Amennyiben az autokorrelációs függvény időinvariáns, definiálhatjuk Fourier-transzformáltját:

$$\mathcal{F}\{R(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = S(f). \quad (1.26)$$

Figyeljük meg, hogy a mintafüggvények Fourier-transzformálásával nem kísérleteztünk (ez általában a szokásos értelemben nem is létezik), ehelyett az autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltját vizsgáljuk. A mérési eljárásoknál lesz szó majd arról, hogy a véges hosszúságon mért mintafüggvények azok, amelyek közvetlen Fourier-transzformációval feldolgozhatók, és felhasználási lehetőségeiket is megvizsgáljuk.

Az $S(f)$ függvényt teljesítmény-sűrűségfüggvénynek is hívják, mert $S(f_0)df$ megadja az f_0 körüli df sávban szállított teljesítmény mennyiségét. Ezt ismét könnyű

1. A MÉRÉSI ELJÁRÁSOK KONCEPCIONÁLIS ALAPJAI

belátni, ha bevezetjük erre a sávra (és $-f_0$ körüli tükörképére) a $H(f)$ sávszűrőt (1.3c. ábra).

A sávszűrő kimenetének teljesítménye valóban a következő, felhasználva a „Híradás-techniká”-ból tanult $S_{yy}(f) = S_{xx}(f)|H(f)|^2$ összefüggést:

$$P = \Psi_{yy}^2 = R_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(f) df \quad (1.27)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)|H(f)|^2 df \quad (1.28)$$

$$\approx S_{xx}(f_0)df + S_{xx}(-f_0)df \quad (1.29)$$

A (1.26) összefüggést, tudniillik azt, hogy az autokorrelációs függvény Fourier-transzformáltja nem más, mint a teljesítmény-sűrűségfüggvény, Wiener-Hincsin összefüggésnek hívják.

A teljesítmény-sűrűségfüggvény nemnegatív, amint az a fenti levezetésből következik (a mért teljesítmény nem lehet negatív). Ez a tulajdonság természetesen valamilyen formában meg kell, hogy jelenjen inverz Fourier-transzformáltjában, az autokorrelációs függvényben is. $S(f)$ nemnegativitása ekvivalens azzal, hogy az autokorrelációs függvénynek pozitív szemidefinitnek kell lennie (ha ez nem teljesül egy adott függvényre, akkor ez a függvény nem lehet autokorrelációs függvény). Ez azt jelenti, hogy a mintáiból képzett korrelációs mátrix pozitív szemidefinit:

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(t_1) & R(t_2) & \dots & R(t_{N-1}) \\ R(t_1) & R(0) & R(t_1) & \dots & R(t_{N-2}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R(t_{N-1}) & \dots & \dots & R(t_1) & R(0) \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Hasonló a helyzet az autokovariancia-függvénnyel, és ennek Fourier-transzformáltjával, a *kovariancia-teljesítmény-sűrűségfüggvénnyel* is, ami nem meglepő, hiszen a két eset között mindössze a kovariancia esetén nullára transzformált középérték a különbség.

Megemlítjük, hogy lehetséges két sztochasztikus folyamat együttes jellemzése is (hogy összefüggésüket is vizsgálni tudjuk, például a rendszerek be- és kimenete közötti összefüggést). Ehhez definiáljuk a keresztkorrelációs függvényt (most már csak a stacionárius esetben):

$$R_{xy}(\tau) = E \{x(t)y(t + \tau)\} \quad (1.31)$$

A keresztkorrelációs függvény leírja a két jel közötti összefüggést. Definiálható Fourier-transzformáltja, az ún. kereszt-teljesítmény-sűrűségfüggvény is:

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F}\{R_{xy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (1.32)$$

Amennyiben egy lineáris rendszer be- és kimenete $x(t)$ ill. $y(t)$, akkor igazak a következő összefüggések:

$$S_{xy}(f) = S_{xx}(f)H(f) \quad (1.33)$$

$$S_{yx}(f) = \overline{S_{xy}(f)} \quad (1.34)$$

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)|H(f)|^2 \quad (1.35)$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \star h(t) \quad (1.36)$$

$$R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) \star h(-t) \quad (1.37)$$

$$R_{yx}(\tau) = R_{xy}(-\tau) \quad (1.38)$$

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \star h(t) \star h(-t) \quad (1.39)$$

A korrelációs függvény és a teljesítmény-sűrűségfüggvény értelmezése

Az eddigiekben láttuk, hogy a két függvény egyenértékű, hiszen Fourier-transzformált párok. Azt mondhatjuk, hogy a sztochasztikus folyamat szerkezetéről adnak felvilágosítást: az utóbbi megmondja, milyen frekvencia környékén mekkora a hordozott teljesítmény. Implicit módon ezt teszi az azonos információ-tartalmú autokorrelációs függvény is, de kevésbé koncentrált módon: a szinuszos összetevő azonos frekvenciájú koszinuszfüggvényként jelenik meg, az ismétlődő jelformák (csúcsok) jobban észrevehető ismétlődő csúcsokként mutatkoznak.

A korrelációs függvény közvetlen fizikai jelentése úgy fogalmazható meg, hogy lokális maximumai arra utalnak: a jelben ismétlődő komponensek vannak. Különösen fontos ez a keresztkorreláció esetén: a keresztkorrelációban megjelenő csúcsok helye és nagysága a két folyamat közötti jelterjedési utak késleltetéseit és fontosságát mutatják.

A stacionaritás ellenőrzése

Láttuk, hogy a stacionaritás kellemes dolog. Felmerül azonban a kérdés: egyáltalán hogyan ellenőrizhető a momentumok időinvarianciája? Hiszen ehhez végtelen, vagy legalábbis nagyon sok realizációt kellene mérnünk és átlagolnunk. Erre gyakran nincsen lehetőségünk sem, például egy műhold zajos jelét csak egyszer tudjuk megfigyelni.

Ilyenkor fizikai megfontolások segíthetnek. Ha nincs olyan időben változó komponens vagy jelenség, mely a jel jellemzőit időben befolyásolja, akkor feltételezhetjük, hogy a stacionárius folyamat jó modell.

Ezzel együtt bajban vagyunk, ha a csak egyszer megfigyelhető jeleket is jellemezni szeretnénk. Ebben segít az úgynevezett ergodikus hipotézis.

Ergodikus folyamatok

Amennyiben egyetlen realizáció áll csak rendelkezésünkre, akkor ésszerűnek látszik az a gondolat, hogy ennek vizsgáljuk meg idő szerinti átlagait. Mikor lesznek ezek azonosak a sokaság szerinti átlagokkal?

1. A MÉRÉSI ELJÁRÁSOK KONCEPCIONÁLIS ALAPJAI

Nyilvánvalóan szükséges feltétel, hogy a folyamat stacionárius legyen. Az *ergodicitás* azt jelenti, hogy a következő teljesül: pl. az első két momentumra (gyenge ergodicitás):

$$\begin{aligned} E\{x(t)\} &= \mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ E\{x^2(t)\} &= \Psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \\ E\{x(t)x(t+\tau)\} &= R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \end{aligned} \quad (1.40)$$

Az integrálás a $(0, T)$ intervallum helyett a $(-T/2, T/2)$ intervallumra is ugyanúgy felírható.

Szemléletesen annyit mondhatunk, hogy amennyiben $x(t)$ és $x(t+t_0)$ valószínűségi változók t_0 növelésével egyre függetlenebbé válnak, akkor a mért függvényt megfelelően hosszú szeletekre vágva a kapott függvénydarabok úgy viselkednek, mintha különböző realizációkból származnának, és ilyenkor az ezek fölött mint sokaság fölött végzett átlagolás ekvivalens a ténylegesen a realizációk fölötti átlagolással. Ez az állítás közvetlenül nemigen ellenőrizhető, de fizikai megfontolásokkal alátámasztható.

Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy az ergodicitás akkor nem teljesül, ha az egyes realizációk valamilyen átlagértékükben különböznek egymástól. Más szóval, a létrehozó jelenségben van valamilyen *memória*, mely realizációnként beáll, és a realizáció során megmarad. Ha nincs okunk ilyen memória létezését feltételezni, akkor az ergodikus hipotézis általában teljesül.

Egyszerű példa memóriával rendelkező jelenségekre a közönséges flip-flop kimenetének viselkedése a tápfeszültség bekapcsolása után. Ez általában véletlenszerűen beáll, és ezután úgy is marad. A kimenet modellje tehát stacionárius, de nem ergodikus sztochasztikus folyamat, melynek realizációi a két konstans függvény. Az idő szerinti átlag az egyik konstans, míg a sokaság szerinti átlag a két konstans közötti érték.

Bebizonyítható, hogy ha

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R(\tau) d\tau = 0, \quad (1.41)$$

akkor a folyamat az első momentumra nézve ergodikus. Ez kicsivel enyhébb feltétel, mint a fent megfogalmazott „ $x(t)$ és $x(t+t_0)$ valószínűségi változók t_0 növelésével egyre függetlenebbé válnak” feltétel, hiszen ha $R(\tau)$ periodikus 0 átlagértékkel (periodikus realizációjú sztochasztikus folyamat, lásd lejjebb), akkor az ergodicitás a függetlenné válás hiánya ellenére is teljesül, de ez inkább kivétel. A függetlenné válás $(C(\tau) \rightarrow 0)$ mindenesetre elégséges feltétel. Sajnos egyetlen realizáció ismeretében ismét egyik feltétel sem ellenőrizhető...

Periodikus realizációjú folyamatok

Speciális, de gyakorlatilag fontos folyamatok a *periodikus realizációjú* folyamatok. Ez azt jelenti, hogy a realizált mintafüggvények a determinisztikus értelemben periodikusak. Legfontosabb osztályuk a *véletlen időzítésű* folyamatok osztálya: ezek mintafüggvényei megfelelő időeltolás után egymással egybevágók. A periodikus realizációjú, véletlen időzítésű folyamat egy periodikus jelnek véletlenszerűen kiválasztott időpillanatban megkezdett regisztrációját modellezi. Matematikailag, ha a mért determinisztikus jel $x_d(t)$, akkor a sztochasztikus folyamat mintafüggvényei a $\{x_d(t + T)\}$ függvények. Itt T valószínűségi változó.

Ez a folyamat felfogható úgy is, mint a T valószínűségi változó leképezése az $x_d(t + T)$ függvénnyel. A T valószínűségi változó eloszlásának ismeretében tehát a sztochasztikus folyamat minden tulajdonsága meghatározható.

Amennyiben $x_d(t)$ periódusideje T_p , és T egyenletes eloszlású a $[t_0, t_0 + T_p]$ intervallumon, akkor belátható, hogy mivel a sokaságban minden időzítési helyzet azonos eséllyel előfordul, és ezért az időpontok mindegyike azonos szerepet játszik, a folyamat stacionárius, sőt, ergodikus is.

Véletlen fázisú szinuszjel

A véletlen időzítésű sztochasztikus folyamat egyik legegyszerűbb esete a véletlen fázisú szinuszjel. Ezt így írhatjuk le:

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1(t + T)) \quad (1.42)$$

Amennyiben T egyenletes eloszlású valamely $t_0 + (0, 1/f_1)$ intervallumon, vagy más olyan intervallumon, melynek hossza a periódusidő egész számú többszöröse, akkor ez a folyamat stacionárius és ergodikus is. Szűkebb értelemben ezt a folyamatot nevezik véletlen fázisú szinusznak. Amennyiben az intervallum hossza más, akkor a folyamat nem stacionárius, és így nem is ergodikus.

A véletlen fázisú szinusz autokorrelációs függvénye a stacionaritás miatt:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= E \{x(t)x(t + \tau)\} \\ &= E \{A_1 \cos(2\pi f_1(t + T))A_1 \cos(2\pi f_1(t + T + \tau))\} \\ &= E \left\{ A_1^2 \frac{\cos(2\pi f_1\tau) + \cos(2\pi f_1(2t + 2T + \tau))}{2} \right\} \\ &= \frac{A_1^2}{2} \cos(2\pi f_1\tau) \end{aligned} \quad (1.43)$$

A fázis tehát a várható érték képzése miatt kiesik; az eredmény 0-ra szimmetrikus periodikus függvény. Ennek Fourier-transzformáltja két szimmetrikusan elhelyezkedő Dirac-impulzus:

$$S(f) = \mathcal{F} \{R(\tau)\} = \frac{A_1^2}{4} \delta(f - f_1) + \frac{A_1^2}{4} \delta(f + f_1) \quad (1.44)$$

Talán furcsán hangzik, de a determinisztikus szinuszjelet is fel lehet dolgozni az ergodikus jelekre vonatkozó kifejezések felhasználásával, hiszen felfogható úgy, mint egy

1. A MÉRÉSI ELJÁRÁSOK KONCEPCIONÁLIS ALAPJAI

véletlen fázisú szinuszjel egyetlen realizációja. Mi több, a várható érték, a korreláció, a spektrum mind értelmezhető, és a véletlen fázisú szinuszjel ergodicitása miatt megfelelő eredmény kapható. Ugyanakkor az így elvégzett kiértékelés nem képes visszaadni a fix fázis értékét — ezt külön módszerekkel határozhatjuk meg.

Általános periodikus realizációjú, a periódusidő szélességében egyenletes eloszlású értékkel időzített függvény esetén az autokorrelációs függvény és a spektrális sűrűségfüggvény (1.43) és (1.44) általánosításai. Ha $x_d(t)$ a (1.15) kifejezésnek megfelelő, akkor

$$R(\tau) = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \cos(2\pi k f_1 \tau) = |C_0|^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{|C_k|^2}{4} \cos(2\pi k f_1 \tau) \quad (1.45)$$

és

$$\begin{aligned} S(f) &= A_0^2 \delta(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k^2}{4} \delta(f - k f_1) + \frac{A_k^2}{4} \delta(f + k f_1) \right) \\ &= |C_0|^2 \delta(f) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{|C_k|^2}{4} \delta(f - k f_1). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Normális eloszlású folyamatok (Gauss-folyamatok)

A normális eloszlású folyamatok azok, melyek tetszőleges paraméterű változócsoportjának $(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N))$ együttes eloszlása többdimenziós normális eloszlás:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N \sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}} \quad (1.47)$$

ahol Σ a valószínűségi változók kovariancia-mátrixa. Nem elegendő tehát az, hogy egyetlen változó eloszlása normális legyen. Hozzá kell tennünk, hogy ez a precíz elméleti jelentőségű – a gyakorlatban előforduló, normális mintaeloszlású folyamatok általában normális eloszlású folyamatok. Ennek az az oka, hogy a központi határeloszlás-tétel kimondható sztochasztikus folyamatokra is: a sok, egyenként kis súlyú, többé-kevésbé független hatás összegeként előálló folyamatok közelítőleg Gauss-folyamatok.

A Gauss-folyamatok specialitása, hogy mivel az eloszlásokban csak a várható értékek és a kovariancia-mátrix szerepelnek, a folyamat teljes statisztikai jellemzéséhez elegendő megmérni a várható értéket és a kovariancia-függvényt (vagy az autokorrelációs függvényt).

A fehér zaj

A jelfeldolgozásban sokszor megvizsgáljuk az eljárásokat a sávkorlátozott fehér zaj esetére. Ezért erről is kell ejtenünk néhány szót.

A zaj fehérsége azt jelenti, hogy teljesítmény-sűrűségfüggvénye konstans. A teljes frekvencia-tartományban konstans spektrumú, normális eloszlású folyamatot fehérzaj-folyamatnak, vagy Wiener-folyamatnak (vagy Brown-mozgásnak) hívják. Ez a folyamat absztrakció eredménye, és a jelfeldolgozásban közvetlenül nem használható. Ennek az az oka, hogy a végtelen széles spektrum alatti terület végtelen, ezért a fehér zaj varianciája végtelen.

A fehér zajjal gerjesztett rendszer kimenetének azonban általában véges a sáv szélessége (illetve az átviteli függvénye f növelésével eltűnik), és így véges a varianciája is. Amikor egy rendszer kimenetét vizsgáljuk, akkor nem is különösebben érdekes, hogy a bemenet végtelen sáv szélességű, vagy csak a rendszer sáv szélességéhez képest nagy a sáv szélessége: az eredmény ugyanaz. Akkor tehát, amikor fehér zaj gerjesztéséről beszélünk, akkor egyszerűen a vizsgált rendszer teljes átviteli sávjában egyenletes gerjesztésre gondolunk.

Hasznos, és jól kezelhető modell viszont a sávkorlátozott fehér zaj. Ennek a $(\pm B)$ sávban konstans a teljesítmény-sűrűségfüggvénye. A varianciát σ^2 -tel jelölve a spektrum magassága $\sigma^2/(2B)$. Várható értéke alapértelmezésben nulla, eloszlását általában normálisnak tekintjük.

Megkülönböztetjük tőle az ún. színes zajt: a színesség egyszerűen azt jelenti, hogy a spektrum értéke a frekvencia függvényében nem konstans.

1a. Melléklet: A Dirac-impulzus

A fejtegetésekben többször előkerült a Dirac-impulzus. Mivel ez szigorú értelemben nem függvény, néhány dolgot célszerű ezzel kapcsolatban rögzíteni: milyen értelemben használjuk, mit jelent, és mit tehetünk vele?

A deltafüggvényt matematikai precizitással a disztribúcióelmélet tárgyalja. Amikor a Dirac-impulzusról beszélünk, akkor matematikailag egy olyan ún. *disztribúció*ról van szó, mely a következő tulajdonságú: folytonos $g(x)$ függvény esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x - x_1) dx = g(x_1), \quad (1.48)$$

és emiatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \quad (1.49)$$

Amíg a Dirac-impulzus egy integráljel alatt szerepel, addig a fenti tulajdonságok ismerete elegendő. Így van ez akkor is, amikor például az inverz Fourier-transzformáltban Dirac-impulzus szerepel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_1)e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_1 t}. \quad (1.50)$$

1. A MÉRÉSI ELJÁRÁSOK KONCEPCIONÁLIS ALAPJAI

Mivel a Fourier-transzformáció általában egy-egy értelmű, ennek inverze, vagyis a komplex exponenciális függvény Fourier-transzformáltja egy Dirac-impulzus kell, hogy legyen:

$$\mathcal{F} \{e^{j2\pi f_1 t}\} = \delta(f - f_1). \quad (1.51)$$

Hasonló a helyzet a konvolúcióval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\delta(x - u) du = g(x). \quad (1.52)$$

Ha a mennyiségeket dimenziókkal kezeljük, ahogyan a mérnöki számításokban szoktuk, akkor az (1.49) kifejezésnek megfelelően $\delta(f)$ idődimenziójú kell, hogy legyen (mértékegysége $s = 1/\text{Hz}$), illetve precízebben a $\delta(f/f_0)$ függvényt lenne szabad csak felírunk, hiszen a matematikai függvények (pl. \sin, \cos) argumentuma általában dimenziótlan. Az így felírt függvényre nézve igaz az, hogy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f/f_0) d(f/f_0) &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f/f_0) df &= f_0. \end{aligned} \quad (1.53)$$

A rendszerelméletben gyakran használjuk az egységnyi Dirac-impulzust: $\delta(t)$. Ez megegyezéssel jelölés, és úgy értendő, hogy ennek az impulzusnak az idő szerinti integrálja 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.54)$$

Mérnöki szempontból a Dirac-impulzust úgy képzelhetjük el, mint egy „nagyon keskeny” és „nagyon magas” impulzust, melynek intenzitása (integrálja) éppen 1, és az integráljel alatt a fenti módon viselkedik.

1b. Melléklet: Valószínűségi változók második momentuma

Valószínűségi változók esetén a konstanstól való átlagos négyzetes eltérés egyszerű alakban kifejezhető. (Megjegyzés: ez a mechanikából ismert Steiner-tétel megfelelője: a tehetetlenségi nyomaték kiszámítható két tagból: össze kell adni a súlypontra számított tehetetlenségi nyomatékot, és a súlypont és az adott pont távolsága négyzetének tömeggel vett szorzatát.)

Jelöljük a konstans értéket k -val. Az ettől vett átlagos négyzetes érték a következőképpen fejezhető ki:

$$\begin{aligned}
 E\{(\xi - k)^2\} &= E\{(\xi - \mu + \mu - k)^2\} \\
 &= E\{(\xi - \mu)^2 + (\mu - k)^2 + 2(\xi - \mu)(\mu - k)\} \\
 &= \sigma_x^2 + (\mu - k)^2,
 \end{aligned} \tag{1.55}$$

hiszen $(\xi - \mu)$ várható értéke 0. Ebből azonnal következik, hogy

- az adott konstanstól való átlagos négyzetes értéket a szórásnégyzet és a konstansnak a várható értéktől való eltérése négyzetének az összege adja,
- az eltérés négyzetes értéke a várható értékre vonatkozóan a legkisebb.

Hasonlóan mutatható meg az $R(\tau) = C(\tau) + \mu^2$ összefüggés is.

1c. Melléklet: Komplex normális valószínűségi változók

A valószínűségi változók speciális csoportját alkotják a komplex értékű valószínűségi változók. Ezekről a valószínűség-számítási alapkönyvek csak futólag emlékeznek meg, nekünk azonban többször is szükségünk lesz rájuk.

A komplex értékű valószínűségi változókat úgy kezeljük, mint a kételemű valószínűségi vektorváltozókat, vagyis a kétváltozós eloszlás- és sűrűségfüggvényekkel, illetve az egyváltozós és vegyes momentumokkal. Komplex értékű változók esetén azonban be tudunk vezetni egy kis egyszerűsítést.

Legyen x_r és x_i két valós valószínűségi változó, és $x = x_r + jx_i$ legyen egy belőlük képzett komplex értékű valószínűségi változó. A két változó együttes eloszlása definiálja a valószínűségi mezőt. Gauss-esetben az ezekhez szükséges paraméterek:

$$\boldsymbol{\mu} = E \left\{ \begin{bmatrix} x_r \\ x_i \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mu_{xr} \\ \mu_{xi} \end{bmatrix} \tag{1.56}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = E \left\{ \begin{bmatrix} (x_r - \mu_{xr})^2 & (x_r - \mu_{xr})(x_i - \mu_{xi}) \\ (x_i - \mu_{xi})(x_r - \mu_{xr}) & (x_i - \mu_{xi})^2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xr}^2 & c_{xri} \\ c_{xri} & \sigma_{xi}^2 \end{bmatrix} \tag{1.57}$$

Az eloszlás sűrűségfüggvénye haranggörbe-alakú. Szintvonalai háromfélék lehetnek:

- körök, ha a mellékátlókban nullák vannak (a valós és képzetes rész korrelálatlanok), és a főátlókban lévő elemek egyenlők,
- vízszintes-függőleges tengelyű ellipszisek, ha a mellékátlókban nullák vannak, és a főátlókban lévő elemek különböznek,
- ferde ellipszisek egyébként.

1. A MÉRÉSI ELJÁRÁSOK KONCEPCIONÁLIS ALAPJAI

Az első két esetben a valós és képzetes rész független valószínűségi változók, és az első esetben az eloszlás körkörösen szimmetrikus.

A kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi változó körkörösen szimmetrikussá transzformálható. A

$$\mathbf{n} = \mathbf{\Sigma}^{-1/2} \begin{bmatrix} x_r - \mu_{xr} \\ x_i - \mu_{xi} \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

változó (ahol $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ a mátrix pozitív definit négyzetgyöke) várható értéke nulla, kovarianciája pedig

$$\mathbf{E}\{\mathbf{nn}^T\} = \mathbf{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Sigma}^{-1/2} = \mathbf{E}. \quad (1.59)$$

Komplex változóra értelmezzük a komplex változó várható értékét és szórásnégyzetét is:

$$\mu_x = \mathbf{E}\{x\} = \mu_{xr} + j\mu_{xi} \quad (1.60)$$

$$\sigma_x^2 = \text{var}\{x\} = \mathbf{E}\{(\overline{x - \mu})(x - \mu)\} = \mathbf{E}\{|x - \mu|^2\} = \sigma_{xr}^2 + \sigma_{xi}^2. \quad (1.61)$$

A σ_x^2 mennyiség, mely skalár, nyilvánvalóan nem jellemzi teljes mértékben \mathbf{x} viselkedését, hiszen $\mathbf{\Sigma}$ általában három különböző elemet tartalmaz. Kivétel, amikor tudjuk, hogy az eloszlás körkörösen szimmetrikus, mert ilyenkor $\mathbf{\Sigma}$ mellékátlóiban nullák vannak, és a főátló elemei egyenlők: $\sigma_{xr}^2 = \sigma_{xi}^2 = \sigma_x^2/2$.

Számunkra fontos eset az, amikor szeretnénk két komplex valószínűségi változó együttes eloszlását megvizsgálni (pl. egy rendszer be- és kimenetén mért komplex Fourier-amplitúdókat). Ilyenkor 4 skalár valószínűségi változónk van. A későbbiekben belátjuk, hogy mind a bemeneti, mind a kimeneti változó körszimmetrikus Gauss-eloszlású, ezért a kovariancia-mátrix négy-négy elemét a két variancia meghatározza. A kereszt-tagok szintén speciálisak, és a komplex kovarianciából meghatározhatók, melyet a varianciához hasonlóan így definiálunk:

$$c_{xy} = \text{cov}\{x, y\} = \mathbf{E}\{(\overline{x - \mu_x})^T(y - \mu_y)\} \quad (1.62)$$

A komplex kovariancia láthatóan komplex értékű: azt fejezi ki, hogy a bemenet mekkora része, és milyen fázisforgatással jelenik meg a kimenetben.

A kereszt-tagok között tehát szintén összefüggések vannak, melyek miatt a kovariancia-mátrix így néz ki:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x^2}{2} & 0 & \frac{c_{xyr}}{2} & \frac{c_{xyi}}{2} \\ 0 & \frac{\sigma_x^2}{2} & -\frac{c_{xyi}}{2} & \frac{c_{xyr}}{2} \\ \frac{c_{xyr}}{2} & -\frac{c_{xyi}}{2} & \frac{\sigma_y^2}{2} & 0 \\ \frac{c_{xyi}}{2} & \frac{c_{xyr}}{2} & 0 & \frac{\sigma_y^2}{2} \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

A szükséges mennyiségek tehát meghatározhatók (1.60) mind a bemeneti, mind a kimeneti változókra történő kiértékelésével, és (1.62) kiértékelésével.

2. fejezet

Mintavételezés

2.1. Analóg jelek digitális reprezentációja

Ahhoz, hogy az analóg jeleket digitális eszközökkel, például számítógéppel feldolgozhassuk, először véges bitszámon ábrázolt számsorozatokká kell alakítani őket. Ez az időben és amplitúdóban folytonos jel diszkrét formára hozását jelenti mindkét tartományban. Az időtartománybeli diszkrétizálást mintavételezésnek, az amplitúdó-tartománybelit kvantálásnak nevezzük. Ez a két művelet általában egymás után történik, a mintavételezést leggyakrabban egy mintavevő-tartó (sample-hold) egység, a kvantálást pedig analóg-digitális átalakító valósítja meg.

A fenti két művelet egymással felcserélhető, és általában egymástól elkülönítve is vizsgálható (2.1. ábra). A következőkben először a mintavételezés, azután a kvantálás fontosabb kérdéseit fogjuk tárgyalni.

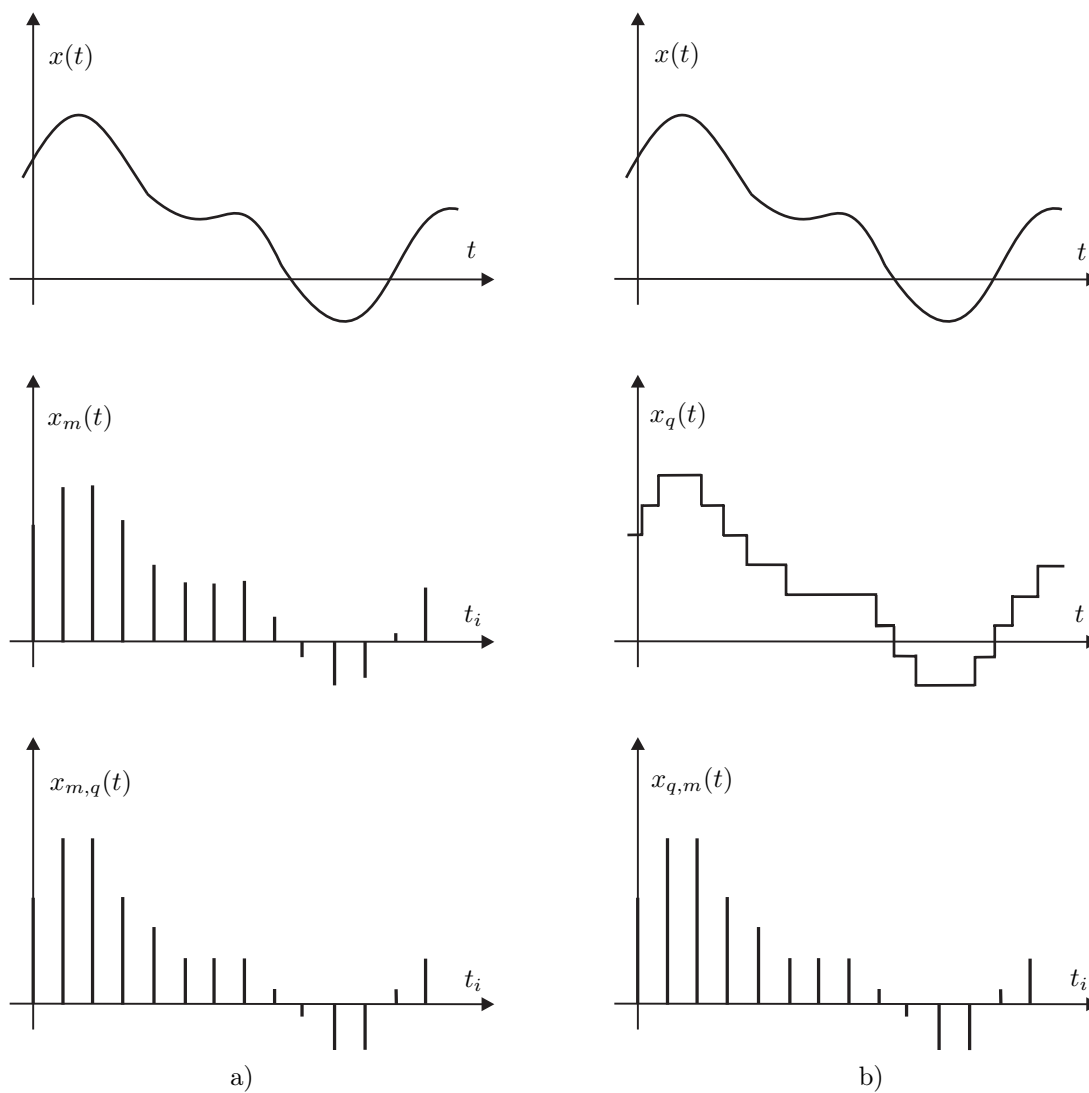
2.2. Mintavételezés az időtartományban

Mintavételezéskor az időben folytonos jelnek mintasorozatot feleltetünk meg. Ennek leggyakoribb módja az, hogy a mintasorozat a jel egyenletes időközökben felvett értékeit tartalmazza (2.2. ábra).

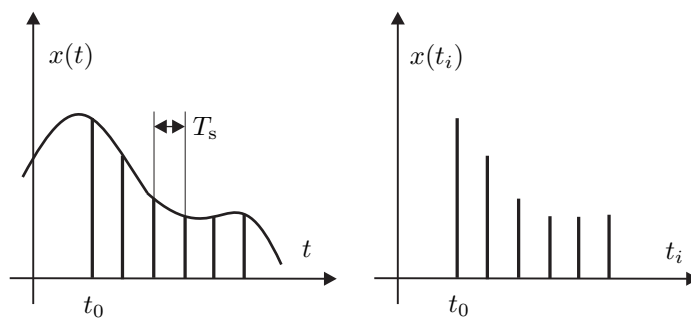
Az ábrán jól megfigyelhetjük, hogy az ismét egyenletes távolságokban felrajzolt mintavételi értékek sorozata az eredeti görbéhez hasonló benyomást kelt. Az az érzésünk támad, hogy megfelelő interpolációval az eredeti görbe szinte hibátlanul helyreállítható. Annál inkább ez a helyzet, minél sűrűbb a mintavételezés az eredeti jel változási sebességéhez képest. Feltehetjük a kérdést, hogy adott jelet végül is hogyan kell mintavételezni, ha a kis hibájú ill. hibátlan helyreállítást biztosítani szeretnénk.

A jel változási sebessége a jel spektrumával van szoros kapcsolatban. Ezért először Fourier-transzformálható (tranzienz) jelekre fogunk szorítkozni és a mintavételezésnek a Fourier-transzformáltra gyakorolt hatását vizsgáljuk. Ebben a tárgyban a Fourier-transzformáció következő alakját használjuk:

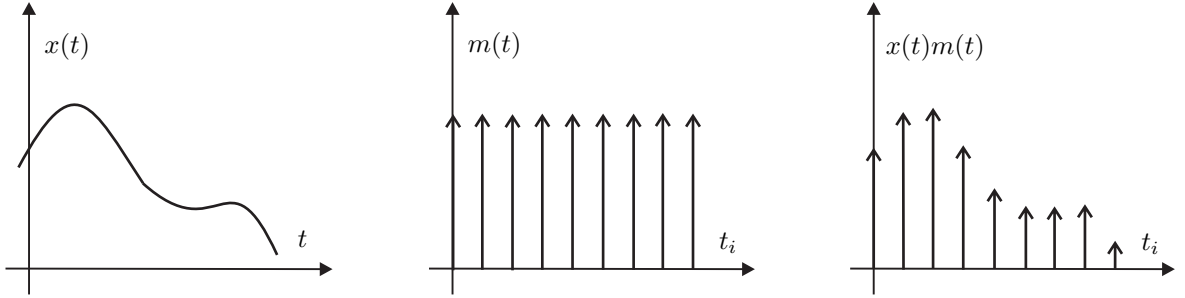
2. MINTAVÉTELEZÉS



2.1. ábra. A mintavételezés és kvantálás hatása a jelekre a) először mintavételezés, azután kvantálás b) először kvantálás, azután mintavételezés



2.2. ábra. A mintavételezés szokásos módja



2.3. ábra. A matematikai mintavételezés

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt. \quad (2.1)$$

A legnagyobb nehézséget az jelenti, hogy a számsorozatnak önmagában zérus a Fourier-transzformáltja, hiszen csak diszkrét helyeken különbözik nullától. Ezért az egyes értékekhez a vizsgálat céljából Dirac-impulzusokat rendelünk úgy, hogy a Dirac-impulzus-sorozat integrálja ne különbözzön lényegesen az eredeti jel integráljától:

$$x_m(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t_i)\delta\left(\frac{t-t_i}{T_s}\right) = x(t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t-iT_s}{T_s}\right), \quad t_i = iT_s \quad (2.2)$$

ahol $x_m(t)$ a mintavett jelet reprezentáló Dirac-impulzus-sorozat, $x(t)$ a mintavételezendő folytonos jel, a t_i időpontok a mintavételezés helyei, és T_s a mintavételi távolság. Így

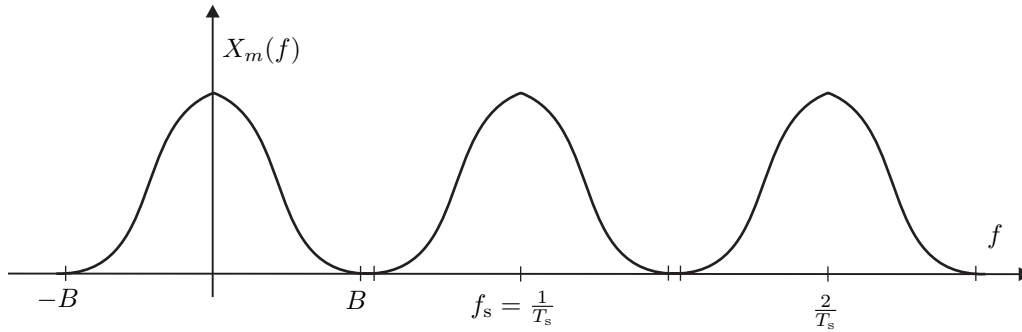
$$\int_{-\infty}^{\infty} x_m(t)dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(x(t_i) \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t-iT_s}{T_s}\right) dt \right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t_i)T_s \approx \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt. \quad (2.3)$$

Az (2.2) kifejezés utolsó tagja alapján a mintavételezés jelelméleti szempontból Dirac-impulzus-sorozattal történő szorzással modellezhető. Ezt a modellt matematikai mintavételezésnek nevezzük (2.3. ábra). Tegyük fel, hogy az egyik mintavételezési pont az origóba esik.

Be lehet látni, hogy a Dirac-impulzus-sorozat Fourier-sorba fejthető:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t-iT_s}{T_s}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{k}{T_s} t}, \quad (2.4)$$

és ez utóbbi kifejezés már könnyen Fourier-transzformálható, hiszen minden egyes komplex exponenciálisnak egy-egy Dirac-impulzus felel meg a frekvenciatartományban:



2.4. ábra. A mintavételezés hatása a Fourier-transzformáltra

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{k}{T_s} t} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\left(f - \frac{k}{T_s} \right) T_s \right) T_s. \quad (2.5)$$

Most már közvetlenül felírható a mintavételezett jel Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned} X_m(f) &= \mathcal{F} \{ x_m(t) \} = \mathcal{F} \left\{ x(t) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{t - iT_s}{T_s} \right) \right\} \\ &= X(f) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\left(f - \frac{k}{T_s} \right) T_s \right) T_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X \left(f - \frac{k}{T_s} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

A mintavételezett jel spektruma tehát az eredeti jel spektrumának $1/T_s$ távolságban vett ismétlődéseiből áll (2.4. ábra).

Ennek alapján a folytonos jelhez tartozó $X(f)$ spektrum (és így a folytonos időfüggvény) visszaállíthatóságának feltétele a következő: biztosítani kell azt, hogy az ismétlődő spektrumok ne lapolódjanak át, amit úgy lehet elérni, hogy $f_s = 1/T_s$ értékét eléggé nagyra választjuk. Ilyenkor ugyanis $X_m(f)$ -nek a $(-1/(2T_s), 1/(2T_s))$ intervallumba eső része pontosan megegyezik $X(f)$ -fel, azaz ideális aluláteresztő szűrővel $X(f)$ kivágható $X_m(f)$ -ből, és inverz Fourier-transzformációval $x(t)$ is kiszámítható.

Kimondható tehát az **I. mintavételi tétel** (időtartománybeli mintavételi tétel):

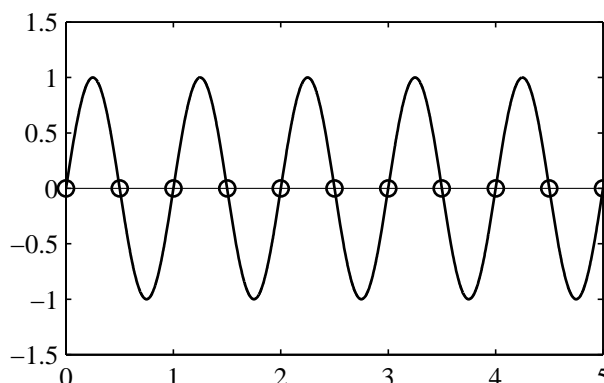
1. Tétel. *Ha egy jel Fourier-transzformáltja sávkorlátozott, azaz*

$$X(f) = 0, \quad \text{ha } |f| \geq B, \quad (2.7)$$

akkor

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B, \quad \text{azaz } T_s \leq \frac{1}{2B} \quad (2.8)$$

esetén a folytonos időfüggvény hibátlanul visszaállítható (azaz a mintavételezéssel nem veszítünk információt).



2.5. ábra. Szinuszjel hibás mintavételezése. o = mintavételi értékek, $f_s = 2f_1$.

A tételt első megfogalmazóiról elnevezve Shannon-féle tételnek ill. Nyquist-tételnek is hívják, az $f_s/2$ frekvenciát Nyquist-frekvenciának is nevezik.

Megjegyzés: Annak, hogy a spektrum már $f = B$ -nél sem lehet zérustól különböző, elvi jelentősége van. Az természetesen nem baj, ha $X(f)$ itt véges értékű, hiszen egyetlen pontban felvett véges függvényérték nem befolyásolná az inverz Fourier-transzformált alakját. Ha azonban itt Dirac-impulzus jelenik meg, ami $f_1 = B$ frekvenciájú szinuszjelnél (mely tágabb értelemben Fourier-transzformálható) meg is történik, akkor az $f_s = 2B$ frekvenciával mintavételezve súlyos hibát követnénk el (2.5. ábra). Szinuszjelre tehát a fentieknek megfelelő mintavételi előírás:

$$f_s > 2f_1. \quad (2.9)$$

2.3. Az időfüggvény helyreállítása

Az I. mintavételi tétel levezetése megmutatja, hogy a Fourier-transzformálton keresztül hogyan lehet helyreállítani a folytonos időfüggvényt. Ha azonban már tudjuk azt, hogy a mintavételi tételt betartottuk, akkor a mintavételi értékekből a folytonos időfüggvény értékeit közvetlenül (Fourier-transzformáció nélkül) is kiszámíthatjuk. A megfelelő formulához például az alábbi módon juthatunk el.

A mintavételezett jel spektrumából az eredeti jel spektruma egy négyszög-ablakkal való szorzás segítségével állítható elő:

$$X(f) = X_m(f) \operatorname{rect}\left(\frac{f}{1/T_s}\right), \quad (2.10)$$

ahol

$$\operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |x| < 0.5, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Elvégezve az inverz Fourier-transzformációt:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_m(t) * \mathcal{F}^{-1} \left\{ \text{rect} \left(\frac{f}{1/T_s} \right) \right\} \\
 &= \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_s) \delta \left(\frac{t - iT_s}{T_s} \right) \right) * \text{sinc} \left(\pi \frac{t}{T_s} \right) \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_s) \text{sinc} \left(\pi \frac{t - iT_s}{T_s} \right), \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

ahol

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \tag{2.12}$$

Az (2.11) kifejezést *interpolációs formulának* nevezzük, mert a minták közötti jeleértékeket a minták felhasználásával interpolálja.

Figyeljük meg, hogy $t \neq iT_s$ esetén $x(t)$ előállításában az összes (végtelen sok) $x(iT_s)$ értékre szükség van. Gyakorlatilag jó közelítést ad azonban az, ha mindkét irányban eléggé távoli $x(iT_s)$ értékeket is figyelembe tudunk venni, mert a sinc-függvény még messzebb már kicsi.

2.4. Mintavételezés a frekvenciatartományban

A számítógépes adatfeldolgozás során gyakran át kell térnünk az időtartományból a frekvenciatartományba. Ilyenkor a frekvenciatengely mentén is csak diszkrét pontokban tudjuk kiszámítani a Fourier-transzformáltat, ezért szükségünk van a (folytonos) Fourier-transzformált megfelelő mintavételezését biztosító tételre is.

Ha észrevesszük, hogy a Fourier-transzformáció és inverze matematikailag azonos alakú operációk, akkor a megfelelő kifejezések szisztematikus cseréjével közvetlenül kimondható a **II. mintavételi tétel** (frekvenciatartománybeli mintavételi tétel):

2. Tétel. *Ha egy jel időkorlátozott, azaz csak egy T időtartamon belül különbözik 0-tól, akkor spektrumát (Fourier-transzformáltját)*

$$\Delta f \leq \frac{1}{T} \tag{2.13}$$

távolságokban mintavételezve a spektrum hibátlanul helyreállítható (azaz a mintavételezéssel nem veszítünk információt).

Figyeljük meg, hogy bár $2B$ szerepét T vette át, a tétel megfogalmazásánál nem törődünk a T hosszúságú időtartam helyével, ugyanis az $1/\Delta f$ távolságokban történő ismétlések a T időtartam tetszőleges elhelyezkedése esetén sem lapolódnak át. Nem bajlódtunk az intervallum szélén a Dirac-impulzus kizárásával sem, hiszen az időfüggvény nem tartalmazhat ilyen anomáliákat.

2.5. A közelítő mintavételi tétel

Az I. és II. mintavételi tételt ismerve úgy vélhetjük, hogy a két tételt idő- és sávkorlátozott jelre alkalmazva megoldottuk a mintavételezés problémáját. Sajnos a helyzet nem ennyire egyszerű, ugyanis bebizonyítható, hogy egy jel és Fourier-transzformáltja nem lehet egyszerre idő- ill. sávkorlátozott, tehát például az interpolációs formulában elvileg nem tekinthetünk el az $i \rightarrow \infty$ határátmenettől. Szerencsére azonban sok jel adott időtartamon ill. frekvenciasávon kívül csak elhanyagolhatóan tér el nullától. Ilyen jeleket véges sok adattal jellemezhetünk. Ezt mondja ki a közelítő mintavételi tétel:

3. Tétel. *Ha egy jel egy T hosszúságú időtartamon kívül közelítőleg nulla, és spektruma is közelítőleg sávkorlátozott B sávkorlással, akkor*

$$N \geq 2BT \quad (2.14)$$

adattal kis hibával jellemezhető.

Például az időtartományban:

$$N = \frac{T}{T_s} \geq \frac{T}{\frac{1}{2B}} = 2BT. \quad (2.15)$$

Ez a tétel biztosítja azt, hogy a számítógépen véges sok adattal számolva is kielégítő pontosságú eredményt kaphassunk.

Megjegyzés: Az időtartományban $f_s = 2B$ esetén elegendő ennyi adat. Ha azonban $f_s > 2B$, akkor a T hosszúságú időintervallumból $N' = Tf_s > N$ adatot kell vennünk, de ezek az adatok némileg redundánsak. A $2BT$ kifejezés tehát az időfüggvényből nyerhető *független* adatok számát adja meg.

2.6. A diszkrét Fourier-transzformáció, interpoláció FFT segítségével

A mintavételi tételek ismeretében már részleteiben is megérthető a diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) alakja.

Induljunk ki a véges Fourier-transzformáltból és közelítsük az integrált téglányösszeggel:

$$X_T(f) = \int_0^T x(t)e^{-j2\pi ft} dt \approx \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s)e^{-j2\pi f iT_s T_s}. \quad (2.16)$$

A fenti kifejezést számítógéppel kiértékelve a Fourier-transzformáltat is diszkrét pontokban számítjuk ki. Legyenek ezek a pontok egy Δf frekvencialépés egész számú többszöröseinél:

2. MINTAVÉTELEZÉS

$$X(k\Delta f) = \sum_{i=0}^{N-1} x(iT_s) e^{-j2\pi k\Delta f iT_s} T_s. \quad (2.17)$$

A kérdés most már csak az, hogy Δf mekkora legyen, és k milyen értékeket vegyen fel ahhoz, hogy ne veszítsünk információt.

A frekvenciatartománybeli mintavételi tétel értelmében

$$\Delta f \leq \frac{1}{T}. \quad (2.18)$$

Mivel a feleslegesen sűrű mintavétel feleslegesen redundáns adatokat eredményez, célszerűnek látszik a

$$\Delta f = \frac{1}{T} \quad (2.19)$$

választás.

Az időtartománybeli mintavételezés miatt a spektrum $1/T_s$ távolságokkal periodikus. Ez azt jelenti, hogy

$$N_F = \frac{1/T_s}{\Delta f} = \frac{T}{T_s} = N \quad (2.20)$$

pontban kell kiszámítanunk a Fourier-transzformáltat, ami logikusnak tűnik, hiszen N -pontos regisztrátumból N pontot kiszámítva a független adatok száma nem változik. (A DFT-nél megengedünk komplex bemenő adatokat is. Valós bemenő adatok esetén elvben elegendő lenne $N/2$ komplex pont is, ugyanis a komplex eredmény valós és képzetes része is független adatot jelent, és valós jel Fourier-transzformáltjára igaz, hogy $X(k\Delta f) = \overline{X(-k\Delta f)}$, ezért az N pont fele tartalmaz csak független információt.)

Vegyük észre azt is, hogy a fentiekkel rögzítettük a kitevőkben szereplő $T_s\Delta f$ szorzat értékét is:

$$T_s\Delta f = T_s \frac{1}{T} = \frac{1}{N}. \quad (2.21)$$

Azt kell még eldöntenünk, hogy k milyen értékeket vegyen fel (a periodicitás miatt szabad kezünk van). Szimmetria-okokból k -t is ugyanazokon az értékeken futtatjuk végig, mint i -t ($0 \leq i \leq N-1$):

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} T_s \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.22)$$

A fenti kifejezésben immár az egyetlen, a fizikai idővel kapcsolatban lévő tényező a T_s szorzó. Ezt a jelfeldolgozásban általában egységnyinek szokták tekinteni (aminek következményeképpen a felhasznált frekvenciatartomány 0 és 1 között helyezkedik el), és ezzel előttünk áll az immár időfüggetlen diszkrét Fourier-transzformáció (DFT):

$$X_k = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi \frac{ki}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.23)$$

Végül, ha T_s egységnyi, akkor $\Delta f = 1/N$, és így az inverz DFT:

$$x_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi \frac{ki}{N}} \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.24)$$

A DFT-nek létezik a műveletek ügyes csoportosításán alapuló gyors kiértékelő algoritmus is (gyors Fourier-transzformáció, FFT). Ezért a DFT hatékonyan alkalmazható például az interpoláció gyors elvégzésére. Az alapelv nem más, mint az interpolációs formula levezetésekor bemutatott lépések gyors végrehajtása az FFT segítségével (2.6. ábra). A szükséges műveletek száma lényegesen kisebb lehet, mint amennyi az interpolációs formula kiértékeléséhez kell, még akkor is, ha az interpolációs formula kiértékeléséhez a sinc függvény értékeit előre kiszámítva, táblázatban tároljuk.

2.7. Sztochasztikus jelek mintavételezése

A mintavételi tételek előző alakjai Fourier-transzformálható (tranziens, esetleg periodikus) jelekre vonatkoznak. Gyakran kell azonban sztochasztikus jeleket is feldolgoznunk. Az ezekre vonatkozó tétel bizonyítása körülményesebb, ezért itt csak kimondjuk:

Mintavételi tétel sztochasztikus jelekre

4. Tétel. *Ha egy sztochasztikus folyamat teljesítménysűrűség-spektruma sávkorlátozott, azaz*

$$S(f) = 0 \quad \text{ha} \quad |f| \geq B, \quad (2.25)$$

akkor

$$T_s \leq \frac{1}{2B} \quad (2.26)$$

közönként mintavételezve lényegében nem veszítünk információt, azaz az interpolációs formula négyzetes értelemben konvergál a folytonos időfüggvény értékeihez:

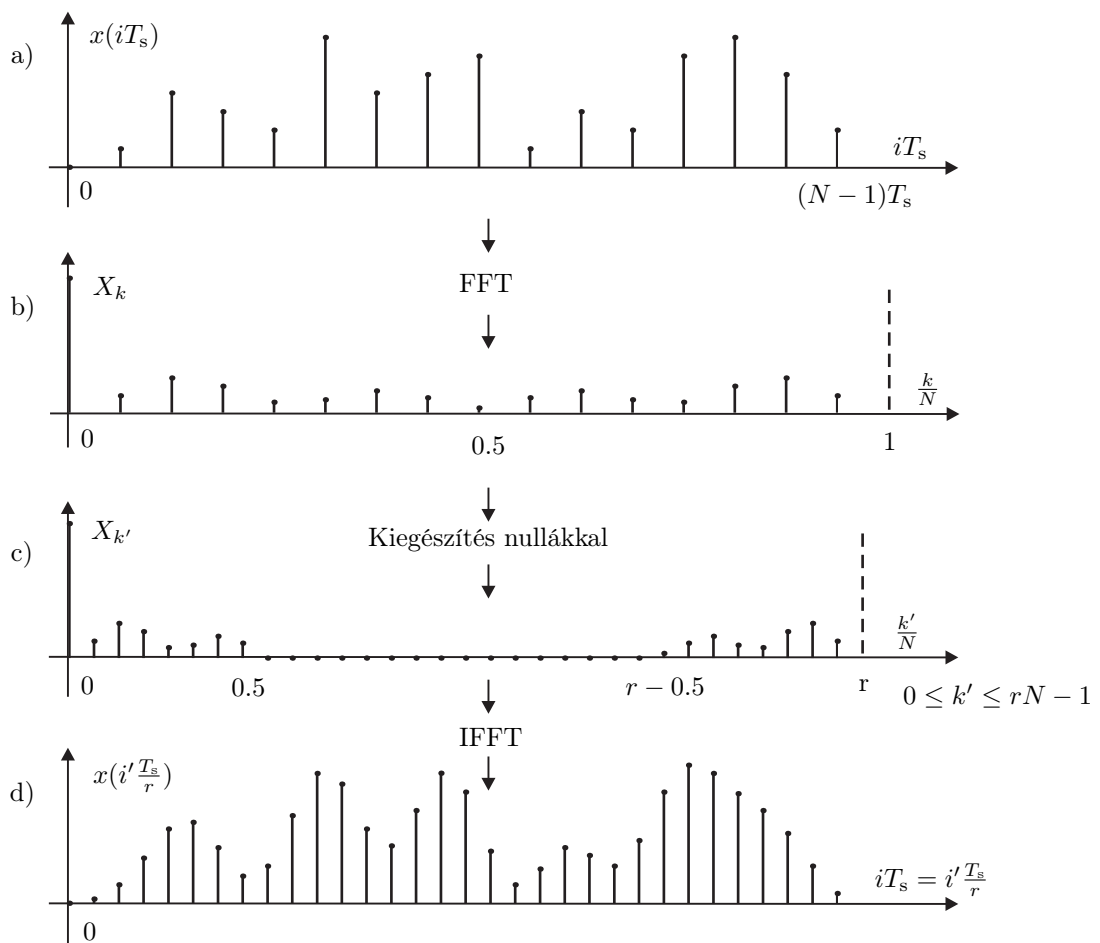
$$\lim_{M \rightarrow \infty} E \left\{ \left(x(t) - \sum_{i=-M}^M x(iT_s) \operatorname{sinc} \left(\pi \frac{t - iT_s}{T_s} \right) \right)^2 \right\} = 0. \quad (2.27)$$

Megemlítjük még, hogy a fenti feltétel az I. mintavételi tétel miatt a korrelációfüggvény ilyen mintákból való helyreállíthatóságát is közvetlenül biztosítja, hiszen ennél $X(f)$ szerepét $S(f)$ veszi át. A mintákból diszkrét pontokban kiszámítható korrelációértékekből tehát a folytonos korrelációfüggvény is megkapható.

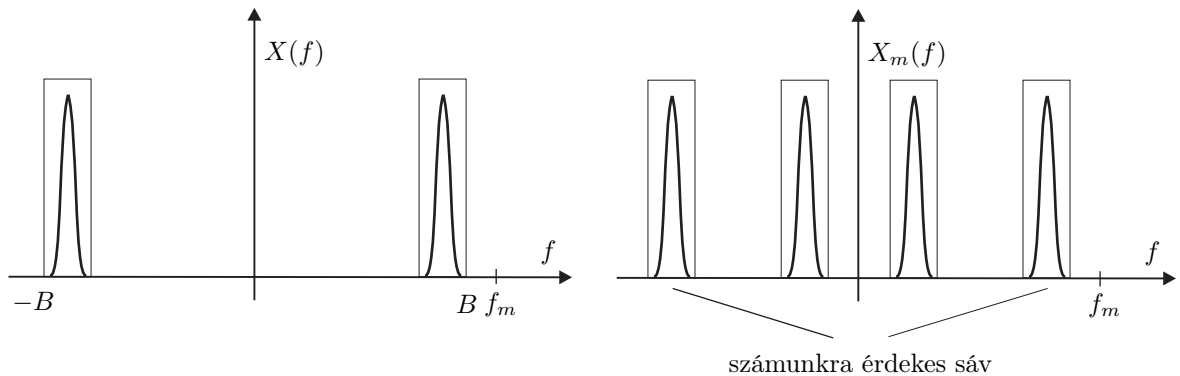
2.8. Sávkorlátozott jelek mintavételezése

Az előzőekben ismertetett mintavételi tételek kimondásakor abból a hallgatólagos feltételezésből indultunk ki, hogy a jel spektruma „kitölti” a $(-B, B)$ frekvenciasávot,

2. MINTAVÉTELEZÉS



2.6. ábra. Interpoláció FFT segítségével a) az eredeti időfüggvény, b) a diszkrét Fourier-transzformált c) a spektrumok „széttolása”, vagyis $(r - 1)N$ db nulla behelyezése után kapott eredmény d) az interpoláció eredménye



2.7. ábra. Keskenysávú jel mintavételezése

ezért itt semmiféle betranszformálódás nem engedhető meg. Ha azonban a jel spektruma nem ilyen, például csak egy ismert keskeny sávban különbözik nullától, akkor enyhébb feltételt is megfogalmazhatunk: elég azt biztosítani, hogy a számunkra fontos sávba ne transzformálódjon be teljesítmény (2.7. ábra).

f_s alkalmas megválasztásával $f_s \ll 2B$ is megengedhető lehet. Gondosan ügyelnünk kell azonban f_s helyes megválasztására: kis tévedés is elég lehet ahhoz, hogy a jel spektruma jelentősen torzuljon az esetleges betranszformálódás miatt.

2.9. Alul- és túlmintavételezés

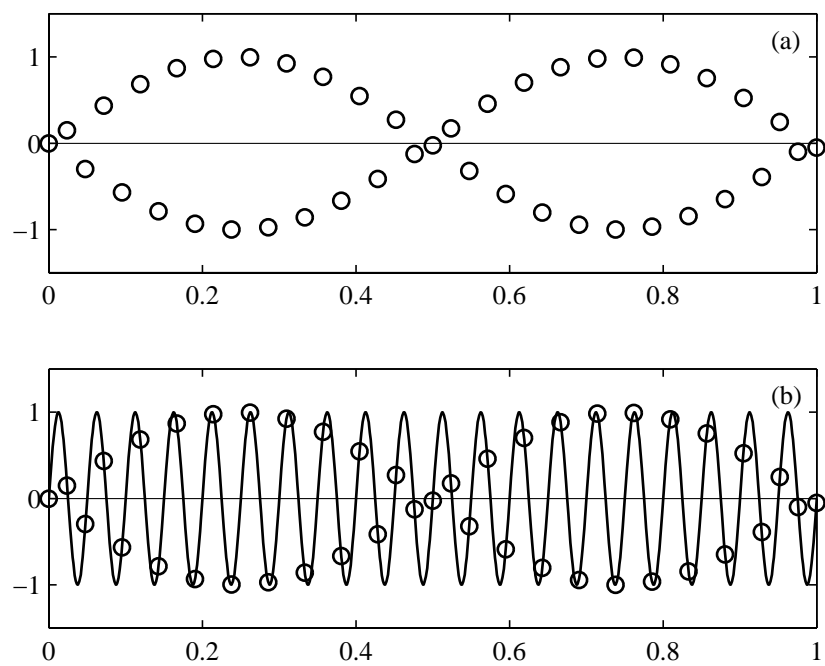
A mintavételi tételt nem szabad mereven alkalmazni. Előfordulhatnak olyan mérési feladatok, amikor nem kell minden lehetséges információt kinyernünk az adott hosszúságú jelből, például ritkább mintavételezéssel is elegendő számú mintánk van megfelelően kicsi varianciájú átlagérték képzéséhez. Mi több, a ritka mintavételezéssel nyert értékek egymástól statisztikailag függetlenek is, ami az eredmény statisztikai jellemzését egyszerűsíti.

Másrésről, ha az időfüggvény vizsgálatát kell elvégeznünk, például a vizuális kiértékelésnél, általában nem elegendő a mintavételi tétel egyszerű teljesítése (2.8. ábra).

Annak ellenére, hogy az ábrán látható pontsorozat elvben minden információt tartalmaz, a periódusonként alig valamivel több, mint 2 mintából a szinusz szabad szemmel nem ismerhető fel. Utólagos interpoláció helyett ilyenkor célszerűbb a sűrűbb mintavételezés, $f_s \gg 2B$ frekvenciával. Tegyük még azt is hozzá, hogy ha csonkított regisztrátumunk van (például sztochasztikus jelből), akkor a csonka regisztrátum sáv szélessége a levágás miatt jóval nagyobb a teljes (végtelen hosszúságú) jel sáv szélességénél, és ezért a teljes jel kisebb sáv szélessége alapján mintavételezve a helyreállítás hibája nagy lesz a regisztrátum széle környékén.

Megemlítjük, hogy ide tartozik az ún. ekvivalens mintavételezés. Periodikus jeleknél a mintákat vehetjük eltérő periódusokból, kicsit eltolt fázishelyzetben: ha az időzítés pontos, ezekből a mintákból az oszcilloszkóp meg tudja jeleníteni a teljes periódust, annak ellenére, hogy a szigorúan vett mintavételi tételt nem tartjuk be.

2. MINTAVÉTELEZÉS



2.8. ábra. A túlmintavételezés szükségességének illusztrációja

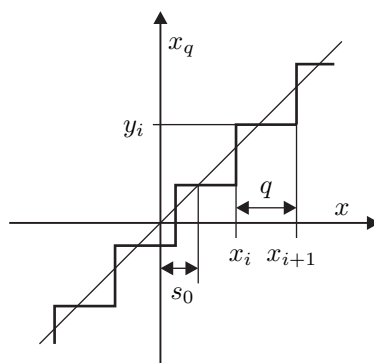
3. fejezet

Kvantálás

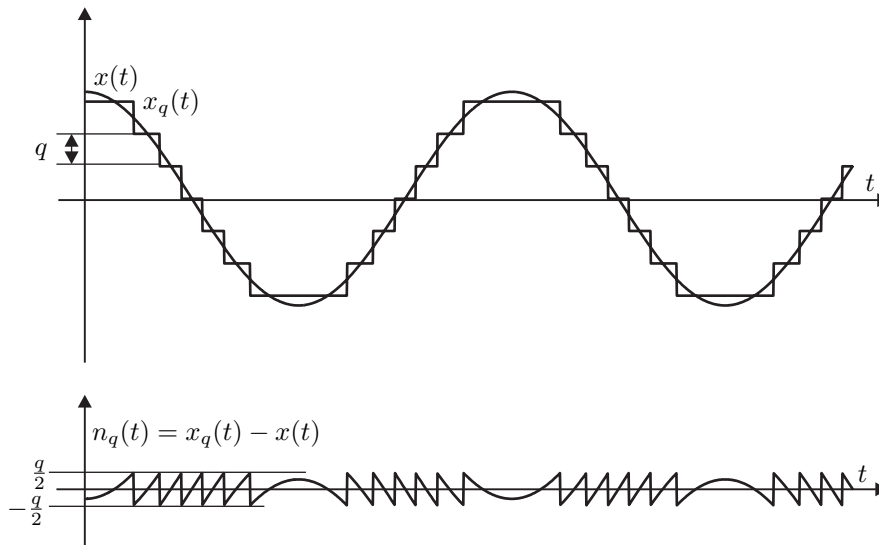
A kvantálásnál – annak ellenére, hogy finom felbontású kvantálásnál a kvantált jel erősen emlékeztet az eredeti jelre – nem lehet biztosítani a kvantálatlan jel hibátlan helyreállítását. Ennek egyik legfőbb oka az, hogy a kvantálás nemlineáris művelet még akkor is, ha az A/D konverziónak leginkább megfelelő modellt, az ún. egyenletes kvantálót vizsgáljuk (3.1. ábra).

Tehát a mintavételezéssel ellentétben itt nem az a célunk, hogy valamilyen, a mintavételezéshez hasonló feltételt adjunk az egyértelmű visszaállíthatóságra. Mit tudunk tehát garantálni? A válasz az, hogy az eredeti jel momentumai (hatványainak várható értéke) közül néhányat őrizzünk meg a kvantált jelben (természetesen például digitális jeleknél, ahol csak két amplitúdószint van, teljes visszaállíthatóságot jelentene!). A tervezés során felmerülő kérdésekre (mely momentumok szükségesek) az alább ismertetésre kerülő elmélet adja meg a választ. Például egy jel átlagértékének (DC szintjének) mérésekor csak az első rendű momentum pontos átvitelére van szükség, így akár egybites kvantálót is alkalmazhatunk.

A kvantálás egyszerűbb tulajdonságait a mintavételezéssel analóg módon tárgyaljuk. Ki fog derülni, hogy formálisan a mintavételezés és a kvantálás lényegében ugyanaz a matematikai művelet.



3.1. ábra. Az egyenletes kvantáló



3.2. ábra. Szinuszjel kvantálása és a kvantálási hiba

3.1. A kvantálási hiba vizsgálata

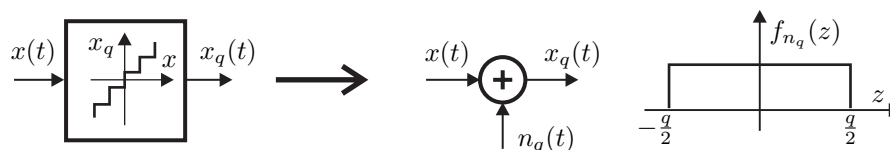
A nemlineáris karakterisztika matematikai leírása és vizsgálata nem sok reménnyel kecsegtet. Ehelyett vegyük szemügyre a kvantált jel és az eredeti jel különbségét, az ún. kvantálási hibát egy egyszerű esetben (3.2. ábra).

A szinuszjel durva kvantálásakor a következő megfigyeléseket tehetjük:

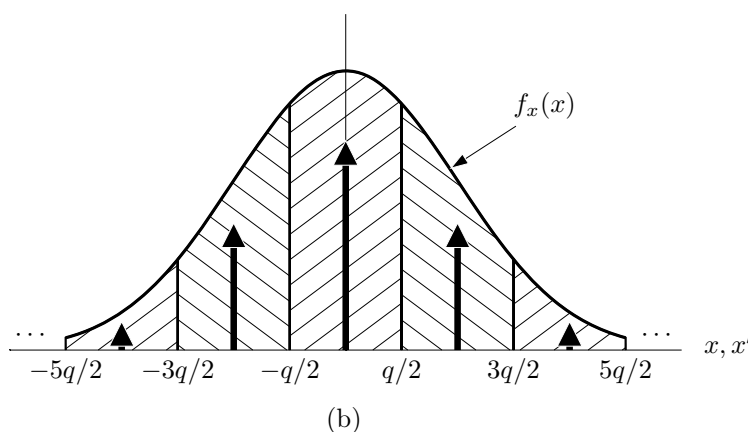
- A kvantálási hiba közelítőleg fűrészfog alakú azokon a helyeken, ahol a szinuszjel görbülete kicsi. Ez azt jelenti, hogy eloszlása közelítőleg egyenletes, és annál jobb a közelítés, minél kisebb q értéke a szinuszjel amplitúdójához képest.
- A kvantálási hiba alakja nemigen emlékeztet a szinuszjelre, annak ellenére, hogy determinisztikus transzformációval kaptuk belőle. Ennek oka az, hogy a kvantálási hiba az eredeti jelnek a legközelebbi kvantumszinthez képest lokális viselkedését írja le. Ezért ha a két jel keresztkorreláció függvényét képezzük, az várhatóan kicsi lesz, és a kvantum nagyság csökkentésével egyre kisebb.
- A kvantálási hiba láthatóan sok felharmonikust tartalmaz, határfrekvenciája jóval nagyobb, mint az eredeti jelé, és a határfrekvencia q csökkentésével egyre nő.

A fentiek alapján a kvantálási hibát célszerűnek látszik statisztikai alapon vizsgálni és a kvantálásra a következő, ún. zajmodellt bevezetni (3.3. ábra).

Statisztikai szempontból az egyenletes kvantáló hatását additív zajjal modellezzük, melynek a következő tulajdonságai vannak:



3.3. ábra. A kvantálás zajmodellje



3.4. ábra. Az eredeti és a kvantált jel sűrűségfüggvénye

- egyenletes eloszlású;
- az eredeti jellel korrelálatlan (esetleg független az eredeti jeltől);
- fehér spektrumú.

Ez az ún. zajmodell általában akkor alkalmazható, ha a q kvantum nagyság elég kicsi. Későbbi fejezetekben ennek a pontosabb feltételeit fogalmazzuk meg.

3.2. A kvantáló kimenetének sűrűségfüggvénye és karakterisztikus függvénye

A jel amplitúdójának sűrűségfüggvénye megadja, hogy mely amplitúdószintnek milyen valószínűsége van. Ez a függvény alapvető jelentőségű a kvantálás vizsgálatakor.

Kérdés, hogyan alakul a kvantált jel amplitúdójának sűrűségfüggvénye. A kvantált jeltől ugyanis ezt tudjuk az amplitúdó-hisztogram segítségével közelíteni. Látni fogjuk, hogy a kvantált jel sűrűségfüggvényét megkapjuk az eredeti jel sűrűségfüggvényének szűrésével és mintavételezésével. A sűrűség-, illetve a karakterisztikus függvények használatának az előnye, hogy a magasabb rendű momentumok vizsgálatát is lehetővé teszi.

Jelölje az eredeti jelet x , a valószínűség-sűrűségfüggvényét $f_x(x)$. Tudjuk, hogy egy valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a valószínűség-sűrűségfüggvényének

3. KVANTÁLÁS

inverz Fourier-transzformáltja. Tehát

$$\Phi_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{jux} dx.$$

Legyen a kvantált jel x' és valószínűség-sűrűségfüggvénye $f_{x'}(x)$. Ez utóbbi olyan Dirac-impulzus-sorozat, amelynek elemei az amplitúdó-tengelyen a megfelelő kvantálási szinteknek felelnek meg.

A 3.4. ábrán láthatjuk a kvantálás hatását a valószínűség-sűrűségfüggvényre. Megfigyelhető, hogy a kvantálási lépcsőknek megfelelő területtel „arányos” Dirac-impulzusokat kapunk. Emlékeztetünk arra, hogy a Dirac-impulzusnak nincs függvényértéke, csak azt tudjuk, hogy az adott tartományban az integrálja véges. Ebben az esetben ez azt jelenti, hogy az eredeti jel valószínűség-sűrűségfüggvénynek megfelelő területével egyezik meg az adott Dirac-impulzus integrálja. Például a 0 értéknél elhelyezkedő Dirac-impulzusra igaz, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_0 \delta(x) dx = \int_{-q/2}^{q/2} f_x(x) dx.$$

A különböző kvantálási szintekhez (... , $-3q/2$ -től $-q/2$ -ig, $-q/2$ -től $q/2$ -ig, $q/2$ -től $3q/2$ -ig, ...) tartozó sűrűségfüggvény tehát „összehúzódik” egy megfelelő Dirac-impulzus-sorozattá.

Ez a művelet egy fontos lépésben eltér az időtartománybeli mintavételezéstől. Két lényeges lépésre bontható, mégpedig:

- konvolúció egy négyszög alakú impulzussal,
- mintavételezés (a „szokásos” módon).

A művelet részleteinek bemutatáshoz térjünk vissza a 3.4. ábrához. Az ábrán is látható módon $f_{x'}(x)$ -t, a kvantált jel valószínűség-sűrűségfüggvényét, tehát a Dirac-impulzus-sorozatot kifejezhetjük az alábbi módon:

$$\begin{aligned} f_{x'}(x) &= \dots + \delta(x + q) \int_{-\frac{3q}{2}}^{-\frac{q}{2}} f_x(x) dx + \delta(x) \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} f_x(x) dx + \\ &\quad + \delta(x - q) \int_{\frac{q}{2}}^{\frac{3q}{2}} f_x(x) dx + \dots = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mq) \int_{mq - \frac{q}{2}}^{mq + \frac{q}{2}} f_x(x) dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

A képletek egyszerűsítése céljából jelöljük a négyszög alakú impulzust a következő módon:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha } -\frac{q}{2} < x < \frac{q}{2} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Figyeljük meg, hogy ennek a függvénynek a területe 1. Képezzük $f_n(x)$ és $f_x(x)$ konvolúcióját, így megkapjuk a következő összefüggést:

$$f_n(x) * f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x - \alpha) f_x(\alpha) d\alpha = \int_{x-\frac{q}{2}}^{x+\frac{q}{2}} \frac{1}{q} f_x(\alpha) d\alpha. \quad (3.2)$$

Vezessük be továbbá az alábbi Dirac-impulzus-sorozatot a következő módon:

$$c(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q\delta(x - mq) \quad (3.3)$$

Így tehát 3.1 és 3.3 miatt írható:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mq) \int_{mq-\frac{q}{2}}^{mq+\frac{q}{2}} f_x(x) dx = (f_n(x) * f(x)) c(x).$$

Felhasználjuk a Dirac-impulzus-sorozat következő tulajdonságát:

$$\delta(x - mq)g(x) = \delta(x - mq)g(mq),$$

így

$$(f_n(x) * f(x)) c(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mq) \int_{mq-\frac{q}{2}}^{mq+\frac{q}{2}} f_x(x) dx$$

Végül folytatva a (3.1) felírást a következő összefüggést kapjuk:

$$f_{x'}(x) = (f_n(x) * f(x)) c(x).$$

Megmutattuk tehát, hogy a kvantált jel valószínűség-sűrűségfüggvénye előállítható az eredeti jel valószínűség-sűrűségfüggvényéből egy konvolúciós lépés, majd mintavételezés segítségével. Az 3.5. ábrán egy egyszerű esetben is követhetjük a kvantálás lépéseit.

Mi történik a karakterisztikus függvénnyel? Számoljuk ki az előbb bevezetésre került $f_n(x)$ függvény inverz Fourier-transzformáltját:

$$\Phi_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{jux} dx = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q} e^{jux} dx = \text{sinc} \frac{qu}{2}.$$

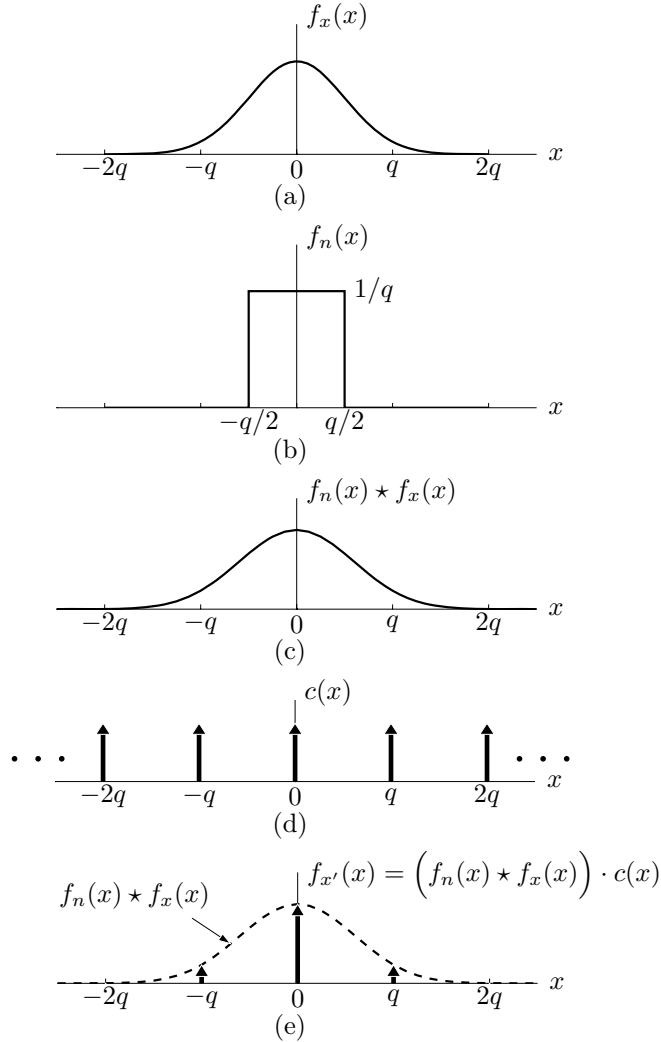
Így tehát – a 3.6. ábrán követhető lépésekkel – azt kapjuk, hogy a kvantáló kimenetének karakterisztikus függvénye a következő:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \Phi_x(u + l\Psi) \text{sinc} \left(\frac{q(u + l\Psi)}{2} \right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Phi_x(u + l\frac{2\pi}{q}) \text{sinc} \left(\frac{qu}{2} + l\pi \right)$$

ahol

$$\Psi = \frac{2\pi}{q}.$$

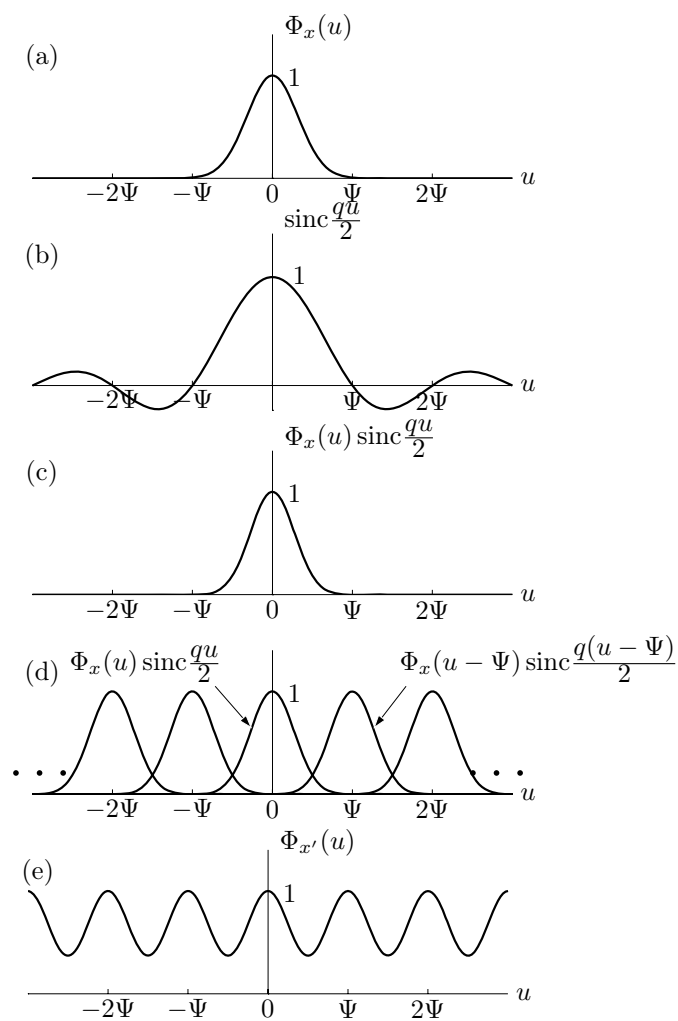
3. KVANTÁLÁS



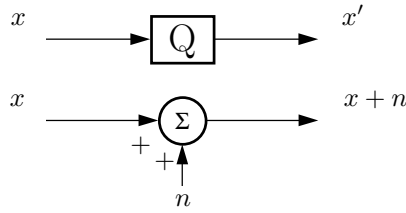
3.5. ábra. A kvantált jel valószínűség-sűrűségfüggvényének származtatása: (a) az eredeti jel valószínűség-sűrűségfüggvénye, (b) a négyzet alakú pulzus, (c) a négyzet alakú pulzus és az eredeti jel valószínűség-sűrűségfüggvényének konvolúciója, (d) a mintavételezés, azaz a moduláló Dirac-impulzus-sorozat, (e) a kvantált jel valószínűség-sűrűségfüggvénye.

3.1. táblázat. A mintavételezés és a kvantálás egymásnak megfelelő változói

mintavételezés	i	t	k	ω	T_s	$\Omega = 2\pi/T_s$
kvantálás	m	x	l	u	q	$\Psi = 2\pi/q$



3.6. ábra. A kvantált jel karakterisztikus függvényének származtatása



3.7. ábra. A kvantálás és az additív zaj hozzákeverés modellje

A Ψ változót tekinthetjük úgy is, mint a „kvantálási körfrekvencia”, a mintavételezés analógiájára. A további egymásnak megfeleltethető mennyiségeket a 3.1. táblázat tartalmazza, ahol i, m, k, l indexek, t az időváltozó, x az amplitúdóváltozó, ω a körfrekvencia, u a karakterisztikus függvény független változója, T_s a mintavételi idő, q a kvantumnagyság, Ω a mintavételi körfrekvencia ($2\pi f_s$), Ψ a kvantáláshoz tartozó „körfrekvencia” a karakterisztikus függvény tartományában.

3.3. A kvantálás és az additív zajmodell összehasonlítása

A 3.1. alfejezetben megemlítettük, hogy a kvantálási hibát lehetséges additív, egyenletes eloszlású zajjal modellezni. Ebben az alfejezetben megvizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat van az additív zajmodell és az előző részben kapott eredmények között.

Tekintsük tehát a 3.7 ábrát. Láthatjuk, hogy az additív, egyenletes eloszlású zaj hozzákeverése esetén a kvantáló kimenetének valószínűség-sűrűségfüggvénye a következő:

$$f_{x+n}(x) = f_n(x) * f_x(x),$$

hiszen az összeadás konvolúcióba megy át a valószínűség-sűrűségfüggvények esetén. Ebben az összefüggésben az egyenletes eloszlású zaj várható értéke 0, varianciája $\frac{q^2}{12}$.

Ezzel szemben a tényleges kvantálás után kapott sűrűségfüggvény a következő:

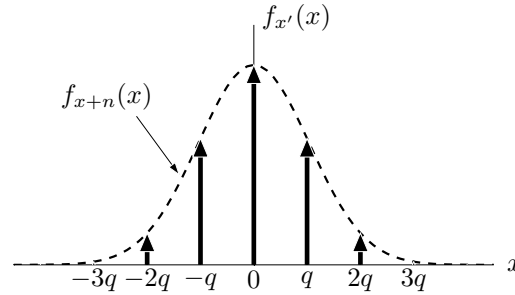
$$f_{x'}(x) = f_{x+n}(x)c(x),$$

felhasználva az 3.2 összefüggést. A képleteket összehasonlítva világos, hogy a kvantálás és a zajhozzákeverés nem ugyanaz a művelet. Az első esetben a sűrűségfüggvény egy Dirac-impulzus-sorozat, még a második esetben a kvantáló kimenetén a sűrűségfüggvény általában folytonos. A 3.8 ábrán látható a két valószínűség-sűrűségfüggvény. Világos, hogy az additív zajmodell sűrűségfüggvényét a matematikai mintavételezésnek alávetve megkapjuk a kvantálás valószínűség-sűrűségfüggvényét.

Továbbá az additív zajjal modellezett kvantáló kimenetének karakterisztikus függvénye:

$$\Phi_{x+n}(u) = \Phi_x(u)\Phi_n(u) = \Phi_x(u)\text{sinc}\frac{qu}{2},$$

amely megfelel az előzőekben kapott eredménynek. Ebben az esetben is látható a szoros analógia a mintavételezés és a kvantálás között.



3.8. ábra. A kvantálás és az additív zaj valószínűség-sűrűségfüggvénye

3.4. Kvantálási tételek

Az előző alfejezetekben bemutatott összefüggésekkel már elég ismeretünk van ahhoz, hogy kimondjuk a mintavételezési tétel megfelelőjét a kvantálás esetében. Az alábbiakban ismertetésre kerülő két tételt nevezzük kvantálási tételeknek.

Az eredeti jel $\Phi_x(u)$ karakterisztikus függvény egyértelmű helyreállíthatóságához $\Phi_{x'}(u)$ -ből szükséges, hogy a megfelelő komponensek $\Phi_{x'}(u)$ -ban ne lapolódjanak át. Tehát az úgynevezett első kvantálási tétel a következő:

1. Tétel (I. kvantálási tétel). *Ha az x jel karakterisztikus függvénye „sávkorlátozott”, azaz*

$$\Phi_x(u) = 0, \text{ ha } |u| > \frac{\pi}{q} = \frac{\Psi}{2},$$

akkor

- a $\Phi_{x'}$ -ben található ismétlődések nem lapolódnak át,
- az x karakterisztikus függvénye visszaállítható $\Phi_{x'}(u)$ -ből,
- az x valószínűség-sűrűségfüggvénye visszaállítható $f_{x'}(x)$ -ből.

Az első kvantálási tétel kimondja tehát, hogy ha a q kvantumnagyság elég kicsi, akkor a kvantált jelből egyértelműen helyreállítható az eredeti jel. A visszaállítás részleteit a következő alfejezet tárgyalja.

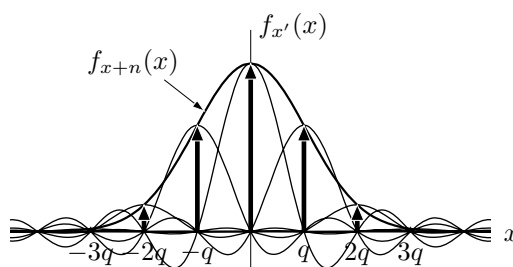
Egy másik kvantálási tételt is kimondunk, amely az x momentumaira vonatkozik.

2. Tétel (II. kvantálási tétel). *Ha az x jel karakterisztikus függvénye „sávkorlátozott”, azaz*

$$\Phi_x(u) = 0, \text{ ha } |u| > \frac{2\pi}{q} - \varepsilon = \Psi - \varepsilon,$$

ahol ε tetszőlegesen kicsi pozitív szám, akkor x momentumai visszaállíthatók a kvantált jel momentumaiból.

3. KVANTÁLÁS



3.9. ábra. Az interpoláció illusztrációja

Fontos megjegyeznünk, hogy a II. kvantálási tételnek *nincs* megfelelője az időtartománybeli mintavételezési tételek között.

Mit mondanak a kvantálási tételek? Ahogy a fejezet elején megjegyeztük, általában nem tudjuk garantálni az eredeti jel visszaállíthatóságát. Ez azt jelenti, hogy általában a jel valószínűségi sűrűségfüggvénye nem korlátos tartójú és így nem teljesülnek az I. kvantálási tétel feltételei. Furcsa módon ugyanakkor a feltétel nem teljesülése nem zárja ki a helyreállíthatóságot, csak nem garantálja minden jelre. Például egy egyszerű négyszögjelet már egy egybites kvantálóval is helyreállíthatunk, abban speciális esetben, ha a kvantálás a szinteket éppen változatlanul hagyja.

A II. kvantálási tétel nem a sűrűségfüggvény helyreállítására vonatkozik. Mint arra a legelején utaltunk, bizonyos feltételek teljesülése esetén – precízen a II. kvantálási tétel feltételeiről van szó – a jel megfelelő momentumai maradnak meg a kvantálás után is. A tétel éppen ezt az állítást fogalmazza meg egzakt formában.

3.4.1. A kvantált jel visszaállítása

Amennyiben a q kvantálási lépcső annyira kicsi, hogy az I. kvantálási tétel feltételeit teljesítjük, akkor az eredeti x valószínűség-sűrűségfüggvényét visszaállíthatjuk a kvantált x' jel valószínűség-sűrűségfüggvényéből. Ez nagyon fontos akkor, ha csak a kvantált adatok állnak a rendelkezésünkre, és ezekből kell az eredeti jel bizonyos statisztikai tulajdonságait meghatározni.

Az $f_{x'}(x)$ -ből tehát a $f_{x+n}(x)$ meghatározása a célunk. Ezt hasonlóan az időtartománybeli mintavételezéshez megtehetjük sinc-es interpolációval, ahogyan a 3.9 ábrán látható.

Ezek után az eredeti x jel valószínűség-sűrűségfüggvénye megkapható, ha az $f_{x+n}(x)$ -et dekonvolváljuk $f_n(x)$ -szel.

3.5. Sheppard-korrekciók, a momentumok torzítása

Amennyiben az additív zajmodell megfelelő a számunkra, akkor könnyen kiszámolhatjuk, hogy mennyi a különböző momentumok torzítása.

A II. kvantálási tétel alapján a jel karakterisztikus függvényére az $u = 0$ környékén

a következő összefüggés teljesül:

$$\Phi_{x'}(u) = \Phi_x(u) \operatorname{sinc} \frac{qu}{2}, \quad (3.4)$$

azaz a kvantált jel karakterisztikus függvénye itt pontosan olyan alakú, mintha az eredeti jelhez egy független, egyenletes eloszlású zajt adtunk volna, hiszen független valószínűségi változók összegzésekor a sűrűségfüggvények konvolúcióját kell képeznünk, és így a karakterisztikus függvények szorzódnak. Eszerint a zajmodell első két tulajdonsága teljesül, és a momentumok közötti összefüggéseket a zajmodellből meghatározhatjuk ($x_q = x + n_q$).

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{x\} &= \mathcal{E}\{x_q\} \\ \mathcal{E}\{x^2\} &= \mathcal{E}\{x_q^2\} - \frac{q^2}{12} \\ \mathcal{E}\{x^3\} &= \mathcal{E}\{x_q^3\} - 3\mathcal{E}\{x_q\} \frac{q^2}{12} \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ezek az úgynevezett Sheppard-korrektciók.

A kvantálási tétel feltételét a gyakorlatban előforduló jelek legfeljebb közelítőleg teljesítik (a karakterisztikus függvény korlátos tartója ellentmond a valószínűség-sűrűségfüggvény korlátos szélességének). Általában megadható azonban olyan korlát, ami fölött a karakterisztikus függvény gyakorlatilag nullának tekinthető. Így kapható például a következő ökölszabály: Gauss-jelekre $q < \sigma_x$ teljesítése elegendő. Pontosabb vizsgálatokkal az is megmutatható, hogy például a kvantált és a kvantálatlan Gauss-jel várható értékének különbségére jó közelítéssel a következő teljesül:

$$|\mathcal{E}\{x_q\} - \mathcal{E}\{x\}| < \frac{q}{\pi} e^{-2\frac{\sigma_x^2}{q^2}\pi^2}, \quad (3.6)$$

a második momentumokra pedig

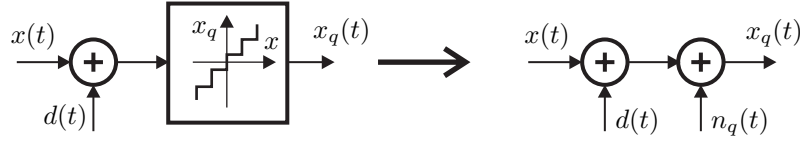
$$\left| \mathcal{E}\{x_q^2\} - \mathcal{E}\{x^2\} - \frac{q^2}{12} \right| < \frac{q^2}{2\pi^2} e^{-2\frac{\sigma_x^2}{q^2}\pi^2}. \quad (3.7)$$

Más, kevésbé gyorsan csillapodó karakterisztikus függvényű jelek esetén a kvantálásnak a jelamplitúdóhoz képest jóval finomabbnak kell lennie, így szinuszelre a $q \ll A$ feltételt teljesíteni kell.

Mint azt az előzőekben láttuk az additív zajmodell nem írja le pontosan a kvantálás hatását. Ezért a Sheppard-korrektciók sem érvényesek abban az esetben, ha a kvantálás „pontos” modelljét alkalmazzuk. Mi itt csak az elsőrendű momentum torzítását fogjuk megvizsgálni.

Tudjuk, hogy egy valószínűségi változó momentumait könnyen megkaphatjuk a karakterisztikus függvényből. Ha n a keresett momentum, akkor

$$\mathcal{E}\{x^n\} = \frac{1}{j^n} \left. \frac{d^n \Phi_x(u)}{du^n} \right|_{u=0}. \quad (3.8)$$



3.10. ábra. Dither alkalmazása

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}\{x_q\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{d}{du} \left(\Phi_x \left(u - \frac{2\pi k}{q} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{qu}{2} - k\pi \right) \right) \Big|_{u=0} \\
 &= \frac{1}{j} \frac{d\Phi_x(u)}{du} \Big|_{u=0} + \frac{1}{j} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\Phi_x \left(u - \frac{2\pi k}{q} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{qu}{2} - k\pi \right) \right) \Big|_{u=0} \\
 &= \mathcal{E}\{x\} + \frac{1}{j} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \Phi_x \left(-\frac{2\pi k}{q} \right) \frac{q(-1)^{k-1}}{2\pi k}. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy az első momentum torzítatlan méréséhez elegendő

$$\Phi_x \left(\frac{2\pi k}{q} \right) = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.10)$$

biztosítása is.

3.5.1. Dither használata

Legyen x egyenletes eloszlású a $(-\frac{1}{2}rq, \frac{1}{2}rq)$ intervallumon (r egész). Könnyen belátható, hogy a karakterisztikus függvény

$$\Phi_x(u) = \operatorname{sinc} \frac{rqu}{2} \quad (3.11)$$

alakú, ami azt jelenti, hogy a (3.10) feltételt $\operatorname{sinc}(r\pi k) = 0$ miatt biztosítottuk, tehát a várható értékek megegyeznek: elég a kvantált adatokat átlagolni, annak ellenére, hogy x nem teljesíti a kvantálási tételben megfogalmazott feltételt. Nincs azonban mindig ilyen szerencsénk.

Szükség esetén speciális technika alkalmazásával kisebb kvantumszám is elegendő lehet. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha a bemenő jelhez kvantálás előtt tőle statisztikailag független zajt, ún. *dithert* adunk (3.10. ábra).

A kevert jel karakterisztikus függvénye a függetlenség miatt

$$\Phi_{x+d}(u) = \Phi_x(u)\Phi_d(u) \quad (3.12)$$

alakú. Ha a dither teljesíti a feltételt, akkor az összeg is teljesíteni fogja, hiszen a két karakterisztikus függvény szorzódik, és $\Phi_{x+d}(u)$ a megfelelő helyen nulla lesz, $\Phi_x(u)$

értékétől függetlenül. A jelhez hozzáadott ditherrel tehát biztosítani lehet a Sheppard-korrekciók érvényességét. Ügyeljünk azonban arra, hogy a Sheppard-korrekciók ilyenkor nem az x jel momentumaira, hanem az $x + d$ jel momentumaira érvényesek, ezért x momentumainak meghatározásához d momentumait is figyelembe kell venni! Például:

$$\text{var}\{x\} = \text{var}\{x_q\} - \frac{q^2}{12} - \text{var}\{d\}. \quad (3.13)$$

Ugyanakkor a dither hozzákeverése miatt általában a mérések varianciája is nő. Így például a várható érték becslése esetén, ha közelítőleg teljesítjük a kvantálási tétel feltételét, a variancia a következő:

$$\text{var}\{x_q\} = \text{var}\{x + d + n_q\} \approx \text{var}\{x\} + \frac{q^2}{12} + \text{var}\{d\}. \quad (3.14)$$

Az esetleg nagy amplitúdójú dither erősen megnövelheti a varianciát, ezért gyakran speciális technikával „szabadulnak meg” tőle, például kvantálás után a dither értékével korrigálnak (ha ez rendelkezésre áll), vagy kiszűrik, ha lehet.

Az audio-technikában a háromszög-eloszlású dither az elterjedt (két, kvantumnagyság szélességű egyenletes eloszlású dither konvolúciója). Bebizonyítható, hogy ekkor a várható érték torzítatlan, és a variancia is jelfüggetlen, ami azért fontos, mert különben lüktető zaj jelenhet meg (pl. négyszög-dithernél ténylegesen meg is jelenhet), ami csendesebb részeknél nagyon zavaró.

3.6. A fehér zajspektrum feltétele

Folytonos időparaméter esetén a kvantálási zaj spektruma nem lehet fehér, ugyanis

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{n_q}(f)df = \text{var}\{n_q\} = \frac{q^2}{12} < \infty, \quad (3.15)$$

ami ellentmond annak, hogy a spektrum konstans.

Ugyanakkor a kvantálás szinte mindig mintavételezéssel együtt fordul elő. Ha a mintavételezési frekvencia nem túl nagy a kvantálási zaj határfrekvenciájához képest, akkor a kvantálási zajhoz tartozó ismétlődő spektrumok átlapolódnak, és az eredő spektrum mégis közelítőleg fehér lesz (3.11. ábra).

Konkrét esetekre a következő adódik:

- sávkorlátozott Gauss-jelre

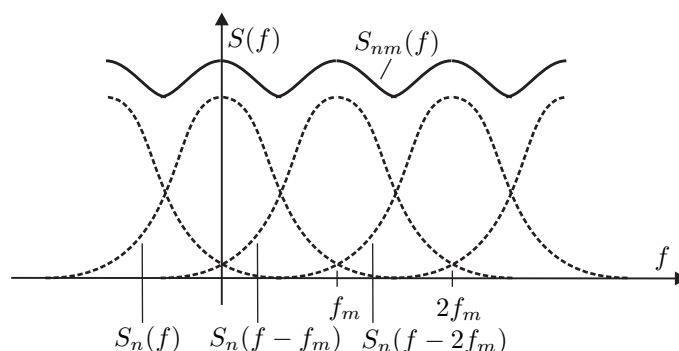
$$f_m < 9 \frac{\sigma_x}{q} B,$$

- szinuszjelre

$$f_m < 3 \frac{A}{q} f_1.$$

Ezek a feltételek aránylag könnyen teljesíthetők.

A kvantálási zaj spektruma fehérségének a következő előnyei vannak:



3.11. ábra. A fehér zajspektrum kialakulása

- a spektrum alakja nem függ a bemenő jeltől, tehát egyszerűen és általánosan figyelembe vehető;
- a kvantálási hiba teljesítménye egyenletesen el van osztva a frekvenciatengely mentén, tehát nem tartalmaz zavaró csúcsokat;
- a kvantálási zaj mintái korrelálatlanok, ezért az egyszerű átlagolás a lehető leg hatékonyabb a zaj kiküszöbölésére, és a statisztikai adatfeldolgozási módszerek hibaképletei közvetlenül alkalmazhatók.

3.7. Néhány kiegészítő megjegyzés

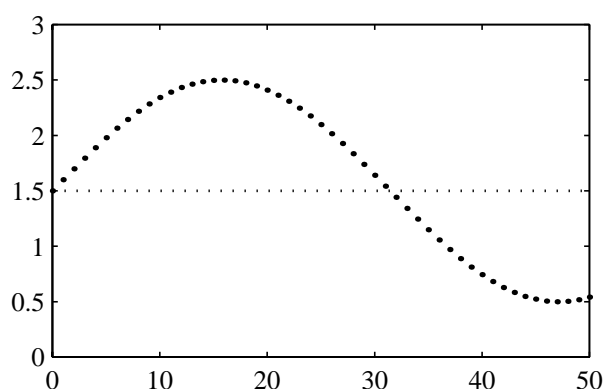
A fenti elmélet ideális egyenletes kvantálót feltételezett, és ezt felhasználva mutattuk meg például azt, hogy a variancia növelése árán a torzítás jelentősen csökkenthető. Ez valódi A/D konverterek esetén így nem egészen igaz, ugyanis figyelembe kell venni az A/D konverter linearitási hibáit is, és szigorúan el kell kerülni a túlvezérlést. Ez durván azt jelenti, hogy az A/D konverter által okozott hibát nem tekinthetjük még a lehető legügyesebb beállítás és adatfeldolgozás esetén sem az LSB értéknél sokkal kisebbnek. Nagy amplitúdójú dither alkalmazásával ugyanakkor valamennyire megnövelhetjük az A/D konverter látszólagos linearitását (l. de Lotto, 1986).

A zajmodell alapján érthető, hogy szűréssel miért nem állítható vissza a kvantált jelből az eredeti függvény. A bemenő jel spektrumának ismeretében a legjobb esetben optimális szűrő tervezhető (l. Katzenelson, 1962), mely a visszaállítás hibájának varianciáját minimalizálja (Wiener- ill. Kalman-szűrő).

4. fejezet

Átlagolási eljárások

Az átlagolás egy olyan varianciacsökkentő eljárás, amely azt feltételezi, hogy a megfigyelések ($y(n)$) egy időben nem változó (vagy csak lassan változó) jelenségről (x) hordoznak információt, de a megfigyelésekhez a mérési csatornán keresztül zaj adódik.



4.1. ábra. Konstans érték, melyen szinuszos zaj ül; a megfigyelés nem egész periódust tartalmaz.

A 4.1 ábrán látható jelrészlet egy konstans érték és a hozzáadódó szinuszos zaj eredője. Ez a példa azt sugallja, hogy az átlagérték megállapítása csupán számítás kérdése, hiszen szemre is szétválasztható az eltolási érték és a szinusz. Ehhez azonban azt a feltételezést kell tenni, hogy a zaj szinuszos, vagyis, hogy a vizsgált jelrészleten kívül is szinuszosan folytatódik. Világos, hogy adható olyan eljárás, amely a szinuszos zaj feltételezést használva tetszőleges paraméterű szinusz jelet és eltolási értéket is külön tud választani véges minta alapján. Mi történik azonban, ha ez az eljárás szinusszal nem modellezhető zajjal találja magát szemben: például több harmonikus összetevőt tartalmazó vagy nemperiodikus zajjal? Látszik, hogy az átlagérték eldöntése nem csak számítás kérdése, a különböző átlagolási eljárások különböző modelleket tételeznek fel.

4.1. Ideális átlagolás

Diszkrét jelre az ideális átlagolást a megfigyelések $k = 0$ időponttal jelölt kezdetétől írjuk fel:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) \quad (4.1)$$

Az n -edik időpontban kapott eredmény csak az $(n - 1)$ -edik időpontig bezáróan tartalmaz megfigyeléseket. Ennek az az értelme, hogy a valós életben mindig véges idő alatt tudunk csak eredményt előállítani. Ha az időnek csak diszkrét pontjait tekintjük (ahogyan ez szinkron digitális hálózatok esetén megszokott), akkor az n -edik időpillanatban állítható elő legkorábban az $(n - 1)$ -edik mérésből származó mintát is felhasználó eredmény.

4.1.1. Rekurzív kiszámítás

Az $n + 1$ -edik átlagértéket, amelyben már az n -edik megfigyelés is szerepel, az alábbi rekurzív formával az n -edik átlagértékből is kifejezhetjük:

$$\hat{x}(n + 1) = \frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^n y(k) = \frac{1}{n + 1} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) + \frac{1}{n + 1} y(n) \quad (4.2)$$

$$= \frac{n}{n + 1} \hat{x}(n) + \frac{1}{n + 1} y(n) = \quad (4.3)$$

$$= \hat{x}(n) - \frac{1}{n + 1} \hat{x}(n) + \frac{1}{n + 1} y(n) = \quad (4.4)$$

$$= \hat{x}(n) + \frac{1}{n + 1} [y(n) - \hat{x}(n)] \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Itt és a továbbiakban, minden rekurzív megadásnál a kezdeti érték nulla: $\hat{x}(0) = 0$.

4.1.2. Predikciós-korrekcións alak

Az átlagértékek egymást követő, folyamatos kiértékelése esetén a rekurzív képlettel való számítás *szükségtelenné teszi a régebbi minták eltárolását és az ismétlődő részösszegek újbóli kiszámítását*. A 4.5 szerinti rekurzív felírással egyúttal egy általános szemléletet bevezető kifejezéshez jutunk:

$$\hat{x}(n + 1) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} (y(n) - \hat{x}(n))$$

Új érték =	Jóslás az eddigi tudás alapján	+	Kiigazítás az új megfigyelés figyelembe- vételével	(4.6)
------------	---	---	---	-------

Adott predikciós-korrekción képlet esetén („predikció” = jóslás, „korrekció” = javítás, kiigazítás), a kiértékelésben szereplő legnagyobb időindex és az új becslő időindexeinek különbségét k -val jelölve, k lépéses prediktorról ill. jóslóról beszélhetünk. Jelen esetben az ideális átlagolás egy lépéses jóslást valósít meg.

Megjegyzés: Amennyiben $k = 0$, akkor szűrésről, $k < 0$ esetén simításról beszélünk. Az általános szóhasználatban azonban mind a három esetre alkalmazzuk a „szűrés”-t, mivel a jel spektruma megváltozik.

(Megjegyzés: A később előforduló predikciós-korrekción képletekben a predikciós tag nem szükségszerűen a pillanatnyi x becslője. Az átlagolás során egy statikus jellemzőt becsülünk, így a korábbi becslés megtartása célravezető jóslásnak bizonyul.)

4.1.3. Az alkalmazott jelölések

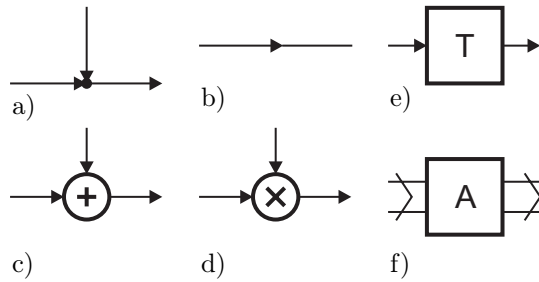
Az átlagolást, mint az adatfolyam útjába iktatott adatkiértékelési folyamatot, ábrával is szemléltethetjük.

Az ábrákon alkalmazott építőelemeket az alábbi pontokban definiáljuk:

- Az adatok irányított élek mentén terjednek késleltetés nélkül. Az élek kötik össze a különböző rajzi egységeket.
- Az élek mentén feltüntetett számok (konstansok) velük végzett szorzást jelölnek. (4.2/b ábra)
- Az egy csomópontba befutó élek mentén érkező adatok összegződnek. Egy csomópontnak elvileg bárhány bemenete és kimenete lehet. Kivonás (-1)-gyel való szorzás és összegzés útján tehető meg. (4.2/a ábra)
- Az összegzés és szorzás műveletvégző elemek, amelyek explicit módon is jelölhetők. Erre akkor lehet szükség, ha pl. két jel szorozódik, vagy ki akarjuk hangsúlyozni a műveletvégzést, (pl. megvalósítás szempontjából tekintjük a hálózatot). (4.2/c-d ábra)
- Az eddig felsorolt építőelemek nem vezetnek be késleltetést emiatt nem engedhető meg, hogy az élek alkotta irányított gráfban hurok forduljon elő). Az időbeni egymásutániság megjelenítésére egyedül a tárolók szolgálnak (4.2/e ábra). A tároló (memória) az adott időpillanatban a bemenetére érkezett adatot a rákövetkező időpillanatban bocsátja a kimenetére. Ennek megfelelően, ha bemenetén $x(n+1)$ van, akkor kimenete $x(n)$, ha pedig bemenetén $x(n)$ van, akkor kimenete $x(n-1)$.
- Az eddigi jelölések használhatók akkor is, ha a jelcsatorna nem valós skalár, hanem komplex vagy vektor értékű. A gyakorlati megvalósítás szempontjából természetesen ugyanaz a jelölés egészen más összetettségű műveletvégzést jelenthet ilyenkor (pl. az egyszerű szorzás helyett skalár-szorzatot; egyetlen valós érték helyett egy komplex érték, vagy egy vektor tárolását). Vektorok esetén a matematikai apparátus bővül a mátrixszal (\mathbf{A}) való szorzással, ami ugyancsak

4. ÁTLAGOLÁSI ELJÁRÁSOK

vektort eredményez. Ilyenkor szemléletesebb az élek párhuzamosokkal való jelölése. (4.2/f ábra)



4.2. ábra. Jelölések

A meghatározások értelmében csak diszkrét időpontokat értelmezhetünk. A felsorolt építőelemekkel diszkrét idejű lineáris hálózatok adhatók meg, (ha bemenőjelből származó mennyiségeket nem szorzunk egymással).

4.1.4. Az ideális átlagolás tulajdonságai

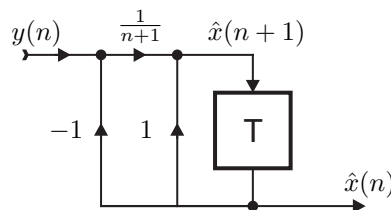
Az ideális átlagolás nem más, mint a várható érték becslője annak feltételezésével, hogy a mintasorozat ergodikus (ld. 6. fejezet).

A 4.3 ábrán időtől függő mennyiséggel szorozzuk a korrekciónak megfelelő jelet; emiatt az ideális átlagolás időben változó jelkiértékelési mód.

Egyrészt, időben előrehaladva egyre több mintát veszünk figyelembe mind kisebb, (de minden mintára azonos) súllyal. A 4.3 képlet szerinti rekurzió alapján azt is mondhatjuk, hogy egyre inkább megbízunk az egyre kevésbé bizonytalan becslőnkben, és ezért egyre kevésbé hagyatkozunk egy újabb zajos megfigyelésre.

Másrészt, a régi és az új megfigyelések egyforma súlyúak, vagyis az átlagérték csak abban az esetben alkalmazható eredményesen, ha a becslendő jellemző valóban konstans. Egyébként a kiszámított átlagérték a zaj kiküszöbölése helyett a becslendő paraméter megváltozását fogja elfedni. Tehát az ideális átlagolás egyáltalán nem képes a becslendő paraméter megváltozását követni.

Megjegyzés: Ha predikció helyett szűrést írunk fel (nem jövőbeli értéket becslünk, hanem a jelenlegi értéket), akkor a blokkvázlaton a késleltető elem előtt kell kicsatolni



4.3. ábra. Az ideális átlagolás blokkvázlata a predikciós alak szerint

az eredményt, így ezt jelöljük $\hat{x}(n)$ -nel. Az egyenletet továbbra is a tároló előtti pontra kell felírni:

$$\hat{x}(n) = \hat{x}(n-1) + \frac{1}{n+1} [y(n) - \hat{x}(n-1)] . \quad (4.7)$$

4.2. Exponenciális átlagolás

Helyezzünk az ideális átlagolás 4.3 szerinti rekurzív képletébe az n időindextől függő súlytényezők helyére állandó súlyokat úgy, hogy azok összege egyet adjon:

$$\hat{x}(n+1) = \left(1 - \frac{1}{Q}\right)\hat{x}(n) + \frac{1}{Q}y(n) \text{ ahol } Q > 1 \quad (4.8)$$

Így kapjuk az exponenciális vagy „felejtő” átlagolást. Ezt az állandó súlyok miatt egyszerű megvalósítani, és alább ismertető tulajdonságai is kedvezők.

A rekurziót kifejtve a következő eredményhez jutunk:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{1}{Q}y(n) + \left(1 - \frac{1}{Q}\right)\hat{x}(n) = \quad (4.9)$$

$$= \frac{1}{Q}y(n) + \left(1 - \frac{1}{Q}\right)\frac{1}{Q}y(n-1) + \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^2\hat{x}(n-1) = \quad (4.10)$$

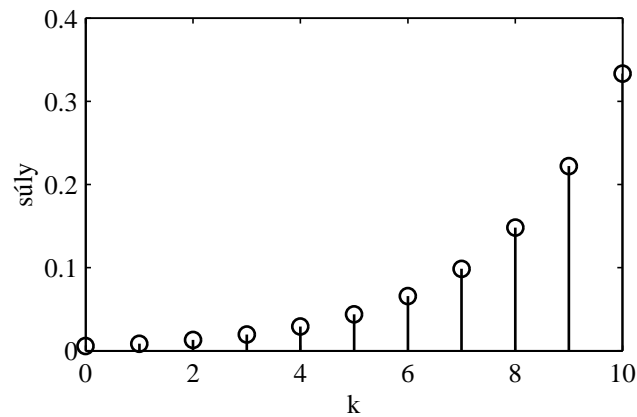
$$= \frac{1}{Q}y(n) + \left(1 - \frac{1}{Q}\right)\frac{1}{Q}y(n-1) + \dots + \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{n-1}\frac{1}{Q}y(1) + \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^n\frac{1}{Q}y(0), \quad (4.11)$$

azaz $Q > 1$ (azaz $1 - \frac{1}{Q} < 1$) miatt a régebbi megfigyelések hatványozottan csökkenő súllyal szerepelnek az eredményben. Innen származik az exponenciális átlagolás elnevezés. Képletesen fogalmazva, a régi megfigyelések időben mind távolabb kerülve fokozatosan „elfelejtődnek”. Ez a „felejtés” azonban sosem lesz teljes mértékű, a legkorábbi megfigyelés súlya is csak a végtelenben tart nullához.

Az exponenciális átlagolás lényeges előnye, hogy a felejtő tulajdonság által követni képes a becslendő paraméter lassú változásait. A becslendő paraméter változékonysága miatt kézenfekvő, hogy az időben hozzánk közelebbi minták pontosabb információt hordoznak a keresett paramétréről. A nagyobb súlyok azt tükrözik, hogy ezeknek a közeli mintáknak nagyobb jelentőséget tulajdonítunk (4.4 ábra). Minél gyorsabb a paraméter változása, annál gyorsabban avulnak el a mért értékeink, így a felejtés mértékének megfelelő $\frac{1}{Q}$ tényezőt annál nagyobbra, következésképpen Q -t annál kisebbre kell választanunk (pl. $Q = 1$ szélsőséges választással az átlagolás a legutolsó mért érték elfogadásává fajul, $Q = 2$ mellett az előző becslés és az új mérés egyforma súllyal esik latba, éppen számtani közepüket kapjuk, stb.).

Példaként a meteorológiai jelentés állhat. A különböző napszakok hőmérséklete nem jellemezhető egyazon átlagértékkel. Ha tetszőleges pillanatban akarjuk a lassan változó hőmérséklet alakulását egy integrális mennyiséggel jellemezni, el kell különíteni a méréseinkben szereplő zavaró hatásokat (pl. szellőkések, elhaladó felhő árnyéka) a napszakok közötti lassú, folyamatos változástól (pl. a nap állása folyamatosan változik,

4. ÁTLAGOLÁSI ELJÁRÁSOK

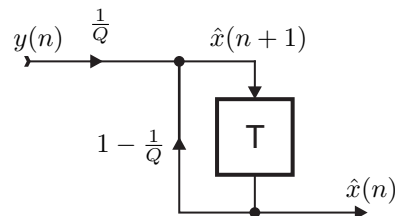


4.4. ábra. A k -edik megfigyelés súlya az $n = 11$ időpillanatban exponenciális átlagolás és $Q = 3$ esetén

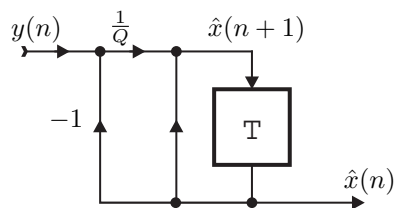
a talajnak hőtároló hatása van). Az exponenciális átlagolás erre a célra megfelelő eszköz.

Az exponenciális átlagolás predikciós-korrekciónak alakban:

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + \frac{1}{Q} [y(n) - \hat{x}(n)] \quad (4.12)$$



4.5. ábra. Az exponenciális átlagolás blokkvázlata



4.6. ábra. Az exponenciális átlagolás predikciós-korrekciónak alakjának blokkvázlata

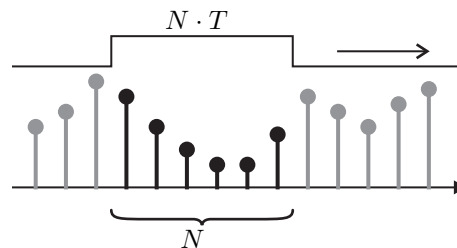
4.3. Csúszóablakos vagy mozgó átlagolás

Időben változatlan jelkiértékelési módot kapunk úgy is, ha az átlagolásban résztvevő megfigyelések számát korlátozzuk állandó értékre. Minthogy az időben közeli minták nagyobb információtartalommal bírnak (a jelenlegi állapot-érték a jelenlegihez közeli megfigyelésekkel van a legszorosabb összefüggésben, hiszen a korábbi megfigyelések az állapotváltozó korábbi értékeit tartalmazzák, és a korrelációs függvény csökkenése miatt ezek csak mérsékelten használhatók a jelenlegi állapot becslésére), az utolsó N darab mintát használjuk fel:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N}^{n-1} y(k) \quad (4.13)$$

ahol N : az átlagolási szám.

Ezt az eljárást csúszóablakos v. mozgó átlagolásnak hívjuk, mert a teljes jeltől csak az N minta széles ablakon át látható mintákat átlagoljuk, és az ablakot kiértékelésenként egy mintányival továbbcsúsztatjuk.



4.7. ábra. Az átlagolás súlyai csúszó ablakként vágják ki egy részletet a jeltől.

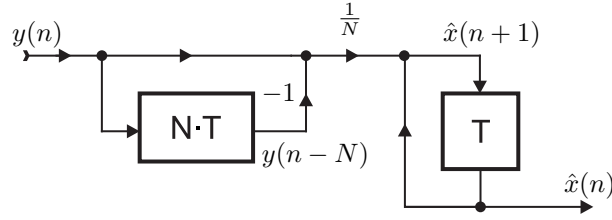
A mozgó átlagolás ugyancsak számítható rekurzív módon, de a jel utolsó N darab mintájának tárolása szükséges. Ütemenként így is csak a legutolsó mintát kell eltárolni, és az N -nel megelőzőt kiküszöbölni (4.8 ábra).

$$\hat{x}(n+1) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n y(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N}^{n-1} y(k) + \frac{1}{N} [y(n) - y(n-N)] = \quad (4.14)$$

$$= \hat{x}(n) + \frac{1}{N} [y(n) - y(n-N)] \quad (4.15)$$

4.4. Frekvenciatartománybeli jellemzés

A következő szakaszokban a hálózatok és rendszerek témakörének egyes alapösszefüggéseit ragadtuk ki.



4.8. ábra. A mozgó átlagolás blokkvázlata

4.4.1. Egyenletes mintavételezés, harmonikus-analízis

Időinvariáns lineáris rendszereknek jól kezelhető leírását adhatjuk a frekvenciatartományban. Ehhez egyenletes mintavételezést kell feltételeznünk. Tehát például $x(n) \rightarrow x(t = nT_s)$ ahol T_s a mintavételezés periódusideje. T_s egyúttal a tárolón keresztülhaladó jel által elszenvedett késleltetésnek az idejét is jelenti. Ez a késleltetés a frekvenciával egyenesen arányos fázistolást eredményez a harmonikus jelösszetevőkön.

Adott frekvenciájú bemenő szinuszjel egy lineáris hálózat összegzőiben különböző amplitúdókkal és fázisokkal összegződik, aminek eredményeképpen a kimeneten megváltozott amplitúdójú és fázisú, de a bemenettel megegyező frekvenciájú szinusz jelenik meg. Egy az előbbitől különböző frekvenciájú szinuszos bemenőjel az előbbitől eltérő fázistolásokkal összegződik a hálózatban, vagyis frekvenciáról frekvenciára változik a hálózat átvitele (csillapítása vagy erősítése, ill. fázistolása), amit az átviteli karakterisztikával adhatunk meg.

A szuperpozíció elvét alkalmazva, (amely alapján a lineáris hálózatokat definiáljuk), egyszerre több harmonikus komponenssel gerjesztve a rendszert is teljesül, hogy adott bemeneti komponens csak azonos frekvenciájú kimeneti komponens hoz létre, és megfordítva: adott kimenő komponens csak a megfelelő frekvenciájú bemenő harmonikus komponens függvénye.

4.4.2. Átviteli karakterisztika, átviteli függvény

A rendszer súlyfüggvényének \mathcal{Z} -transzformáltja adja az átviteli függvényt. Az egységkör mentén ($z = e^{j\omega T_s}$ pontokban) kiértékelve az átviteli függvényt az átviteli karakterisztika pontjait kapjuk.

A tárolóelem súlyfüggvénye például:

$$h_T(n) = \delta(n - 1) \quad (4.16)$$

Ebből az átviteli karakterisztika:

$$H_T(e^{j\omega T_s}) = \mathcal{F}\{h_T(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - 1) e^{-j\omega T_s n} = e^{-j\omega T_s}, \quad (4.17)$$

Az átviteli függvény:

$$H_T(z) = \mathcal{Z}\{h_T(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n - 1) z^{-n} = z^{-1}. \quad (4.18)$$

4.4. FREKVENCIATARTOMÁNYBELI JELLEMZÉS

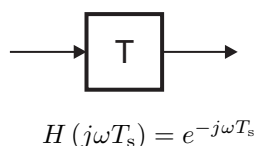
Mintavételezett jelekre továbbá:

$$\omega T_s = 2\pi f T_s = 2\pi \frac{f}{f_s}, \quad (4.19)$$

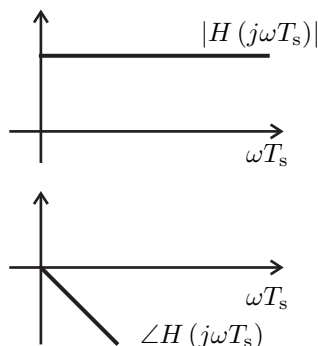
ahol ω a körfrekvencia, f a frekvencia, T_s a mintavétel periódusideje, f_s a mintavételi frekvencia.

Mintavételezett jelek esetén használatos a (dimenzió nélküli) diszkrét frekvencia (vagy normált frekvencia): $\frac{f}{f_s} = f T_s$ és a radián dimenziójú ωT_s szorzat, amely a diszkrét körfrekvenciát (vagy relatív körfrekvenciát) adja.

A továbbiakban e kettő közül, új jelölés bevezetése nélkül, az ωT_s diszkrét körfrekvenciát használjuk, amely azt adja meg, hogy egy mintavételi ütem alatt az ω körfrekvenciájú szinuszos jel fázisa hány radiánnal változik meg. Ezzel a választással képleteinkben kiküszöböljük a 2π konstanssal való szorzást, viszont ωT_s -ben és annak ábráinkon feltüntetett értékeiben megjelenik a szinuszos függvény periódusát adó 2π .



4.9. ábra. Tárolóelem és átviteli karakterisztikája



4.10. ábra. A tároló amplitúdó- és fáziskarakterisztikája

Az eddigi eljárások átviteli függvénye közvetlenül kiolvasható a rendszer blokkvázlatából, ha a tárolókat a z^{-1} -gyel való szorzásnak feleltetjük meg.

4.4.3. Két egyszerű példa

A következőkben két egytárolós, visszacsatolás nélküli rendszer átvitelét vizsgáljuk.

4.4.1 Példa. Az $N = 2$ paraméterű csúszó ablakos átlagolás:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{y(n) + y(n-1)}{2}, \quad (4.20)$$

4. ÁTLAGOLÁSI ELJÁRÁSOK

A \mathcal{Z} -transzformáltakat jelöljük:

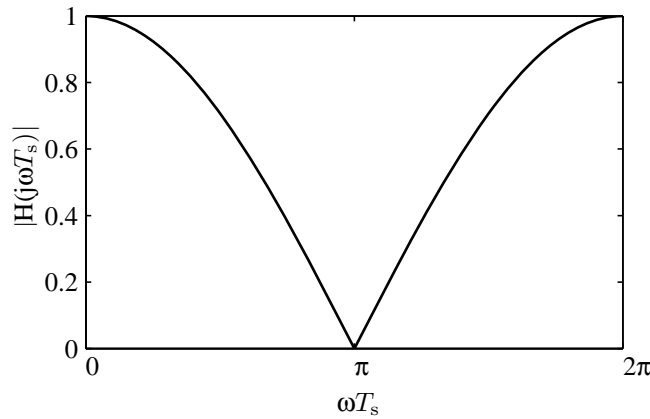
$$\mathcal{Z}\{\hat{x}(n)\} = \hat{X}(z); \quad \mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z) \quad (4.21)$$

Ezekkel:

$$z\hat{X}(z) = Y(z) \frac{1+z^{-1}}{2} \quad (4.22)$$

$$\frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = z^{-1} \frac{1+z^{-1}}{2} \Big|_{z=e^{j\omega T_s}} = e^{-j\omega T_s} \frac{1+e^{-j\omega T_s}}{2} = \quad (4.23)$$

$$= e^{-j\omega T_s} \frac{e^{-\frac{j\omega T_s}{2}} \left(e^{\frac{j\omega T_s}{2}} + e^{-\frac{j\omega T_s}{2}} \right)}{2} = e^{-j\frac{3}{2}\omega T_s} \cos(\omega T_s/2) \quad (4.24)$$



4.11. ábra. $N = 2$ átlagoló, $\text{abs}(\cos)$ alakú, aluláteresztő amplitúdó-karakterisztikája

Tegyük fel, hogy szinuszos bemenettel vizsgáljuk a hálózatot. A karakterisztikára kapott eredmény nem meglepő, hiszen ha egy szinusz jelet egy késleltetettjével átlagolunk, minél nagyobb a frekvenciájuk, annál inkább eltérő fázisban fognak összegződni, mígnem $\omega T_s = \pi$ diszkrét körfrekvencia esetén éppen ellenfázisba kerülnek, és kioltják egymást. Ennek megfelelően az aluláteresztő karakterisztika átvitele nulla a $\omega T_s = \pi$ helyen (4.11 ábra).

4.4.2 Példa. Ha a minták különbségét képezzük, vagyis minden ütemben a megváltozást figyeljük,

$$\hat{x}_{\text{diff}}(n+1) = \frac{y(n) - y(n-1)}{2}, \quad (4.25)$$

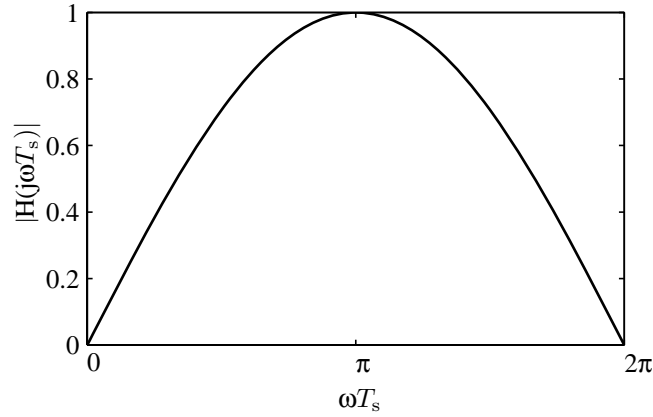
akkor a következő feluláteresztő karakterisztikát kapjuk:

$$z\hat{X}_{\text{diff}}(z) = Y(z) \frac{1-z^{-1}}{2}, \quad (4.26)$$

$$\frac{\hat{X}_{\text{diff}}(z)}{Y(z)} = z^{-1} \frac{1-z^{-1}}{2} \Big|_{z=e^{j\omega T_s}} = e^{-j\omega T_s} \frac{1-e^{-j\omega T_s}}{2}, \quad (4.27)$$

4.5. A MOZGÓ ÁTLAGOLÁS FREKVENCIATARTOMÁNYBELI JELLEMZÉSE

$$= e^{-j\omega T_s} j \frac{e^{-\frac{j\omega T_s}{2}} \left(e^{\frac{j\omega T_s}{2}} - e^{-\frac{j\omega T_s}{2}} \right)}{2j} = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega T_s\right)} \sin(\omega T_s/2). \quad (4.28)$$



4.12. ábra. Különbségképző tag $\text{abs}(\sin)$ alakú felüláteresztő amplitúdó-karakterisztikája

4.5. A mozgó átlagolás frekvenciatartománybeli jellemzése

4.5.1. A mozgó átlagolás átviteli függvénye

Általános N esetén az átlagolás átviteli függvénye a 4.15 rekurzív képlet alapján:

$$z\hat{X}(z) = \hat{X}(z) + \frac{1}{N}Y(z)(1 - z^{-N}), \quad (4.29)$$

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{1}{N}z^{-1} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}. \quad (4.30)$$

Ugyanakkor a nemrekurzív képletből kiindulva:

$$z\hat{X}(z) = \frac{1}{N}Y(z)(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(N-1)}), \quad (4.31)$$

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{1}{N} \underbrace{(z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N})}_{N \text{ tag}}. \quad (4.32)$$

A kettőnek nyilván egyeznie kell, azaz az alábbi oszthatóságnak teljesülnie kell:

$$\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(N-1)}) \quad (4.33)$$

4. ÁTLAGOLÁSI ELJÁRÁSOK

Az azonosság a mértani sor összegképletéből adódik.

Az átviteli függvény számlálójában ill. nevezőjében szereplő tagok mértani közepeit kiemelve:

$$H(z)|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{1}{N} e^{-j\omega T_s} \frac{1 - e^{-jN\omega T_s}}{1 - e^{-j\omega T_s}} = \frac{1}{N} e^{-j\omega T_s} \frac{e^{-j\frac{N}{2}\omega T_s}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega T_s}} \cdot \frac{e^{j\frac{N}{2}\omega T_s} - e^{-j\frac{N}{2}\omega T_s}}{e^{j\frac{1}{2}\omega T_s} - e^{-j\frac{1}{2}\omega T_s}} = \quad (4.34)$$

$$= \frac{1}{N} e^{-j\omega T_s(1+\frac{N}{2}-\frac{1}{2})} \frac{\sin \frac{N}{2}\omega T_s}{\sin \frac{1}{2}\omega T_s} \quad (4.35)$$

4.5.2. A mozgó átlagolás amplitúdókarakterisztikája

Az amplitúdókarakterisztika:

$$|H(z)|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin \frac{N}{2}\omega T_s}{\sin \frac{1}{2}\omega T_s} \right|; \quad (4.36)$$

A számlálóban egy N -szer gyorsabb szinusz szerepel, mint a nevezőben. Miközben a számlálóban látható szinusz szaporán ingadozik, a nevezőben látható szinusz éppen egy negyed periódust tesz meg $\omega T_s = \pi$ -ig, azaz értéke 0-tól 1-ig monoton nő (vö. 4.13 ábra). Ez a $[0; \pi]$ szakaszon egy csökkenő tendenciájú karakterisztikát eredményez, amely azonban nem monoton, mert a számláló nulla helyein „leszívások” találhatóak (4.14 ábra). Az $\omega T_s = 0$ helyen a számláló és a nevező is nulla. Itt éppen egy az átvitel:

$$|H(z)|_{\omega T_s \rightarrow 0} = 1 \quad (4.37)$$

Ez úgy is belátható, hogy a szinuszokat határértékben az argumentumukkal helyettesítjük, vagy az alábbiak szerint, a l'Hôpital-szabály alkalmazásával:

$$\lim_{\omega T_s \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{N}{2}\omega T_s}{\sin \frac{1}{2}\omega T_s} = \lim_{\omega T_s \rightarrow 0} \frac{\frac{N}{2} \cos \frac{N}{2}\omega T_s}{\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}\omega T_s} = N \quad (4.38)$$

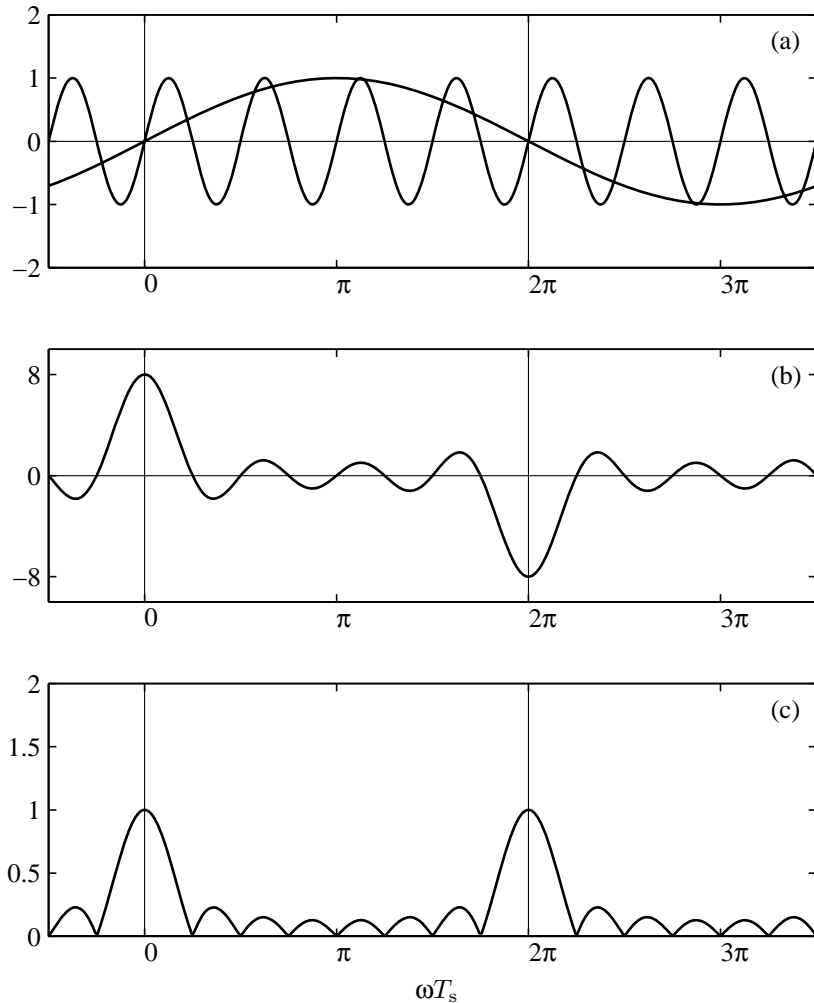
4.5.3. A mozgó átlagolás fáziskarakterisztikája

Mivel a 4.35 kifejezésben szereplő exponenciális kitevője ωT_s lineáris függvénye, ezért a fázismenet lineáris. Meredeksége, azaz a futási idő konstans: $-\frac{N+1}{2}$. Ahol a szinuszok hányadosa előjelet vált, ott π fázisugrás van, a futási idő nem értelmezett.

4.5.4. A mozgó átlagolás szelektivitása, alkalmazása

N -re periodikus jelekre, amelyek $\omega T_s = k\frac{2\pi}{N}$ körfrekvenciájú komponensekből állnak, az átlagolás hibátlan, azaz a frekvencia-átvitel nulla. Ezekben a körfrekvenciákon a szinuszos összetevőknek éppen egész számú periódusa fér bele az átlagolás mozgó ablakába, így a teljes periódusokon belül az ellentétes fázisú pontok páronként éppen kiejtik egymást az összegzésben. Periodikus zajhatás pl. a hálózati zavar, amely ilyen

4.5. A MOZGÓ ÁTLAGOLÁS FREKVENCIATARTOMÁNYBELI JELLEMZÉSE



4.13. ábra. a) Gyors ill. lassú szinusz b) a szinuszok hányadosa c) $1/N$ -nel skálázott abszolútértéke

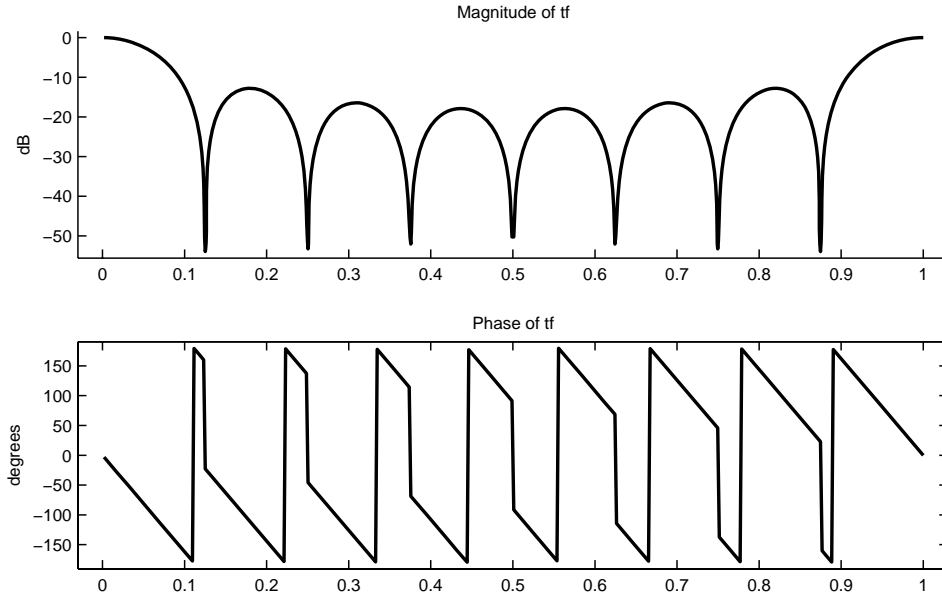
módon kiküszöbölhető. Ehhez 50Hz-es hálózat esetén $T_s = 20$ ms többszörösére kell választani az ablak szélességét. (60 Hz-es, 400 Hz-es hálózat esetén értelemszerűen annak megfelelően.) Mozgó átlagolást valósít meg analóg módon a dual-slope A/D átalakító is.

Az ablakhosszra periodikus zajokkal szemben tehát a mozgó átlagolás ugyanazt az eredményt adja, mint amit az ideális átlagérték adna:

$$\bar{y}(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} y(n) \quad (4.39)$$

A csökkenő tendenciájú amplitúdókarakterisztika időtartománybeli magyarázata az, hogy a fennmaradó részperiódusok, amelyek a tökéletlen elnyomást okozzák, rövidebbek (vö. 4.15 ábra).

4. ÁTLAGOLÁSI ELJÁRÁSOK



4.14. ábra. Csúszó ablakos átlagolás amplitúdó- és fáziskarakterisztikája

4.5.5. A mozgó átlagolás pólus-zérus képe

Írjuk fel az átlagolás átviteli függvényének gyöktényezős alakját, amelyből közvetlenül látszik, hogy hol nulla az átvitel (ahol a számlálónak gyökei vannak, melyeket a nevező nem ejt ki):

$$H(z) = \frac{1}{N} z^{-1} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{N} z^{-N} \frac{z^N - 1}{z - 1} = \frac{1}{N} \frac{\prod_{m=0}^{N-1} (z - z_m)}{(z - 0)^N (z - 1)} \quad (4.40)$$

ahol z_m az m -edik komplex egységgyököt jelöli.

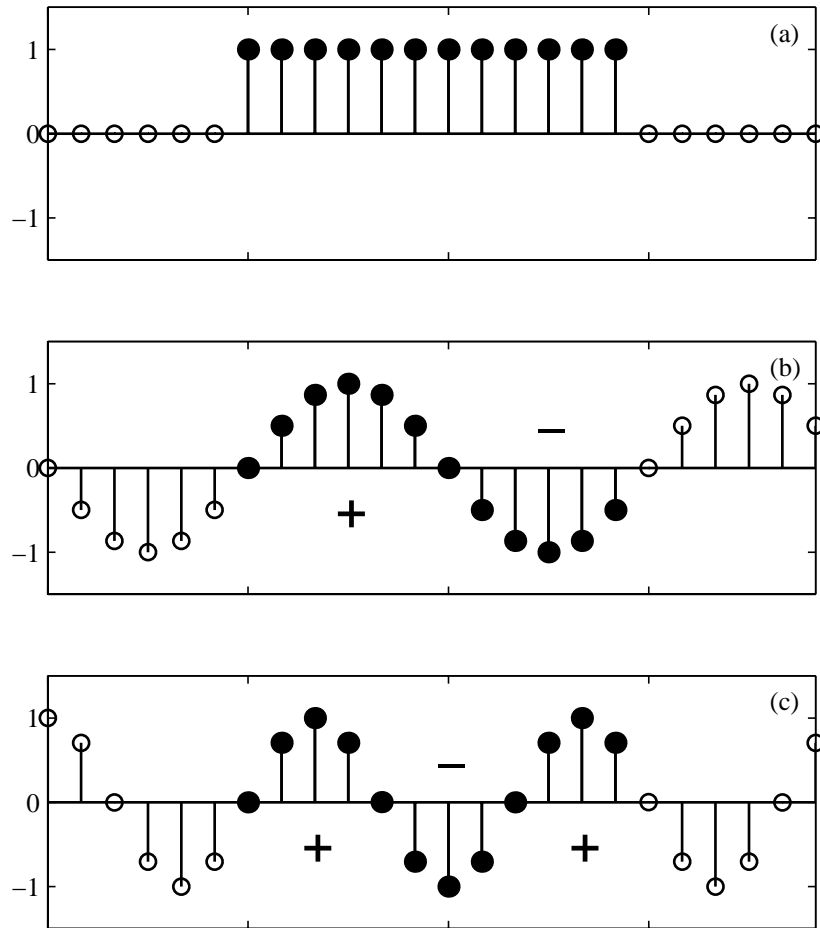
$$z_m^N = 1, \quad m = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (4.41)$$

$$z_m = e^{j\frac{2\pi}{N}m} \quad m = 0, 1, \dots, N - 1; \quad (4.42)$$

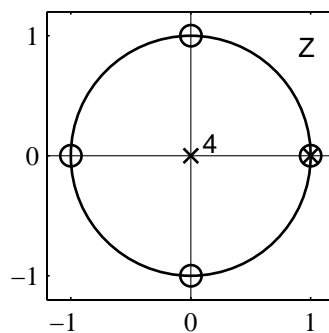
A pólusokat és a zérusokat a \mathcal{Z} -síkon ábrázolva a rendszer pólus-zérus képét kapjuk (ld. 4.16 ábra).

Nyilvánvaló, hogy a 0 frekvencián tapasztalható nemnulla átvitelért a pólus-zérus kiejtés felel. Mivel az origón kívül máshol nem marad pólus, az átvitel számlálója és nevezője, z^{-1} -ben felírva, osztható egymással, így polinomot kapunk az átvitelre, azaz véges impulzusválaszú az átlagoló (ld. 4.16. ábra). Az origóban lévő négyszeres pólus nélkül a hálózat nem lenne megvalósítható.

4.5. A MOZGÓ ÁTLAGOLÁS FREKVENCIATARTOMÁNYBELI JELLEMZÉSE



4.15. ábra. Az egész periódusokban az ellenfázisú minták éppen kiejtik egymást, viszont a maradék részperiódus esetén nem. a) DC esetén nincs kiejtés, b) egész periódus, kiejtés, c) Tört periódus, maradék.



4.16. ábra. A mozgó átlagolás pólus-zérus képe (4-szeres pólus az origóban, egymást kiejtő pólus-zérus pár $z = 1$ -ben)

4.6. Az exponenciális átlagolás jellemzése a frekvenciatartományban

4.6.1. Átviteli függvény, amplitúdó-karakterisztika, pólus-zérus kép

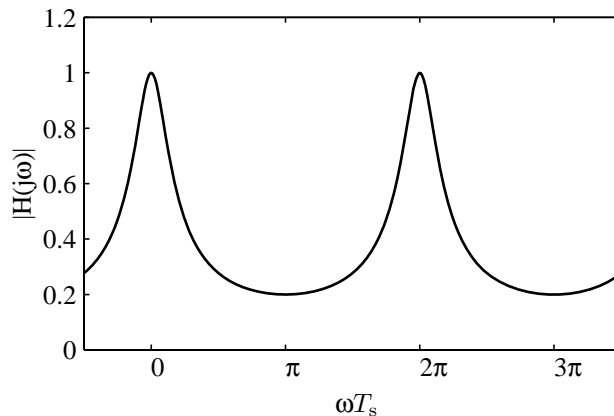
A 4.8 egyenletből az exponenciális átlagolás átviteli függvénye:

$$z\hat{X}(z) = \left(1 - \frac{1}{Q}\right)\hat{X}(z) + \frac{1}{Q}Y(z) \Rightarrow \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{1/Q}{z - (1 - \frac{1}{Q})} \quad (4.43)$$

Vagyis az exponenciális átlagolásnak egy $(1 - \frac{1}{Q})$ -ban elhelyezkedő valós pozitív pólusa van. Q -t minél nagyobbra választjuk, annál közelebb kerülünk az egységkörhöz (4.18 ábra). Ez a pólus 0 frekvencián emel ki, és hatása a frekvencia növekedésével monoton csökken, ami egy monoton aluláteresztő karakterisztikát eredményez (4.17 ábra). Az amplitúdócsúcs annál keskenyebb és magasabb, minél közelebb van a pólus az egységkörhöz ($Q \rightarrow \infty$).

Az amplitúdó karakterisztika:

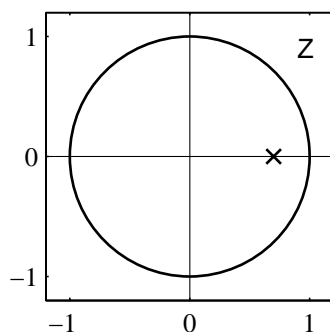
$$\begin{aligned} |H(z)| &= \left| \frac{1/Q}{z - (1 - 1/Q)} \right|_{z=e^{j\omega T_s}} = \sqrt{\frac{1/Q}{e^{j\omega T_s} - (1 - 1/Q)} \cdot \frac{1/Q}{e^{-j\omega T_s} - (1 - 1/Q)}} \\ &= \frac{1}{Q} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(1 - 1/Q)\cos(\omega T_s) + (1 - 1/Q)^2}} \end{aligned}$$



4.17. ábra. Exponenciális átlagolás amplitúdó-karakterisztikája

4.6.2. Általánosítás az ideális átlagolásra

Az ideális átlagolásra nem alkalmazhatunk frekvenciatartománybeli leírást, mivel az átviteli függvény stacionárius kimenetet feltételez, míg az idővariáns szűrőt megvalósító



4.18. ábra. Exponenciális átlagolás pólus-zérus képe

ideális átlagoló kimenetén minden ütemben újabb tranziensek kezdődnek a paraméterváltoztatás miatt. (Igaz, az idő előrehaladtával, ez a paramétermódosítás egyre finomabb, így egyre kisebb tranzienszt okoz.) Jóllehet, a tranziensek miatt nem mondható, hogy az ideális átlagoló ütemenként megfeleltethető egy $n = Q$ tényezőjű exponenciális átlagolónak, az viszont igaz, hogy ha az n -edik ütemben rögzítjük a korrekciós súlytényezőt, akkor ezzel a megfelelő exponenciális átlagolóra történik átkapcsolás, és az annak megfelelő karakterisztika lesz érvényes az állandósult összetevőre. Az ideális- és az exponenciális átlagolás ilyen ötvözését alkalmazzák olyan esetekben az exponenciális átlagolás elindításához, ahol a felejtési tényező túl kicsi és már az indulást követően szeretnék viszonylag torzítatlan átlagértékeket gyűjteni.

5. fejezet

Rekurzív DFT, a megfigyelőelmélet alapjai

5.1. Bevezetés

A mozgó átlagolás amplitúdó-karakterisztikájának főhullámáért az átlagolás pólusa felelős, amely kiejt egy zérust. A pólust elhagyva fésűs szűrőt kapunk.

Az mozgó átlagoló általánosítható úgy, hogy a pólus-zérus kiejtést mindegyik zérusra egyenként megvalósítjuk (az átlagoló átviteli függvényéből $z^{-1} \rightarrow z^{-1}z_m$ helyettesítéssel), az így kapott szűrőkészlet a DFT-szűrőbank.

Az egyes DFT-szűrők amplitúdó- és fáziskarakterisztikája $\frac{2\pi}{N}$ eltolástól eltekintve megegyezik a mozgó átlagolásával. Állandósult állapotban a DFT-szűrők kimenete a bemenő jel megfelelő, komplex Fourier-komponense fázishelyesen.

A megvalósítás során kihasználható, hogy a bemenő jel valós, ezért a szűrőbank komplex együtthatójú szűrői konjugált páronként összevonhatók. A valós együtthatójú szűrőket például másodfokú rezonátortagokkal valósíthatjuk meg.

A DFT-szűrés előállítható úgy is, hogy a kívánt Fourier-komponenset az alapsávra keverjük, komplex átlagolással szűrést végzünk, majd a szűrt jel spektrumát keveréssel visszataloljuk az eredeti frekvenciapozícióba. A visszakeverést elhagyva a harmonikus komponens komplex Fourier-együtthatóját állítjuk elő. Ez a Fourier-sorfejtő. A modulációval bemutatott elv a jelspektrum áthelyezése, melyet felhasznál például a zoom FFT eljárás.

A predikciós-korrekciós kiértékelési sémán alapul a megfigyelőelmélet. A megfigyelő olyan rendszer, amely képes egy másik rendszer állapotváltozóit lemásolni. Ha sikerül olyan modellt alkotnunk a megfigyeléseinkhez, amelyekben az állapotváltozók képviselik a mérendő mennyiségeket, akkor a hibabeccsatolás megválasztásával tetszőleges dinamikájú megfigyelő tervezhető.

A DFT is előállítható megfigyelő formában. Ez a megvalósítás numerikusan kedvezőbb, mint a korábbi struktúra, mivel a megfigyelő egy globális visszacsatolást tartalmaz, és ezen keresztül egyszerre valósítja meg a pólusokat és a zérusokat. Ezzel a rezonátoros szűrőstruktúrával nemcsak DFT, hanem tetszőleges lineáris predikciós eljárás megvalósítható.

5.2. DFT szűrő és DFT sorfejtő

A DFT szűrő definíciójához vizsgáljuk meg először a mozgó átlagolásban szereplő fésűs szűrőt.

5.2.1. Fésűs szűrő

Ha a csúszóablakos átlagolásból elhagyjuk a $z = 1$ -ben elhelyezkedő pólust, akkor ún. fésűs szűrőhöz jutunk (5.1/a ábra). A fésűs szűrő N zérusa az egységnek N -edik gyöke,

$$z_m^N = 1, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.1)$$

$$z_m = e^{j\frac{2\pi}{N}m} \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.2)$$

a szűrő N pólusa pedig az origóban van. Ez alapján a fésűs-szűrő átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{1}{N} \frac{\prod_{m=0}^{N-1} (z - z_m)}{(z - 0)^N} = \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{z^N} = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \quad (5.3)$$

Ebből közvetlenül adódik a fésűs szűrő kimenetét megadó egyenlet:

$$\hat{x}_f(n) = \frac{1}{N} (y(n) - y(n - N)) \quad (5.4)$$

Megjegyzés: Mivel az éppen beérkező megfigyelés nem vehető figyelembe a valós idejű eredményben, ezért a fésűs szűrő önmagában csak késleltetéssel valósítható meg. A mozgó átlagolásban szereplő rezonátor bevezet egy ilyen késleltetést (vö. 4.8 ábra).

A frekvencia karakterisztika:

$$\begin{aligned} H(z)|_{z=e^{j\omega T_s}} &= \frac{1}{N} (1 - e^{-jN\omega T_s}) = \frac{1}{N} e^{-j\frac{N}{2}\omega T_s} \left(e^{j\frac{N}{2}\omega T_s} - e^{-j\frac{N}{2}\omega T_s} \right) = \\ &= e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N}{2}\omega T_s\right)} \cdot \frac{2}{N} \left(\sin \frac{N}{2}\omega T_s \right) \end{aligned}$$

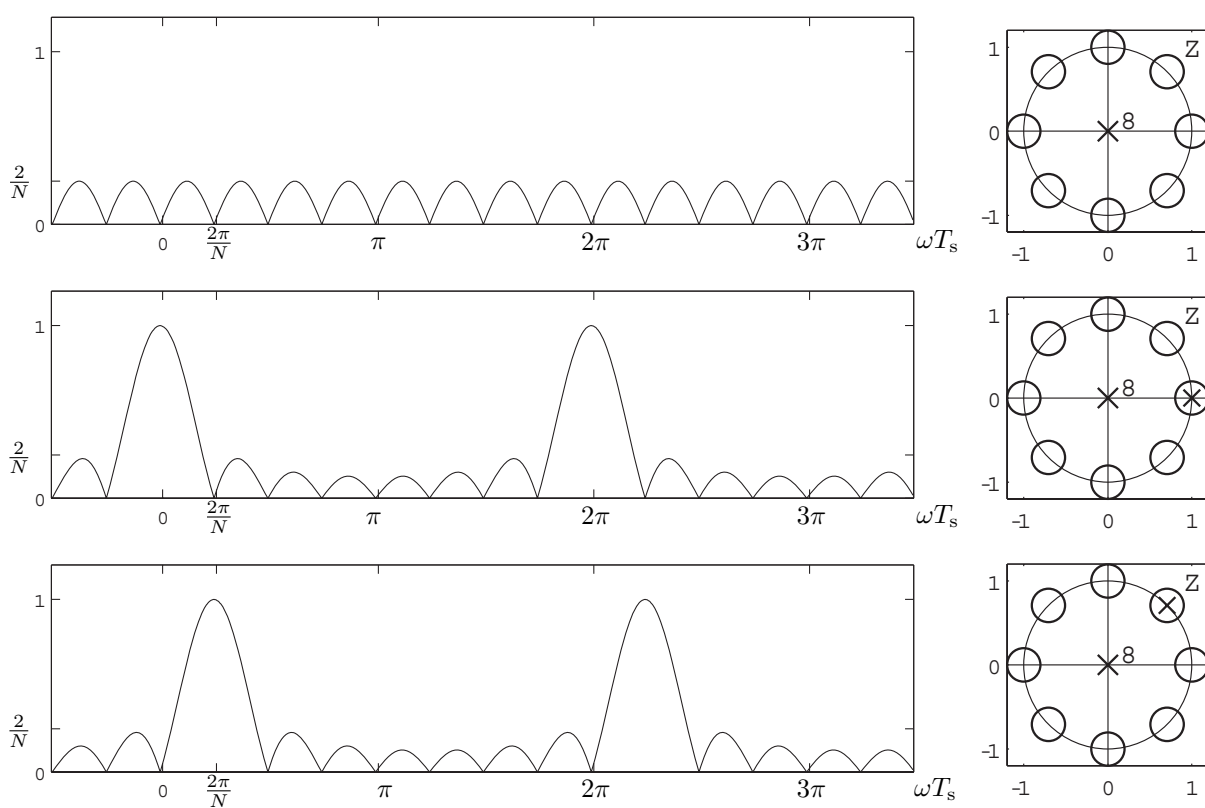
Az átlagolásnál hozzávett $z = 1$ pólus az 5.1/b ábrán látható módon (minden 2π hosszú intervallumban) kitör egy fogat a fésűs szűrő karakterisztikájából.

5.2.2. DFT szűrő

A mozgó átlagoláshoz hasonlóan, a többi $N-1$ egységgyök helyén is kiejthető az adott zérus, ha a mozgó átlagolás pólusát elforgatjuk. A fésűs szűrő m -edik fogát kitorve az amplitúdó-karakterisztikában az átlagolásnál megismert alakú, de eltolt pozíciójú sáváteresztő szűrő-karakterisztikát kapunk (5.1/c ábra).

A pólus elforgatásához $z^{-1} \rightarrow z^{-1}z_m$ helyettesítést hajtunk végre az átlagolás átvitelét megadó egyenletben. A következő m szerint paraméterezett átviteli függvények

5. REKURZÍV DFT, A MEGFIGYELŐELMÉLET ALAPJAI



5.1. ábra. a) Fésűs szűrő amplitúdó-karakterisztikája és pólus-zérus képe, b) pólus-zérus kiejtéssel kapott aluláteresztő karakterisztika c) eltolt pozíciójú pólus-zérus kiejtés ill. fésűfog-kitörés (DFT)

adódnak:

$$H_m(z) = \frac{1}{N} z^{-1} z_m \frac{1 - (z^{-1} z_m)^N}{1 - z^{-1} z_m} \quad (5.5)$$

$$= \frac{1}{N} z^{-1} z_m \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1} z_m}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.6)$$

Utóbbihoz felhasználtuk az 5.1 azonosságot.

Az 5.5 szerinti átviteli függvényben felismerhető az alábbi véges mértani sor összegképlete:

$$H_m(z) = \frac{1}{N} z^{-1} z_m (1 + z^{-1} z_m + (z^{-1} z_m)^2 + \dots + (z^{-1} z_m)^{N-1})$$

elvégezve a beszorzást, és megfordítva a tagok sorrendjét

$$H_m(z) = \frac{1}{N} ((z^{-1} z_m)^N + \dots + (z^{-1} z_m)^2 + z^{-1} z_m) \quad (5.7)$$

kiemelve $z_m^N = 1 - et$

$$H_m(z) = \frac{1}{N} (z^{-N} + z^{-(N-1)} z_m^{-1} + z^{-(N-2)} z_m^{-2} + \dots + z^{-1} z_m^{-(N-1)}) \quad (5.8)$$

ahol $m = 0, 1, \dots, N-1$. Ebből közvetlenül adódik az időtartományban az alábbi egyenlet az m . szűrő kimenetére:

$$\hat{x}_m(n) = \frac{1}{N} \left(y(n-N) + y(n-N+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}m} + \dots + y(n-1) e^{-j\frac{2\pi}{N}m(N-1)} \right) \quad (5.9)$$

A fenti összegben szereplő súlyok, az $\frac{1}{N}$ skálázástól eltekintve, megegyeznek a 2.23 szerinti DFT súlyaival. Vagyis éppen azt a hatást érzük el, mintha soros-párhuzamos átalakítás után, ütemenként elvégeznénk a a 2.23 szerinti DFT szerinti műveletet.

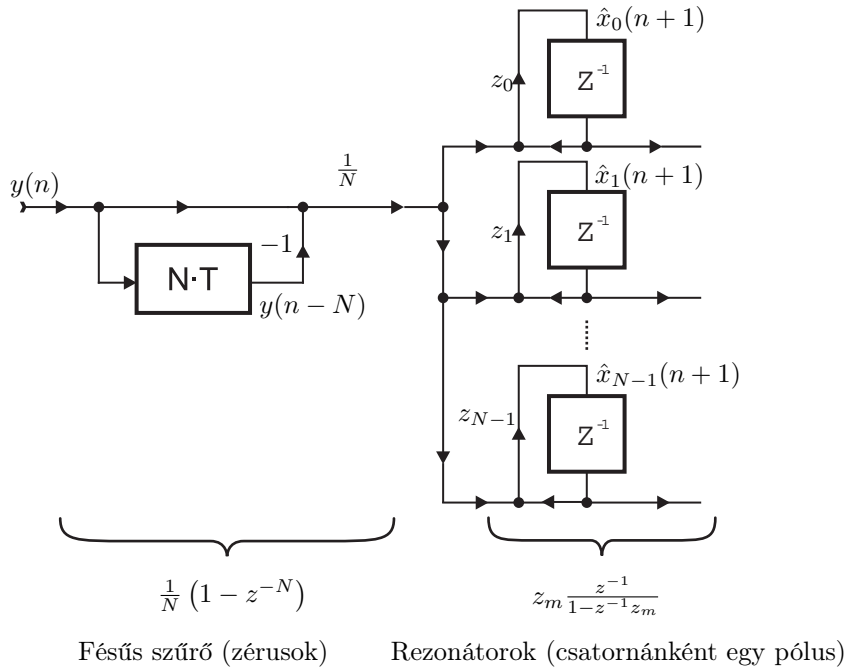
Az m paraméterű szűrők összessége, melyet szűrőkészletnek, vagy szűrőbanknak nevezünk, minden ütemben egy N elemű komplex vektort állít elő a legutolsó N megfigyelés alapján. Hardver megvalósítás esetén az N darab szűrő párhuzamosan számíthatja az eredményt. (ld. 5.2 és 5.3 ábra).

A DFT szűrő amplitúdó-karakterisztikáját 5.5-ből $z = e^{j\omega T_s}$ változócserevel és a számláló, ill. a nevező mértani közepének kiemelésével kapjuk:

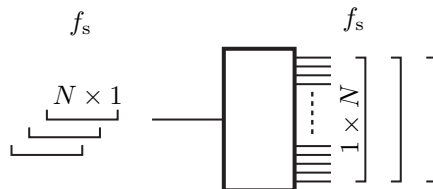
$$|H(z)|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{1}{N} e^{-j(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)} \cdot \frac{1 - e^{jN(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)}}{1 - e^{-j(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)}} = \quad (5.10)$$

$$= \frac{1}{N} e^{-j(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)} \cdot \frac{e^{-j\frac{N}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)}}{e^{-j\frac{1}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)}} \cdot \frac{\sin \frac{N}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)}{\sin \frac{1}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)} = \quad (5.11)$$

$$= \frac{1}{N} e^{-j\frac{N+1}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)} \cdot \frac{\sin \frac{N}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)}{\sin \frac{1}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N}m)} \quad (5.12)$$



5.2. ábra. A DFT-szűrő blokkvázlata



5.3. ábra. A DFT szűrőbank soros-párhuzamos átalakítást is végez a jelen.

Az 5.12 és a 4.35 egyenletek összevetése alapján kimondható, hogy az m -dik DFT szűrő egy olyan sávszűrő, amelynek amplitúdó- és fáziskarakterisztikája jellegre azonos a csúszó ablakos átlagolóéval, de sávközepe $\frac{2\pi}{N}m$ relatív körfrekvencián van. A DFT szűrő úgy viselkedik az $\frac{2\pi}{N}m$ frekvenciapozícióban, mint az átlagoló a nulla pozícióban: míg az átlagolótól azt várjuk, hogy konstans értéket szolgáltatson a kimenetén, addig a DFT szűrőtől azt várjuk, hogy a jelből csak az $\omega T_s = \frac{2\pi}{N}m$ körfrekvenciájú Fourier-komponens jusson a kimenetre. Az N -re periodikus diszkrét jeleket a DFT szűrőbank Fourier-komponenseire bontja.

5.2.3. Megvalósítás valós együtthatójú, másodfokú rezonátor-tagokkal

A DFT szűrők egy-egy $z_m = e^{j\frac{2\pi}{N}m}$ pólusú ún. komplex együtthatójú rezonátort foglalnak magukban. Az egységkörön elhelyezkedő pólus ugyanis azt eredményezi a visszacsatolásban, hogy a magára hagyott rendszer komplex értékű állapotváltozója egy $\frac{2\pi}{N}m$ diszkrét körfrekvenciával forgó fazon lesz, hiszen ennyivel forgatja el ütemenként a z_m -mel való szorzás. Ha tehát ilyen körfrekvenciájú szinuszos jelet adunk a bemenetére, akkor azt csillapítás nélkül fázisszinkronban összegzi, így azon a körfrekvencián végtelen az átvitele, azaz rezonancia lép fel.

A rezonátorok bemenetén $y'(n) = y(n) - y(n - N)$ jel van, amely a csúszó ablakba bekerülő legújabb minta és a kieső legrégebbi minta különbsége, azaz az 5.4 egyenletnek megfelelő fésűs szűrő kimenté. Az egyes rezonátorok kimenetét jelölje $\hat{x}_m(n)$, átviteli függvényét pedig $H_{Rm}(z)$.

A DFT rezonátorok az $m = 0$ indexű egyszerű átlagolót és az $m = \frac{N}{2}$ -hez tartozó szűrőt kivéve, komplex együtthatót tartalmaznak így valós bemenetre is komplex eredményt adnak; amplitúdó-karakterisztikájuk nem páros függvény (vö. 5.1/c ábra). Ennek megfelelően megvalósításukhoz kételemű vektorokon kellene a komplex szorzásnak és összeadásnak megfelelő műveleteket elvégezni. Ilyen kiszámítás például az, ha valamilyen magas szintű programnyelven komplex-műveleteket tudunk végrehajtani. Alacsony szintű realizációnál azonban nem tekinthetünk el attól, hogy a komplex számokon értelmezett műveleteket valós számpárokra végezzük, valós együtthatójú hálózattal, és tulajdonképpen nem egy, hanem két valós értékű jelcsatornát kell megvalósítani rezonátoronként, amelyek egy-egy tárolót tartalmaznak: a valós és a képzetes rész számára, valamint a kimenet is két valós érték: az eredmény valós része és képzetes része.

Az alacsony szintű megvalósítás egyszerűsödik, ha kihasználjuk, hogy a bemenő jel valós-értékű. Ekkor ugyanis a szűrőbank komplex rezonátorai konjugált páronként összevonhatók ($\frac{N}{2}$ -re szimmetrikusan: az első az $N - 1$ -dikkel stb.), mivel kimeneteik is komplex konjugáltjai lesznek egymásnak. (A 0-dik és az $\frac{N}{2}$ -dik rezonátorok eleve valós együtthatójúak, és külön-külön elsőfokú taggal megvalósíthatók.)

Legyen

$$\varphi_m = \frac{2\pi}{N}m. \quad (5.13)$$

Az m -dik és $N - m$ -dik komplex rezonátor átvitelének összegéből a valós részt előállító

5. REKURZÍV DFT, A MEGFIGYELŐELMÉLET ALAPJAI

csatorna:

$$\operatorname{Re}\{H_{Rm}(n)\} = \frac{1}{2} \left(\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} + \frac{z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} \right) = \frac{z^{-1} \cos \varphi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1} \cos \varphi_m + z^{-2}}, \quad (5.14)$$

különbségükből a képzetes részt előállító csatorna:

$$\operatorname{Im}\{H_{Rm}(n)\} = \frac{1}{2j} \left(\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} - \frac{z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} \right) = \frac{z^{-1} \sin \varphi_m}{1 - 2z^{-1} \cos \varphi_m + z^{-2}}. \quad (5.15)$$

A fentiekhez felhasználtuk, hogy:

$$z_{N-m} = e^{j\frac{2\pi(N-m)}{N}} = e^{-j\frac{2\pi m}{N}} = z_m^{-1} = z_m^*, \quad (5.16)$$

valamint az Euler azonosságot:

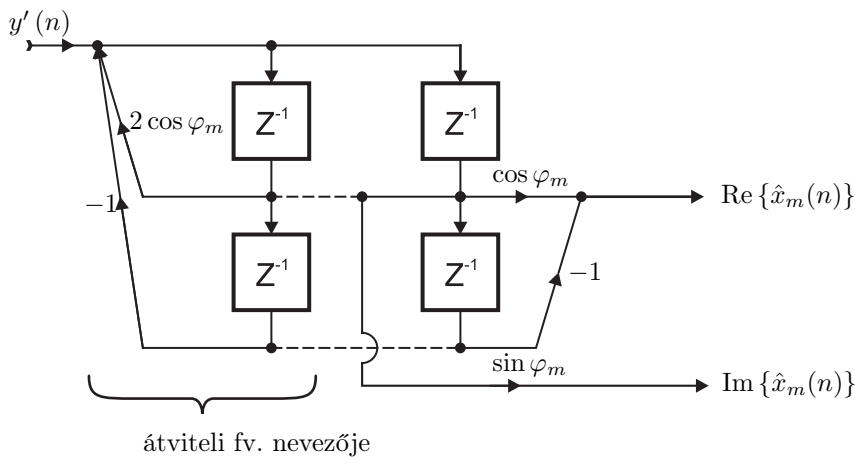
$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi, \quad (5.17)$$

amellyel

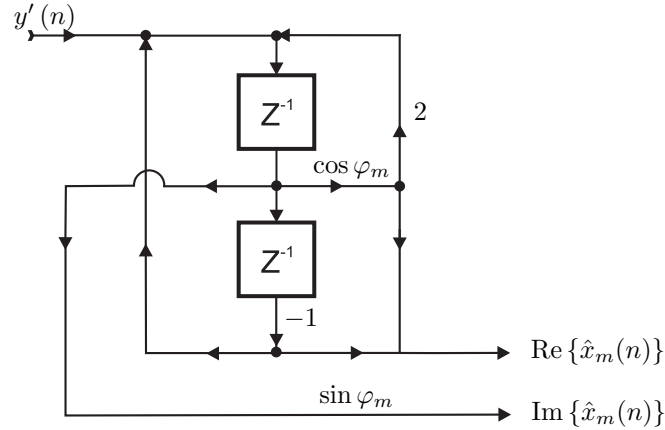
$$z_m + z_m^{-1} = 2 \cos \varphi_m, \quad (5.18)$$

$$z_m - z_m^{-1} = 2j \sin \varphi_m. \quad (5.19)$$

A két csatorna összevonva megvalósítható, mivel a nevezők megegyeznek, vagyis a visszacsatolások egyformák. Ahhoz, hogy ezt kihasználjuk, a kaszkádban előbb a nevezőt kell megvalósítanunk (5.4 ábra). Mivel a két késleltetősorra azonos adatok jutnak, ezért megcsapolási pontjaikon is azonos adatok vannak, vagyis a két késleltető sor összevonható eggyé. Ezt mutatja az 5.5 ábra.



5.4. ábra. A valós és a képzetes jelcsatorna megvalósítása


 5.5. ábra. Az m -dik másodfokú rezonátortag egy lehetséges megvalósítása

5.2.4. DFT sorfejtés, jelspektrum áthelyezése

A DFT-szűrő kimenetére kapott 5.9 kifejezést megismételjük:

$$\hat{x}_{\text{DFTszűrő}} = \frac{1}{N} \left(y(n-N) + y(n-N+1) e^{-j\frac{2\pi}{N}m} + \dots + y(n-1) e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)m} \right) \quad (5.20)$$

Egy kis átalakítás után ezt kapjuk:

$$= e^{j\frac{2\pi}{N}mn} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=n-N}^{n-1} y(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} \right) \quad (5.21)$$

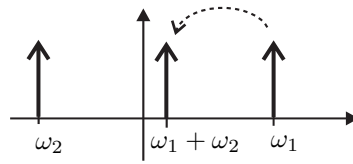
A zárójelzett, súlyozott átlag úgy is előállítható, hogy a beérkező $y(n)$ megfigyeléseket minden ütemben szorozzuk az $e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$ komplex harmonikus jel mintáival, majd átlagolást végzünk. Ezzel éppen a megfelelő súlyozást valósítjuk meg minden egyes ütemben. A két jel időtartománybeli összeszorozását keverésnek hívjuk. A komplex keverők periodikusan ismétlik komplex hullámformájukat.

A keverés a frekvenciatartományban áthelyezi a jelet. Legegyszerűbben két komplex harmonikus szorzásán szemléltethetjük ezt. Legyen $y(n) = e^{j\omega_1 T_s n}$, és $w(n) = e^{-j\omega_2 T_s n}$. Szorzatuk $u(n) = y(n)w(n) = e^{j\omega_1 T_s n} e^{-j\omega_2 T_s n} = e^{j(\omega_1 - \omega_2) T_s n}$, vagyis a keverés $-\omega_2 T_s$ diszkrét körfrekvenciával áthelyezte a jel spektrumát (5.6 ábra). Ha az $y(n)$ jel egy tetszőleges periodikus jel, akkor a keverés minden egyes Fourier-komponensét ugyanennyivel tolja el, tehát ugyanúgy áthelyeződik a teljes spektrum. A híradástechnikai szóhasználatban a vivővel való keverést modulációnak, az alapsávra keverést demodulációnak nevezik.

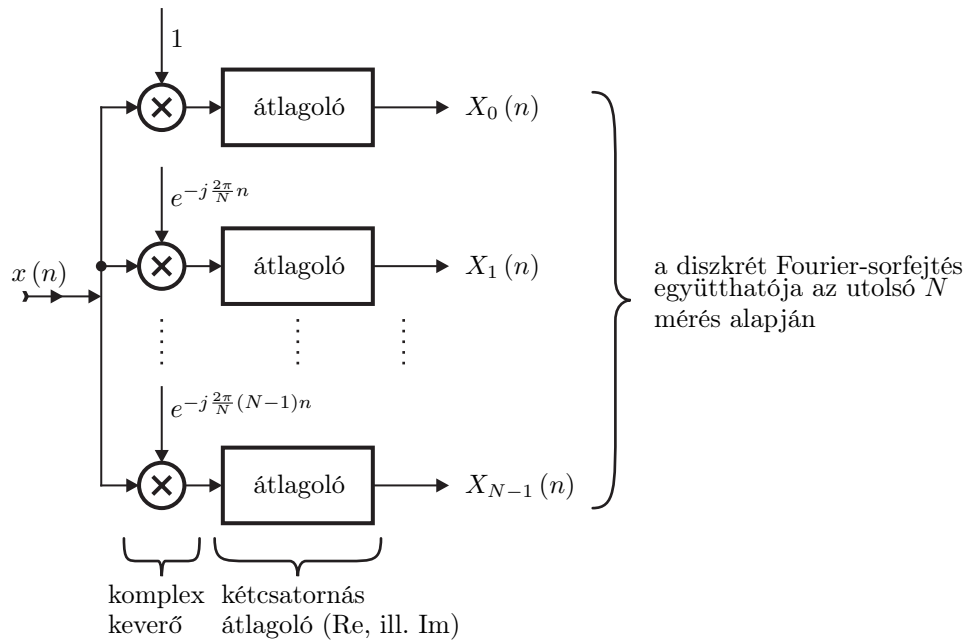
A keverést követő átlagolástól állandó értékű kimenetet várunk. A (5.21) egyenletben az átlagolást egy visszakeverés követi az $e^{j\frac{2\pi}{N}mn}$ moduláló jellel.

Megjegyzés: a DFT-szűrő levezetésében, és rezonátoros megvalósításában nem használtunk keverést, kizárólag a szűrő együtthatóját változtattuk.

5. REKURZÍV DFT, A MEGFIGYELŐELMÉLET ALAPJAI



5.6. ábra. Spektrumáthelyezés modulációval



5.7. ábra. DFT sorfejtés

A *DFT-sorfejtő* (5.7 ábra) az N -edik egységgyök szerint eltolja a spektrumot úgy, hogy a vizsgált frekvencia-összetevő a 0 frekvenciára kerüljön, majd átlagolással előállítja a harmonikus jelkomponens Fourier együtthatóját. Megjegyzés: maga a Fourier-integrál hasonló struktúrájú:

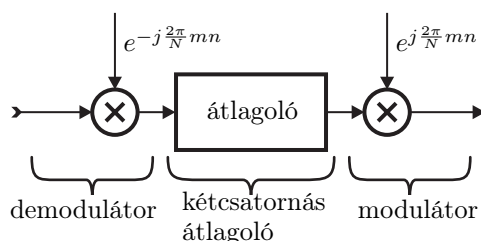
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad (5.22)$$

azaz komplex keverés, majd aluláteresztő szűrés, de véges energiájú jelekre.

A DFT sorfejtés kimenete és a DFT szűrő kimenőjele között egy $e^{j\frac{2\pi}{N}mn}$ -nel végzett komplex keverés teremt kapcsolatot. Az 5.8 ábrán a szorzás előtti ponton az (ideális esetben konstans) Fourier-együttható, a szorzás után a DFT szűrőnek megfelelő kimenőjel jelenik meg.

A DFT komponensek előállítása nyomán kétféle frekvenciatartománybeli áthelyezést ismerhettünk meg:

1. Szűrőkarakterisztika áthelyezése: A DFT szűrő esetén az aluláteresztő szűrő frekvenciatulajdonságait toltuk el más sávközépi frekvenciára, a szűrőben szereplő együtthatók megváltoztatásával.



5.8. ábra. DFT komponens megvalósítása keveréssel

2. Jel spektrumának áthelyezése: A keverésen keresztül megvalósított DFT szűrő esetén a jel eltolása, átlagolása, visszatolása volt az út.

A *jelspektrum áthelyezése* egy általánosan használt elv, amely két megfontolásból lehet előnyös:

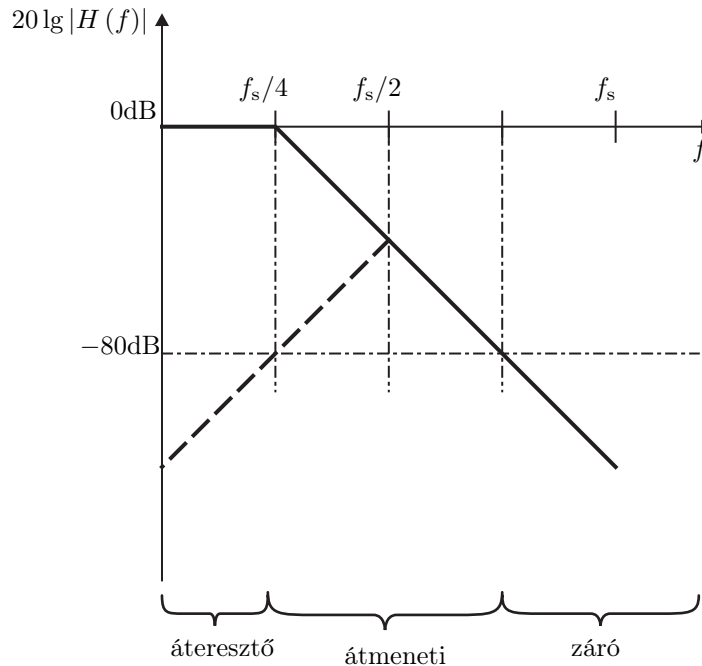
- A rögzített paraméterekkel megvalósított jelfeldolgozó eszközhöz „visszük” a spektrumot. Integrált áramkörök esetén ez azonos áramköri (logikai) blokkokból való építkezés lehetőségét teremti meg. Műszer esetében jelentheti azt, hogy egyetlen jelfeldolgozó modul alkalmazható többféle frekvenciatartomány vizsgálatához a keverést követően.
- Az *alacsonyabb frekvenciára keverés lehetősége* nagyfrekvenciás jelek esetén előnyös. Nagy sávzélességű vagy nagy vivőfrekvenciájú jel nagy mintavételi frekvenciát tesz szükségessé, ami meghatározza az adatfolyam sebességét, és előírja a műveletvégzések gyorsaságát. Bonyolultabb jelfeldolgozási algoritmusok esetén keveréssel, majd szűréssel sávkorlátozni lehet a jelet, és újra-mintavételezéssel alacsonyabb mintavételi frekvencián lehet folytatni a jelfeldolgozást.

5.3. A DFT alkalmazása spektrumbecsléshez

5.3.1. FFT-analizátor

Az ablakhosszra periodikus jelekre a DFT előállítja a jel Fourier-sorának komplex együtthatóit, amelyek abszolút érték négyzete a jel teljesítményspektrumát adják közvetlenül. A DFT négyzeteit periodogramnak is hívják. A periodogram használható sztochasztikus jelek spektrumának a becslésére is. Ld. Schnell, 24.6.2., 24.8.3 fejezet. Ezen az elven működnek a Fourier-analizátorok, melyek a DFT kiszámítására különböző gyors Fourier transzformációs, angol rövidítéssel FFT (Fast Fourier Transform) eljárásokat használnak.

Az FFT algoritmusok olyan számítási struktúrák, amelyek kihasználják a DFT szimmetrikus és ciklikus tulajdonságait (ld. Schnell, 24.7.5 fejezet). Míg a 2.23 szerinti kiszámításánál az N darab N tagú összeg számításához $O(N^2)$ (N^2 nagyságrendű) komplex szorzás és összeadás szükséges, addig az FFT-vel, amely faktorizációk útján az összes DFT pontot együtt csak számítja, $O(N \cdot \log_2 N)$ számítási művelet szükséges.



5.9. ábra. Az átlapolásgátló szűrő karakterisztikájának betükröződése

Fontos, hogy míg a DFT-szűrő rekurzívan állítja elő az eredményt, addig az FFT nem rekurzív. Az FFT blokkos számítási eljárás, ami azt jelenti, hogy az eljárás feltételezi, hogy a számítás megkezdésekor az összes minta egyszerre rendelkezésre áll.

Spektrumanalízis esetén nem jelent hátrányt a blokkos kiértékelés, mivel az egymást követő ütemek transzformáltjai redundanciát tartalmaznak, (mialatt N minta keresztülhalad a DFT-szűrőn, azalatt N^2 kimenő minta születik). Ezért spektrumbecslés esetén elegendő N ütemenként „néhányszor” kiértékelni a transzformáltat. Ilyen feltételek mellett az FFT rendkívül hatékonyan alkalmazható.

A DFT-szűrő számításához ütemenként csak $O(N)$ műveletet kell végezni a transzformált előállításához, de a rekurzív számítás miatt nem takaríthatjuk meg az ütemenkénti kiértékelést, ezért N ütemre vetítve a számítási igénye $O(N^2)$.

A mintavételezés előtt a vizsgált jelet sávkorlátozni kell. Az analóg átlapolásgátló szűrőt úgy kell megtervezni, hogy a vizsgálni kívánt sávban egyenletes áteresztő tartománya legyen, valamint nagy legyen az elnyomása abban a sávban, amelyik a mintavételezés következtében éppen ebbe a vizsgált frekvenciasávba lapolódik be. Az áteresztő- és a zárósáv közötti átmeneti tartomány éppen önmagába lapolódik be a mintavételezést követően.

Az 5.9 ábra egy olyan átlapolásgátló szűrő jellegre helyes amplitúdó-karakterisztikáját mutatja, amely a mintavételi frekvencia negyedéig terjedő vizsgálati tartományt enged meg 80dB előírt dinamika mellett, azaz a spektrumcsúcstól számítva -80dB dinamikartományban nem keletkezhetnek hamis összetevők.

Szagatott vonallal a karakterisztika betükröződése látható a mintavételezést követően, ami úgy értelmezhető, hogy ha a bemenőjel fehér zaj, akkor a szűrőkarakterisztika

által kivágott jelspektrum a mintavételezés után a szaggatott vonal szerint tükröződik be.

5.3.1 Példa. Vizsgáljuk meg az elért felbontást FFT esetén. $N = 1024$ pontos FFT esetén és az 5.9 ábra szerinti aluláteresztő szűrővel $\frac{N}{4} = 256$ értékes pontot kapunk, mivel a $\frac{N}{2}$. pontra szimmetrikusan komplex konjugált értékek találhatóak, ill. a $\frac{N}{4}$. pont felett az átlapolás miatt nem teljesül a 80dB-es dinamika. Ha a mintavételi frekvencia $f_s = 102,4$ kHz, (amivel a vizsgálható tartomány $\frac{f_s}{4} = 25,6$ kHz,) akkor a felbontás $\frac{f_s}{N} = 100$ Hz. ■

A felbontás ($\frac{f_s}{N}$) növelésére alkalmazható nagyobb pontszámú FFT, amelynek azonban határt szab a numerikus pontosság és a rendelkezésre álló számítási teljesítmény, ill. tárolóméret. Mivel N növelésével nem lehet lényegesen javítani a felbontást, ezért az f_s mintavételi frekvenciát kell csökkenteni. A megoldás az, hogy egyszerre csak egy kis tartományt vizsgálunk; sok esetben egyébként is csak a spektrum jellegzetes tartományai az érdekesek. Ezt a megoldást sávselektív FFT eljárásnak hívják.

5.3.2. Sávselektív Fourier transzformációs eljárás

A sávselektív Fourier transzformációs eljárás (röviden: sávselektív eljárás, angolul: „band selective FFT” v. „zoom FFT”) a jelspektrum áthelyezésének elvét használja fel. Mint a neve is utal rá, egy adott sávot kiválasztva becsli a jel spektrumát.

Az 5.10 ábrán nyomon követhető módon a sávselektív eljárás komplex keveréssel az alapsávra helyezi át a spektrumban vizsgálni kívánt sávot, majd ezt követően aluláteresztő szűréssel korlátozza a spektrumot ennek a sávnak a környezetére, majd újramintavételezi a jelet alacsonyabb frekvenciával. További újra-mintavételezéssel, a spektrumnak mind keskenyebb szelete válik vizsgálhatóvá az origó mind kisebb környezetében, egyre kisebb mintavételi frekvencia mellett. Végül az alacsony mintavételi frekvencia mellett elvégezhető FFT-vel megfelelő felbontású spektrumbecslés lehetséges. A többlépcsős újra-mintavételezésre azért van szükség, mert így az alapsávi szűréssel szembeni követelmények lényegesen enyhíthetők. A – többnyire 2-es, 3-as, 5-ös tényezőjű – decimálások eredő hányadosát jelölje: $L = \prod_i L_i$.

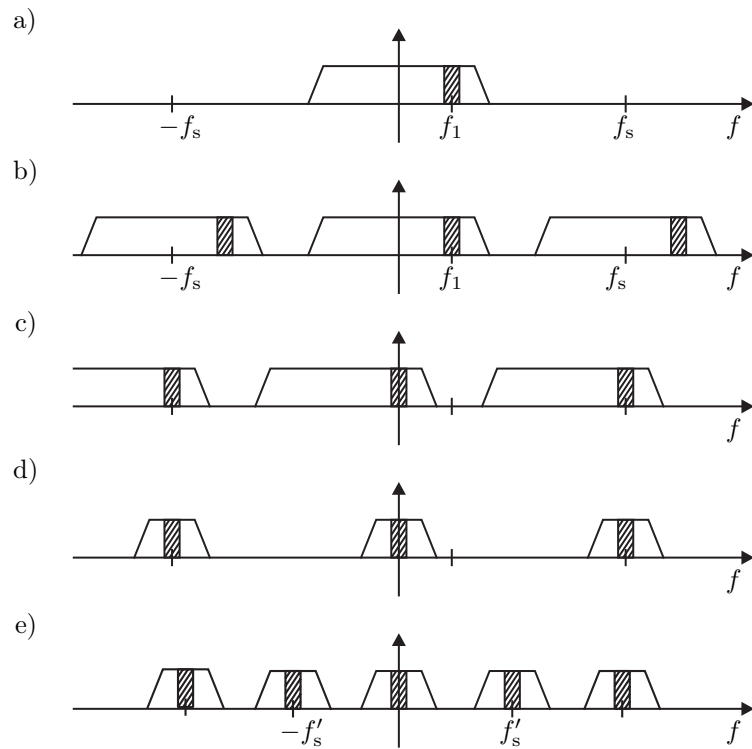
Az újramintavételezés (decimálás) során az aluláteresztő szűrés lecsökkenti a jel sávzélességét, így ezt követően elegendő a kimenőjel minden L_1 -dik mintát megtartani a mintavételi tétel betartásával, ahol L_1 a sávzélesség lecsökkentésének mértékétől függ.

A sávselektív módszer lehetővé teszi, hogy P bemenő mintára P pontos FFT helyett csak egy $N = \frac{P}{L}$ pontos FFT-t számítsunk, (azonos ideig gyűjtve a mintákat), amely az eredeti (P pontos) FFT-nek tetszőleges N szomszédos pontját adja meg.

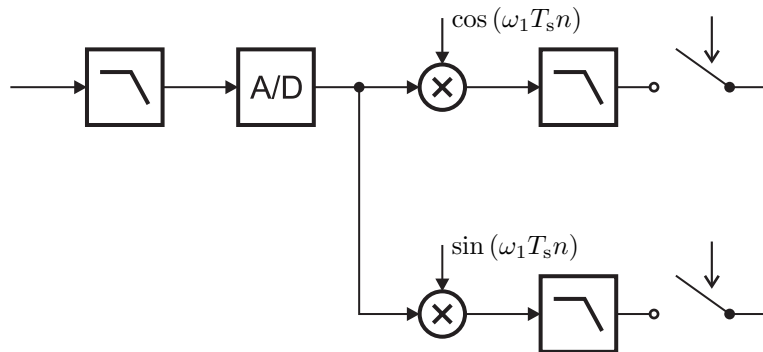
Más megvilágításban: egy N pontos FFT-t alkalmazva, az eljárás L -szer pontosabb felbontást eredményez (a teljes vizsgálható sávnál L -szer keskenyebb sávban és az eredeti diszkrét jel $N \cdot L$ mintáját feldolgozva), mint az eredeti jel N pontos minta regisztrátumán elvégzett N pontos transzformáció.

Megjegyzés: A fentiekből egyértelmű, hogy az eljárás nem tart rövidebb ideig, mint ha a teljes spektrumot vizsgálánánk. A felbontás akárcsak az egyszerű FFT esetében, az analóg jel regisztrátum-hosszána reciprokával egyenlő.

5. REKURZÍV DFT, A MEGFIGYELŐELMÉLET ALAPJAI



5.10. ábra. A jelspektrum alakulása a sávselektív eljárásban



5.11. ábra. Sávselektív eljárás blokkvázlata az újra-mintavételezésig

Megjegyzés: „decimálás” = „tizedelés”, de az eljárást tetszőleges arányú mintaeldobásra használjuk. Ha a sávkorlátozó szűrést is értjük alatta, akkor célszerű „decimáló szűrés” kifejezést használjuk.

5.3.2 Példa. Ha egy $\Delta f_{\text{vizsg.}} = 1$ Hz széles sávot kívánunk vizsgálni, akkor az 5.9 ábra szerinti feltételek mellett $f'_s = 4$ Hz-re csökkenthető le a mintavételi frekvencia (a sávselektív eljárással). Az FFT-nél példaként vett (83. old) $N = 1024$ pontos FFT-t alkalmazva a felbontás ekkor $\Delta f' = \frac{4 \text{ Hz}}{1024} \simeq 0,004$ Hz. A decimált jel mintavételének periódusa $T'_M = \frac{1}{f'_s} = 0.25$ s, ilyen időközönként áll elő egy új minta.

A vizsgálathoz az analóg jel $T_r = 1024 \cdot 0,25 \text{ s} = 256 \text{ s} = 4 \text{ min } 16 \text{ s}$ hosszú részletét szükséges mintavételezni. Ha az 5.3.1 példához (83. old) hasonlóan továbbra is 102,4 kHz mintavételi frekvenciát alkalmazunk (a rendelkezésre álló átlapolásgátló szűrő, vagy a vizsgálni kívánt frekvenciasáv sávközepe miatt), akkor összesen $P = 102,4 \text{ kHz} \cdot 256 \text{ s} = 25 \cdot 2^{20}$ db minta begyűjtése szükséges a megadott, igen finom $\Delta f = 0,004$ Hz felbontáshoz. Nem valósidejű feldolgozás esetén ennyi mintának az eltárolása is probléma volna, nemhogy a megfelelő pontszámú FFT-nek a kiszámítása. A pontok hatalmas tömege, a teljes FFT kiszámítása esetén, az eredményben egyformán jelentkezne $\frac{f_s}{\Delta f} = P$, és a vizsgálandó sáv a teljes spektrumeredménynek csak elhanyagolhatóan kis részét tenné ki (1 Hz/25,6 kHz). ■

Megjegyzés: Berendezésben az első újramintavételezésig célhardverrel dolgozzák fel a jelet. Az azt követő, lecsökkent mintavételi ütem mellett szoftver megvalósítást alkalmaznak.

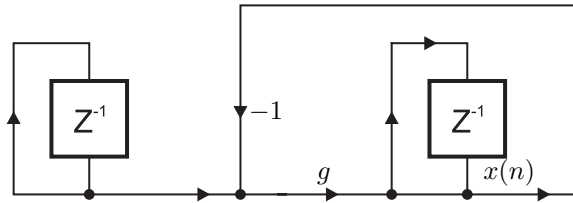
Megjegyzés: Az 5.10 ábra c-e. sorában ábrázolt jel már nem valós-értékű (spektruma nem páros ill. páratlan, valós ill. képzetes részű). Ugyanez vehető észre az 5.11 ábrán, ahol megjelenik a valós-, és képzetes jelcsatorna.

5.4. A modell beépülése a mérési eljárásba, a megfigyelőelmélet alapjai

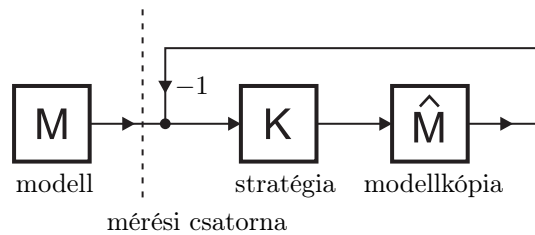
5.4.1. Jelmodell és modellkópia

Tegyük fel, hogy mérendő egy x állandó. Ennek modellje az 5.12 ábra szerint egy önmagára visszacsatolt állapotváltozó lehet, melynek kezdeti értéke, $x(0)$, a keresett állandó. Ugyanígy ennek az állandónak az inverz modellben megvalósított kópiája is egy önmagára visszacsatolt tároló elem, amelynek azonban a kezdeti értéke, $\hat{x}(0)$, tetszőleges. A másolás a predikciós-korrekción elv segítségével a két rendszer állapotváltozóinak eltéréseiből származtatott hiba becsatolásával hajtható végre az 5.12 ábra szerint. A predikció-korrekción általános sémáját emeli ki az 5.13 ábra. M a modell, \hat{M} a modellkópia, K a korrekciós stratégia.

Az, hogy a hibát hogyan használjuk fel, nem egyértelmű. Ha azt feltételezzük, hogy a mérésünk pontos, akkor a hibát közvetlenül is becsatolhatjuk ($g = 1$), és egyetlen lépésben átmásolódik az állapotváltozó, a további lépésekben a hiba nulla lesz. Abban az esetben azonban, ha zaj terheli a mérési csatornát, akkor nem az állapotváltozót, hanem annak egy zajos értékét kapjuk minden lépésben. Ha lineárisan átlagoljuk a



5.12. ábra. A konstans érték egy lehetséges modellje felfedezhető az átlagolásban



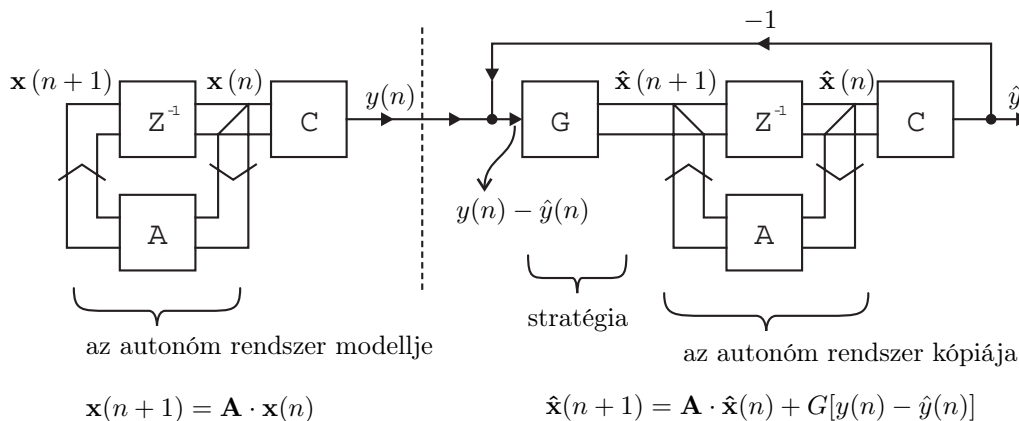
5.13. ábra. A predikciós-korrekciós séma blokkvázlata

mintákat, vagyis a 4.5 egyenlet szerint g -t $\frac{1}{n+1}$ -re választjuk, akkor a zaj kiátlagolódik. Zaj nélküli esetben ilyenkor is egy lépésben átmásolódik az állapotváltozó és a továbbiakban eltűnik a hiba. Alkalmazható $g = \frac{1}{Q}$, $Q > 1$ konstans is, ami az exponenciális átlagolásnak felel meg, és így tovább.

5.4.2. Megfigyelő tervezése lineáris rendszerhez

A megfigyelők olyan rendszerek, amelyek egy másik rendszer állapotváltozóinak, vagy az azokból származtatott mennyiségeknek a meghatározására szolgálnak, azaz végső soron mérési eljárást valósítanak meg. A továbbiakban mindössze a lineáris, időinvariáns rendszerekre szorítkozunk, és olyan megfigyelőre, amely a mérendő rendszer állapotváltozóit azonosan másolja.

Az 5.14 ábrán látható rendszer baloldalt egy autonóm (bemenet nélküli) rend-



5.14. ábra. Lineáris, mérendő- és megfigyelő rendszer

szert, a szaggatott vonaltól jobbra egy másik, ún. megfigyelő rendszert tartalmaz. A megfigyelt N -ed rendű rendszer meghatározott struktúrájú és adott paraméterű (\mathbf{A} : állapotátmenet mátrix, \mathbf{C} : „kicsatoló” mátrix), nem ismerjük azonban állapotát (\mathbf{x}). Az \mathbf{A} állapotátmenet mátrix, és \mathbf{C} „kicsatoló” mátrix segítségével az alábbi állapotváltozós leírása adható:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) \quad (5.23)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) \quad (5.24)$$

A megfigyelő, amely képes követni a megfigyelt rendszer állapotát úgy áll elő, hogy még egyszer megvalósítjuk az autonóm rendszert, kiegészítve egy bemenettel. A bemenetet a két rendszer kimenetének eltéréseiből, vagyis a hibából képezzük a \mathbf{G} „becsatoló” mátrixon keresztül. A rendszerkópia állapotváltozói a megfigyelt rendszer állapotának becselői, ezért közvetlenül a becselő jelölést ($\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$) alkalmazhatjuk a rendszer leírásakor:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{G}(\mathbf{y}(n) - \hat{\mathbf{y}}(n)) \quad (5.25)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(n) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(n) \quad (5.26)$$

Visszahelyettesítéssel kiküszöbölhetők a kimeneti változók, és az is látszik, hogy a megfigyelő rendszer állapotátmenet mátrixa ($\mathbf{A} - \mathbf{GC}$) :

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{G}\mathbf{y}(n) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{GC}\mathbf{x}(n) \quad (5.27)$$

Egészét tekintve a rendszer autonóm, és a követési hiba eltűnésével páronként meg- egyező állapotváltozókat kell kapnunk. Az állapotváltozók különbségeire, vagyis a kö- vetési hibára differencia-egyenlet írható fel, melyet hibarendszernek hívunk:

$$\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)) - \mathbf{GC}(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)) = \quad (5.28)$$

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{GC})(\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})^{n+1}(\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)) \quad (5.29)$$

Ha a mérendő rendszer teljesen megfigyelhető, akkor a \mathbf{G} mátrix alkalmas megvá- lasztásával tetszőleges dinamikájú megfigyelő létrehozható. A gyakorlatban a megfi- gyelő sajátértékeit úgy állítják be, hogy a konvergencia gyorsabb legyen, mint a rend- szer egyéb változásai.

5.4.3. Véges lépésben konvergáló megfigyelő

A továbbiakban azokat a megfigyelőket tekintjük, amelyek véges lépésben konvergál- nak. Az egy- illetve többlépéses konvergencia esete a \mathbf{C} „kicsatoló” mátrix alapján választható külön.

Ha $\dim \mathbf{x} = \dim \hat{\mathbf{x}} = N$ és $\dim \mathbf{y} = M$, akkor a mátrixok dimenzióira $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$ miatt $\dim \mathbf{A} = N \times N$, $\dim \mathbf{G} = N \times M$ és $\dim \mathbf{C} = M \times N$ kell teljesüljön. Míg a \mathbf{C} „kicsatoló” mátrix c_{ij} elemei azt adják meg, hogy a kimenetvektor i . elemének előállításához milyen együtthatóval kell venni a j . állapotot, addig a \mathbf{G} „becsatoló” mátrix minden egyes g_{ij} eleme azt adja meg, hogy a kópia i . állapotának kiszámításához milyen együtthatóval kell venni a hibavektor j -edik elemét.

Ha \mathbf{C} négyzetes, vagyis annyi kimenete van a megfigyelt rendszernek, ahány állapotváltozója van, akkor \mathbf{G} is az. Ilyenkor két eset lehetséges: az egyes kimenetek vagy olyan súlyozott összegei az állapotváltozóknak, hogy belőlük egyértelműen vissza lehet következtetni, hogy mik voltak az egyes állapotváltozók, vagy nem. Ha igen, akkor nyilván felírható az a \mathbf{G} mátrix, amellyel ez a visszaalakítás megtehető, ha nem, akkor bizonyos kimenetek feleslegesek, vagyis elhagyásukkal az az eset adódik, amikor \mathbf{C} nem négyzetes. Matematikailag az előbbi gondolatmenet úgy fogalmazható meg, hogy amennyiben \mathbf{C} négyzetes mátrix, és sor- illetve oszlopvektorai függetlenek, létezik \mathbf{C}^{-1} , amellyel jobbról szorozva az $\mathbf{A} - \mathbf{GC} = \mathbf{0}$ egyenletet $\mathbf{G} = \mathbf{AC}^{-1}$ adódik. Vagyis megadható olyan \mathbf{G} mátrix, amellyel egylépéses konvergencia biztosítható.

Ha \mathbf{C} nem négyzetes (és sorok elhagyásával nem tehető négyzetes, nonszinguláris mátrixszá), akkor egylépéses konvergencia nem lehetséges. További lehetőség a véges lépésben elérendő konvergencia biztosítására az, ha a hibarendszer állapotátmenet mátrixa $(\mathbf{A} - \mathbf{GC})$ „kontraktív” jellegű, vagyis az autonóm hibarendszer a hibateljesítményt adott számú lépés alatt disszipálni képes. Matematikailag $(\mathbf{A} - \mathbf{GC})^N = \mathbf{0}$ kell, hogy teljesüljön. Ilyenkor $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$ nilpotens mátrix, ami annyit jelent, hogy olyan nem nulla mátrix, mely bizonyos számú (legfeljebb $N - 1$) önmagával történő szorzás után, vagyis bizonyos hatványkitevő fölött, nullává válik. A nilpotens mátrixok meghatározó jellemzője, hogy valamennyi sajátértékük nulla. Ez a megállapítás azzal egyenértékű, hogy a rendszer pólusai mind az origóban helyezkednek el, vagyis a rendszer frekvenciaátviteli függvénye z^{-1} polinomjaként írható fel. Ez viszont azt jelenti, hogy véges impulzusválaszú (FIR) a rendszer.

Az N lépéses konvergencia, illetve a sajátértékekre vonatkozó tulajdonság alapján \mathbf{G} kétféleképpen is számítható: először fel kell írni parametrikusan az $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$ mátrixot, majd vagy a $(\mathbf{A} - \mathbf{GC})^N = \mathbf{0}$ mátrix elemeit kell felírni és megoldani a nullával való egyenlőségeket, vagy az $\mathbf{A} - \mathbf{GC}$ mátrix karakterisztikus egyenletét kell felírni, és az abban szereplő 0-tól $N - 1$ -dik terjedő hatványokig az együtthatókra felírni a nullával való azonosságot, majd megoldani az így kapott egyenletrendszert; a karakterisztikus egyenletnek ugyanis $\lambda^N = 0$ alakúnak kell lennie.

5.4.1 Példa. Tekintsünk egy másodfokú autonóm rendszert, amelynek állapotátmenet mátrixa, ill. „kicsatoló” mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \quad 1]; \quad (5.30)$$

Tervezendő a megfigyelő \mathbf{G} mátrixa. $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix};$

A megfigyelő állapotátmenet mátrixa ezzel : $\mathbf{A} - \mathbf{GC} = \begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix};$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{GC})^2 = \begin{bmatrix} (1 - g_0)^2 + g_0g_1 & g_0(g_0 + g_1) \\ g_1(g_0 + g_1) & (1 + g_1)^2 + g_0g_1 \end{bmatrix} = 0 \implies g_0 = \frac{1}{2}; \quad g_1 = -\frac{1}{2},$$

amivel a megfigyelő állapotátmenet mátrixa:

$$\mathbf{A} - \mathbf{GC} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Ha $x_1, x_2, \hat{x}_1, \hat{x}_2$ állapotváltozók kezdeti értékeit rendre a, b, c, d -vel jelöljük, akkor a rendszer változói, az alábbiak szerint alakulnak:

n	x_1	x_2	y	$y - \hat{y}$	\hat{y}	\hat{x}_1	\hat{x}_2
0	a	b	$a + b$	$a + b - c - d$	$c + d$	c	d
1	a	$-b$	$a - b$	$a - b - c + d$	$c - d$	$\frac{a+b+c-d}{2}$	$\frac{-a-b+c-d}{2}$
2	a	b	$a + b$	0	$a + b$	a	b

A további lépésekben a hiba azonosan nulla. Érdekes, hogy ha kezdeti állapotok nullák: $\hat{x}_1(0) = c = \hat{x}_2(0) = d = 0$, akkor ennél a megfigyelőnél az állapotok konvergenciájának bekövetkeztéig az $\hat{y} = 0$ kimenet nulla. ■

Ha a mérendő rendszernek bemenete is van, akkor mindkét állapotegyenlet kiegészül, de „egyformán”; az additív tagra a szuperpozíció elve érvényes:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{G}[\mathbf{y}(n) - \hat{\mathbf{y}}(n)] + \mathbf{B}u(n) \quad (5.32)$$

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}u(n) \quad (5.33)$$

Megjegyzés: Abban az esetben, ha a megfigyelési csatornán keresztül a megfigyelt rendszer kimenetéhez, vagy közvetlenül az állapotváltozóikhoz zaj adódik, akkor a véges lépésű konvergencia nem teljesül. Az elvben véges, több lépéses konvergenciát biztosító rendszer zaj esetén valamivel kedvezőbb tulajdonságú, mint az egylépéses konvergenciát biztosító, mert a zaj bizonyos fokig kiátlagolódik.

5.4.4. A megfigyelőelmélet alkalmazása

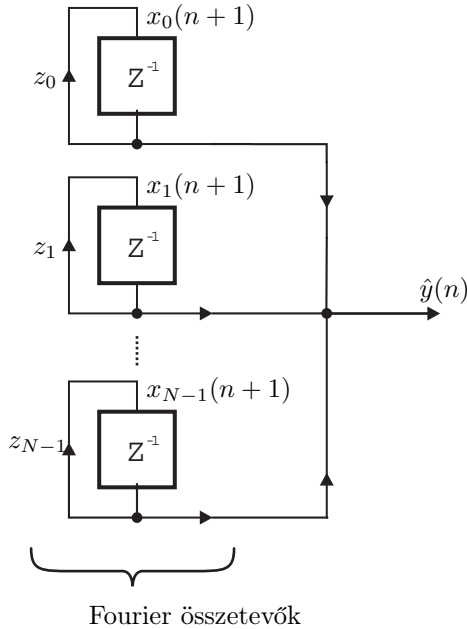
Az eddigiek alapján jól látható, hogy a megfigyelőket jelfeldolgozási feladatra úgy tudjuk felhasználni, hogy:

- elkészítjük a feldolgozandó jelet létrehozó rendszer koncepcionális (lehetséges) modelljét, mégpedig úgy, hogy a kiértékelés során meghatározandó paraméterek, vagy jelkomponensek a koncepcionális modell állapotváltozóival legyenek (lehetőség szerint lineáris) kapcsolatban, majd
- létrehozunk egy olyan megfigyelőt, amely a koncepcionális modell állapotváltozóinak, ill. az azokkal kapcsolatban lévő mennyiségeknek a meghatározására alkalmas.

5.5. A DFT szűrő megfigyelő alakban

A megfigyelő-elméletet alkalmazzuk elsőként DFT szűrő előállítására. Ehhez először is az N -re periodikus jeleknek egy olyan modelljére van szükség, ahol az állapotváltozók az egyes Fourier-komponensek.

A komplex exponenciális jelek leírhatók megfelelő fázisforgatáson keresztül visszacsatolt tárolókkal. Ilyenkor a kezdeti állapot, amely egy komplex érték, határozza meg



5.15. ábra. Komplex értékű periodikus jelek egy lehetséges modellje.

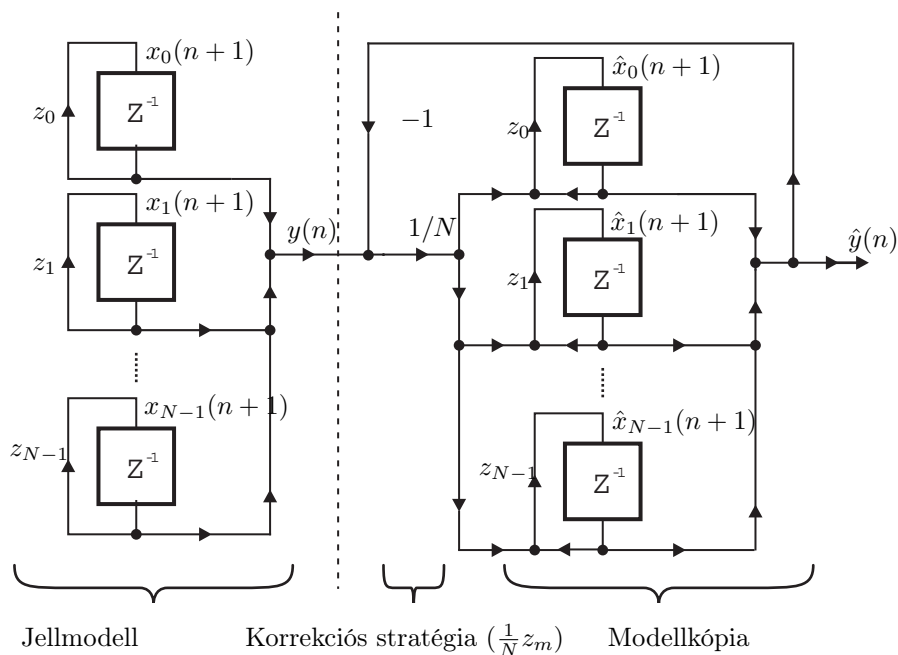
a jel amplitúdóját és fázisát, a visszacsatolás paramétere pedig a jel körfrekvenciáját. Az N -re periodikus diszkrét jelek N tagú Fourier-sorba fejthetők, így az 5.15 ábra szerint N darab egytárolós rendszer kimenetének az összegzésével írhatók fel. Az N tároló az N harmonikus összetevő modellje, a kezdeti állapotok értékei az adott harmonikus komponens komplex együtthatói.

A visszacsatolás paramétermátrixa $\mathbf{A} = \text{diag} \langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \rangle$, ahol $z_m = e^{j\frac{2\pi}{N}m}$, $m = 0, 1, \dots, N-1$, és a „kicsatoló” mátrix $\mathbf{C} = [1, 1, \dots, 1]$.

Vagyis ez az az eset, amikor \mathbf{C} nem kvadratikusság, és az N db állapotváltozó a skalár kimenet N db mintája alapján N lépésben „kényszeríthető ki” a „másolt” rendszerben: $(\mathbf{A} - \mathbf{GC})^N = \mathbf{0}$. Igazolható, hogy ilyenkor $\mathbf{G} = \frac{1}{N}\mathbf{AC}^T = [\frac{1}{N}z_0, \frac{1}{N}z_1, \dots, \frac{1}{N}z_{N-1}]^T$. Az 5.16 ábrán ez úgy valósul meg, hogy $x_m(n+1)$ helyett a z_m -mel való szorzás elé csatolunk be $\frac{1}{N}$ súllyal.

5.5.1. Az „egyenértékűség” bizonyítása

Az 5.16 ábrán látható megfigyelő a DFT-szűrőtől alapvetően eltérő struktúrájú, jóllehet ugyanúgy N lépésben konvergál, és ugyanúgy harmonikus komponenseire bontja a bemenetére jutó periodikus jelet. Mindkét struktúrára felírva a bemenőjel és a Fourier-komponenseiből visszaállított jel közti átviteli függvényt, belátható a kétféle struktúra „egyenértékűsége” (kerékítésmentes megvalósítást feltételezve).



5.16. ábra. Periodikus jelet generáló rendszer modellje, és a DFT megfigyelő alakban

A DFT szűrő esetében az átviteli függvény:

$$\frac{\hat{Y}(z)}{Y(z)} = \frac{1}{N}(1 - z^{-N}) \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} \quad (5.34)$$

A megfigyelő alakban

$$\frac{\hat{Y}(z)}{Y(z)} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}}{1 + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}} \quad (5.35)$$

Ez a negatívan visszacsatolt rendszer $\frac{H(z)}{1+H(z)}$ átviteléből adódik, ahol $H(z)$ a nyílt hurkú átvitel.

Tegyük fel, hogy

$$\sum_{m=0}^{N-1} \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} = \frac{N z^{-N}}{1 - z^{-N}} \quad (5.36)$$

Ekkor 5.34 illetve 5.35 -be visszahelyettesítve, mindkét átvitelre z^{-N} adódik:

$$\frac{\hat{Y}(z)}{Y(z)} = \frac{1}{N}(1 - z^{-N}) \frac{N z^{-N}}{1 - z^{-N}} = z^{-N} \quad (5.37)$$

$$\frac{\hat{Y}(z)}{Y(z)} = \frac{\frac{z^{-N}}{1 - z^{-N}}}{1 + \frac{z^{-N}}{1 - z^{-N}}} = z^{-N} \quad (5.38)$$

Elegendő tehát a feltételt (5.36) bizonyítani.

Felhasználjuk, hogy az összeg egyes tagjai kifejezhetők egy végtelen mértani sorként:

$$\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} = z_m z^{-1} + (z_m z^{-1})^2 + \dots + (z_m z^{-1})^N + \dots + (z_m z^{-1})^{2N} + \dots \quad (5.39)$$

Az 5.36 feltételben szereplő N tagot 5.39 behelyettesítésével egymás alá kifejtve, először az egymás alatt elhelyezkedő $-z$ azonos hatványát tartalmazó $-$ tagokat összegezzük:

$$\begin{array}{cccc} z_0 z^{-1} + & (z_0 z^{-1})^2 + & \dots + (z_0 z^{-1})^N + & \dots + (z_0 z^{-1})^{2N} + \dots \\ z_1 z^{-1} + & (z_1 z^{-1})^2 + & \dots + (z_1 z^{-1})^N + & \dots + (z_1 z^{-1})^{2N} + \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{N-1} z^{-1} + & (z_{N-1} z^{-1})^2 + & \dots + (z_{N-1} z^{-1})^N + & \dots + (z_{N-1} z^{-1})^{2N} + \dots \\ \hline 0 + & 0 + & \dots + N z^{-N} + & \dots + N z^{-2N} + \dots \end{array} \quad (5.40)$$

Az összegzésnél felhasználtuk, hogy

$$\sum_{m=0}^{N-1} z_m^k = \begin{cases} N & \text{ha } k=0, N, 2N, \dots \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (5.41)$$

(Az 5.39. kifejezést visszahelyettesítve az 5.36 egyenlet baloldali tagjába, megcseréltük az így kapott kettős összegzés sorrendjét.)

Egy olyan mértani sorhoz jutunk, melynek hányadosa z^{-N} , összegképlete:

$$N \sum_{k=1}^{\infty} z^{-kN} = \frac{N z^{-N}}{1 - z^{-N}} \quad (5.42)$$

Ezzel igazoltuk az 5.36 alatti azonosságot. ■

Érdekes az az eredmény, hogy a visszaállított periodikus jel éppen N -szeres késleltetettje a bemenő jelnek. Ez azt jelenti, hogy 0 kezdeti állapotú tárolókkal indítva a megfigyelőt, az N -re periodikus jel rákapcsolása utáni N hosszú konvergencia intervallumban az \hat{y} kimenet azonosan 0, majd ezt követően fázishelyesen egyezik a bemenettel. (Ez megfigyelhető az 5.4.1 példában látott megfigyelőnél, ami nem más mint egy $N = 2$ pontos DFT.)

5.5.2. Általánosítás másfajta szűrőkre

A periodikus jelekre kapott megfigyelő általánosítható N -re nem periodikus harmonikus összetevőjű jelek esetére is. Ekkor $z_m = e^{j\varphi_m}$, de nem feltétlenül egységgyök. A többszörös gyököket ellenben kizárjuk. A véges beállítás feltétele, hogy $\frac{\hat{Y}(z)}{Y(z)}$ polinom alakba legyen írható. Ennek beállításához szabad paraméterek kellenek. Legyen $\mathbf{G}^T = [r_0 z_0 \quad r_1 z_1 \dots r_{N-1} z_{N-1}]$. (A megfigyelő alakú DFT esetén $r_m = \frac{1}{N}$;

$m = 0, 1, \dots, N - 1$, z_m egységgyök volt.) Írjuk át ennek megfelelően az 5.35 átviteli egyenletet ($\frac{1}{N} \rightarrow r_m$ csere):

$$\frac{\hat{Y}(z)}{Y(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}}{1 + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}} \quad (5.43)$$

(ahol $Y(z)$ a megfigyelő bemenete, $\hat{Y}(z)$ a kimenete, és a kettő beállítás utáni egyezése a cél). $\hat{Y}(z)/Y(z)$ polinom lesz (vagyis véges beállítás történik), ha

$$1 + \sum_{m=0}^{N-1} \frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} = \frac{1}{\prod_{m=0}^{N-1} (1 - z_m z^{-1})} \quad (5.44)$$

mert ezt behelyettesítve 5.43 egyenletbe (a nevezőbe is és 1-et levonva a számlálóba is) a nevezővel egyszerűsíteni lehet.

Az r_m , $m = 0, 1, \dots, N - 1$ értékek az 5.44 szerinti rész törtre bontási feladat megoldásaként adhatók meg. Mindkét oldalon szorozva az 5.44 egyenletet $(1 - z_k z^{-1})$ -gyel és $z \rightarrow z_k$ határértékképzéssel adódik r_k :

$$r_k = \frac{1}{\prod_{m=0, m \neq k}^{N-1} (1 - z_m z_k^{-1})} \quad (5.45)$$

Ha nem véges beállást szeretnénk, hanem előírt pólusok megvalósulását, akkor

$$r_m = \frac{\prod_{k=0}^{M-1} (1 - p_k z_m^{-1})}{\prod_{k=0, k \neq m}^{N-1} (1 - z_k z_m^{-1})} \quad (5.46)$$

kell, hogy teljesüljön, ahol p_k , $k = 0, 1, \dots, M - 1$ az előírt pólusokat jelöli. Ezzel $\prod_{k=0}^{M-1} (1 - p_k z^{-1})$ lesz az 5.43 átviteli függvény nevezőjében.

A fentiek alapján általános lineáris predikciós eljárás megvalósítható a rezonátor-alapú megfigyelő-struktúrával.

irodalom: [Péceli]

5.5.3. A DFT szűrő és a megfigyelő alak összehasonlítása

A gyakorlatban a véges számábrázolás miatt pontatlanul megvalósított pólusok a DFT szűrőben azt eredményezik, hogy a pólus-zérus kiejtés nem tökéletes, mert a zérusok és a pólusok megvalósítása egymástól független. Ez súlyos numerikus problémákat

5. REKURZÍV DFT, A MEGFIGYELŐELMÉLET ALAPJAI

okoz. Az egységkörön kívül kerülő pólusok instabillá tehetik a rendszert. A megfigyelő alakban a pontatlan pólusokat az ugyanúgy pontatlan zérusok továbbra is kiejtik.

A megfigyelő alak a globális visszacsatolás folytán a pontatlan paraméterértékeken túl a számítások véges pontossága okozta kerekítési zajra, és a periodikus jelen ülő egyéb zajhatásra is kevésbé érzékeny.

6. fejezet

Digitális szűrők

6.1. Bevezetés

Majdnem minden rendszer szűrő. Akár analóg, akár diszkrét rendszereket tekintünk, átviteli függvényük általában nem azonosan 1, ezért a kimenetükön megjelenő jel nem egyezik meg a bemenetükre adott jellel. Általában a rendszerek átviteli függvénye nem konstans, ebből következően dinamikus rendszerek, amelyek energiatárolókat (pl. tekercs, kondenzátor), illetve diszkrét esetben késleltetőket tartalmaznak. Ebben az értelemben szűrőnek tekinthető a már korábban megismert mozgó átlagoló vagy exponenciális átlagoló is. Sőt, a diszkrét Fourier-transzformáció is szűrést valósít meg: egy egybemenetű – többkimenetű szűrőt.

A felsorolt példákban a kiindulás a mérési eljárás volt, a rendszer átviteli függvénye kiadódott. A digitális szűrők ezzel szemben olyan diszkrét dinamikus rendszerek, amelyek tervezésénél az átviteli függvényt specifikáljuk. A digitális szűrő tervezésnek több ága van, ebben a bevezető jellegű fejezetben azokkal a lineáris szűrőkkel foglalkozunk, amelyeknek csak az amplitúdómenetét specifikáljuk.

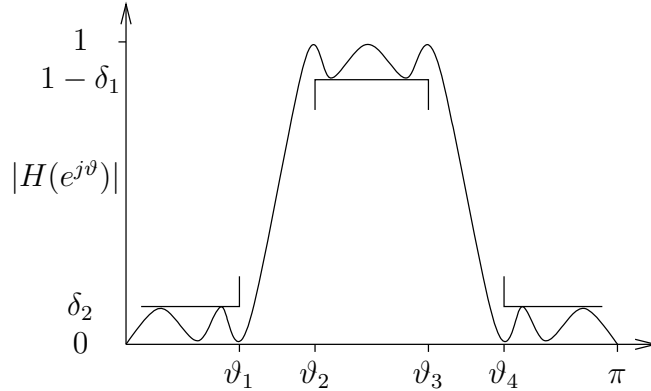
Klasszikus értelemben szűrőnek tekintjük azokat a rendszereket, amelyek amplitúdó-karakterisztikája felosztható ún. áteresztő-, illetve zárótartományokra. Az áteresztő tartományokban konstans (jellegzetesen egységnyi), a zárótartományokban zérus átvitelt írunk elő. Az ilyen előírást pontosan teljesítő rendszer impulzusválasza azonban időben nem korlátos, ezért a gyakorlatban az áteresztő-, illetve zárótartományok között mindig van egy ún. átmeneti tartomány, ahol az amplitúdónak 1-nél kisebbnek kell lennie, továbbá megengedünk adott mértékű ingadozást az áteresztő-, illetve zárótartományokban. Ez utóbbiban a (zérus körüli) ingadozást elnyomásnak nevezzük. A specifikációt szemlélteti egy sávszűrőn a 6.1. ábra. Ennek megfelelően alul- és felül-áteresztő, sáváteresztő és -záró szűrőket tervezhetünk.

Egy lineáris diszkrét idejű rendszer átviteli függvénye z -ben racionális törtfüggvény:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (6.1)$$

ahol $B(z)$ és $A(z)$ polinomok. Az átviteli karakterisztikához $z = e^{j\vartheta}$ helyettesítéssel

6. DIGITÁLIS SZŰRŐK



6.1. ábra. A szűrőspecifikáció. ϑ_2, ϑ_3 , illetve ϑ_1, ϑ_4 rendre az áteresztő- illetve zárótartomány határai; δ_1, δ_2 az ingadozás, illetve az elnyomás.

jutunk, ahol ϑ a diszkrét körfrekvencia. A folytonos rendszerekkel való kapcsolatban:

$$\vartheta = 2\pi \frac{f}{f_s}, \quad (6.2)$$

ahol f a frekvencia, f_s pedig a mintavételi frekvencia. Látható, hogy $H(\vartheta)$ 2π -ben periodikus függvény, vagy másként az átviteli karakterisztika f_s -ben periodikus.

A $H(z)$ -vel jellemzett szűrő végtelen vagy véges impulzusválaszú (IIR vagy FIR) lehet. IIR esetben $B(z)$ és $A(z)$ tetszőleges polinom lehet (persze $A(z)$ a stabilitási feltételnek eleget tesz), $B(z)$ együtthatóinak száma M , $A(z)$ együtthatóinak száma N . FIR esetben $A(z) = z^{N-1}$, ahol $N - 1$ a polinom fokszáma. Ekkor az $N - 1$ pólus az origóban van, az átviteli függvény pedig a következő alakban írható:

$$H(z) = z^{-N+1} B(z) = B'(z). \quad (6.3)$$

$B'(z)$ szintén polinom, együtthatói $B(z)$ együtthatói fordított sorrendben.

A digitális szűrők számítása általában (6.1) alapján történhet:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N-1} a_i y(n-i), \quad (6.4)$$

ahol $x(n)$ és $y(n)$ rendre a gerjesztés és a válasz mintái az n . időpillanatban, az a_i és b_i konstansok pedig rendre $A(z)$ és $B(z)$ együtthatói. Az átírás során ügyelni kell a helyes együttható-sorrendre. FIR szűrők esetén (6.4) a következőképpen egyszerűsödik:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x(n-i). \quad (6.5)$$

A fenti egyenlet szerint a kimenet a bemenet és a b_i együtthatókészlet diszkrét konvolúciójaként áll elő. Ez viszont azt is jelenti, hogy a b_i együtthatókészlet valójában az adott FIR szűrő impulzusválasza is.

A digitális szűrők között kitüntetett a szerepe azoknak, amelyeknek lineáris a fázismenete. Ennek belátásához hasznos definiálni az ún. csoportkésleltetés (group delay) fogalmát:

$$\tau = -\frac{d\varphi(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad (6.6)$$

ahol $\varphi(\vartheta)$ $H(z)$ fáziskarakterisztikája. Ha $\varphi(\vartheta)$ lineáris, azaz a következő alakú:

$$\varphi(\vartheta) = -k\vartheta, \quad (6.7)$$

akkor $\tau = k$, azaz a szűrő tetszőleges frekvenciájú bemenőjelet ugyanolyan mértékben késleltet. Ebből következően a szűrő alakhú átvitelt valósít meg, amely számos alkalmazásban (pl. EKG) fontos követelmény. Ahhoz, hogy a fázismentet lineáris legyen, az átviteli függvénynek

$$H(z = e^{j\vartheta}) = H(\vartheta)e^{-jk\vartheta} \quad (6.8)$$

alakúnak kell lennie, ahol $H(\vartheta)$ valós, vagy képzetes. Az exponenciális tagnak az időtartományban késleltetés felel meg, $H(\vartheta)$ -nak pedig egy zérus körüli szimmetrikus (képzetes esetben antiszimmetrikus) impulzusválasz. Kauzális esetben a késleltetésnek olyannak kell lennie, hogy negatív időpillanatokra az impulzusválasz zérus legyen. Ebből az is következik, hogy IIR szűrővel lineáris fázismentet elvileg nem lehet megvalósítani. A gyakorlatban azonban elérhető, hogy az áteresztő tartományban egy IIR szűrő is közelítőleg lineáris fázisú legyen.

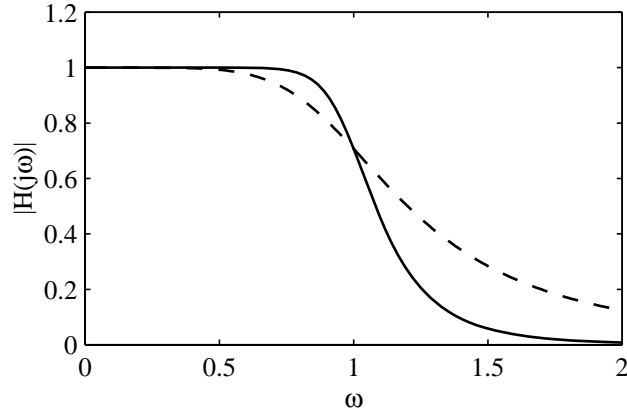
Az IIR és a FIR szűrők mind tervezésüket, mind tulajdonságaikat, mind pedig megvalósításukat tekintve jelentősen eltérnek egymástól, ezért külön alfejezetben tárgyaljuk őket.

6.2. IIR szűrők tervezése

Digitális szűrő tervezésére a legkézenfekvőbb módszer, hogy analóg szűrőket transzformáljunk. (A digitális szűrők megjelenésekor az analóg tervezési módszerek már jól kidolgozottak voltak.) Az analóg szűrőtervezés lépéseire nincs mód részleteiben kitérni, itt csak a legfontosabb lépéseket ismertetjük. Ezekkel a klasszikus módszerekkel csak a Bevezetőben említett négyféle (alul- és felüláteresztő, sáváteresztő és -záró) karakterisztika tervezhető.

Approximáció-típusok

Az egyes approximációk az ideális aluláteresztő karakterisztikát közelítik valamilyen matematikailag definiált módon. A törésponti frekvencia mindig az $\omega = 1$ pont. Ez a szűrő az ún. referens aluláteresztő szűrő. Ennek megfelelően a tervezett szűrőhöz frekvencia-transzformációval jutunk. Az alábbiakban közölt átviteli függvények folytonos idejű hálózathoz tartoznak.

6.2. ábra. Butterworth approximáció (szaggatott: $N = 3$, folytonos: $N = 7$)

Butterworth approximáció

A Butterworth approximáció Taylor-sorral közelíti az ideális aluláteresztő szűrőt $\omega = 0$ és $\omega = \infty$ esetén. A szűrő átviteli karakterisztikája a következő:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2N}}, \quad (6.9)$$

ahol N a szűrő fokszáma. A szűrő 3 dB-es pontja $\omega = 1$ -ben van, és a karakterisztika deriváltja $\omega = 0$ -ban nulla. Mivel az áteresztő tartományban az előírás konstans, a Butterworth approximációt maximálisan laposnak is nevezik. $|H(j\omega)|$ különböző N -ekre a 6.2. ábrán látható. Minél nagyobb a fokszám, annál élesebb a levágás, azaz adott specifikáció (áteresztő- és zárótartományi hiba) esetén annál közelebb lehet egymáshoz a két tartomány. Mivel szűrőtervezés esetén a specifikáció adott, ennek alapján megadható a szükséges fokszám. Mivel a görbe (6.9) szerint adott, az átviteli függvény a frekvenciáknak megfelelően transzformálható.

Csebisev approximáció

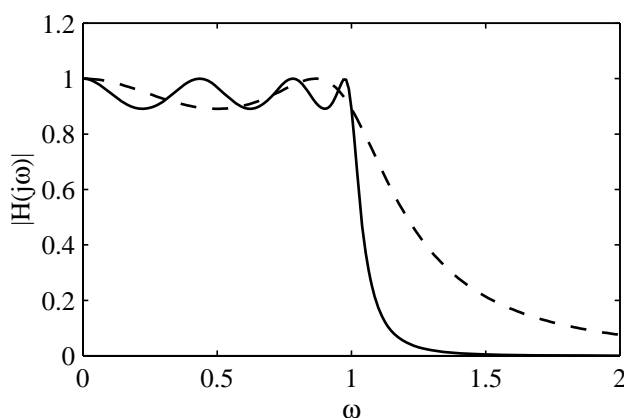
A Csebisev approximáció Taylor-sorral közelíti az ideális aluláteresztő szűrőt $\omega = \infty$ -ben, de az áteresztő tartományban olyan az approximáció, amely a hiba maximumát minimalizálja (minimax). A szűrő átviteli karakterisztikája a következő:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(\omega)}, \quad (6.10)$$

ahol N a szűrő fokszáma, ε pedig meghatározza az áteresztő tartománybeli ingadozást, úgy, hogy $|H(\omega)| \in [1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}, 1]$. $C_N(\omega)$ az ún. N -edrendű Csebisev-polinom, amely a következő:

$$C_N(\omega) = \cos(N \arccos(\omega)). \quad (6.11)$$

$|H(j\omega)|$ különböző N -ekre a 6.3. ábrán látható. Az áteresztő tartományban a karakterisztika egyenletes ingadozású, és optimális abban az értelemben, hogy adott fokszám

6.3. ábra. Csebisev approximáció (szaggatott: $N = 3$, folytonos: $N = 7$)

mellett ez a polinom minimalizálja a hiba maximumát. Szűrőtervezés szempontjából ez azért fontos, mert legtöbbször azt kívánjuk meg, hogy az átvitel tetszőleges, az átérésztő tartományhoz tartozó frekvencián legyen egy adott kicsiny hibától eltekintve egységnyi. Ha pl. négyzetes értelemben közelítenénk (v.ö. Fourier-sorfejtés: Gibbs-oszcilláció), akkor a négyzetes hiba ugyan minimális lenne, de a hiba egyes frekvenciákon túl nagy lenne. A zárótartományban a szűrő a Butterworth karakterisztikához hasonlóan maximálisan lapos, $\omega = \infty$ esetén az átvitel zérus. Adott specifikáció esetén a hibából és a két tartomány közötti frekvenciakülönbségből kiindulva megadható a szükséges fokszám, végül frekvencia-transzformációval a valódi frekvenciáknak megfelelő szűrő.

Inverz Csebisev approximáció

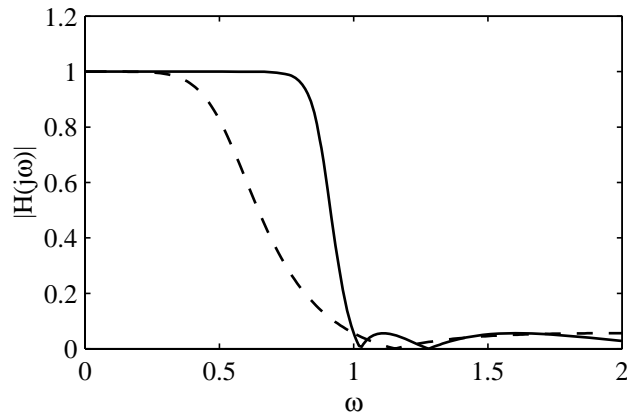
Az inverz Csebisev approximáció felcseréli a két tartományt: az átérésztő tartományban maximálisan lapos, a zárótartományban egyenletes ingadozású karakterisztikát eredményez. (6.10)-ből úgy juthatunk az inverz Csebisev karakterisztikához, hogy ω helyébe $1/\omega$ -t írunk, majd ezt kivonjuk 1-ből. A helyettesítés tükrözi a karakterisztikát az $\omega = 1$ pontra (tartomány csere), azaz a szűrő felülátérésztő lesz, ezért kell az 1-ből való kivonás. Így az inverz Csebisev szűrő átviteli karakterisztikája a következő:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_N^2(1/\omega)}{1 + \varepsilon^2 C_N^2(1/\omega)}, \quad (6.12)$$

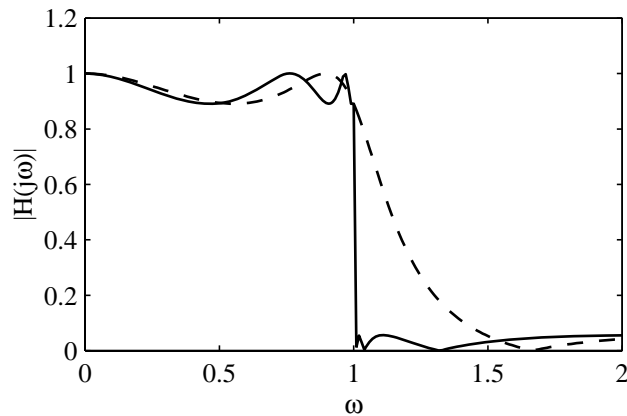
ahol N a szűrő fokszáma, ε pedig meghatározza a zárótartomány-beli ingadozást, úgy, hogy $|H(\omega)| < 1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$. $C_N(\omega)$ ismét az N -edrendű Csebisev-polinom. $|H(j\omega)|$ különböző N -ekre a 6.4. ábrán látható. A szűrőtervezés az előzőekhez hasonló módon történhet.

Cauer (elliptikus) approximáció

Elliptikus approximáció esetében a karakterisztika mind az átérésztő tartományban, mind pedig a zárótartományban egyenletes ingadozású. A szűrő átviteli karakterishti-



6.4. ábra. Inverz Csebisev approximáció (szaggatott: $N = 3$, folytonos: $N = 7$)



6.5. ábra. Cauer (elliptikus) approximáció (szaggatott: $N = 3$, folytonos: $N = 7$)

kája a következő:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 G_N^2(\omega)}, \quad (6.13)$$

ahol N a szűrő fokszáma. $G(\omega)$ a Csebisev-polinom általánosítása, számításához elliptikus integrálokra van szükség. A polinom nemcsak ω függvénye, így lehetséges, hogy a két tartományra különböző ingadozást írjunk elő. $|H(j\omega)|$ különböző N -ekre a 6.5. ábrán látható. A szűrőtervezés itt is a specifikációból (áteresztő- és zárótartomány határa, ingadozás-értékek) indul, és bonyolult átalakítás után kiadódik a $G(\omega)$ függvény.

A fenti approximációk ismertetése csak nagyon vázlatos volt, és elsősorban az eredményre, a megtervezett szűrő karakterisztikájának tulajdonságaira koncentrált. Eszerint tehát (a Csebisev-polinom tulajdonságai miatt) egy adott specifikációt a Cauer-szűrő teljesít a legkisebb fokszámmal. Annak, hogy mégis használnak egyéb approximációkat is, oka lehet egyrészt a maximálisan lapos frekvenciamenet igénye, másrészt a szűrők fázismenete. A legkedvezőbb (áteresztő-tartományban közel lineáris) fázismenete ugyanis éppen a Butterworth-szűrőnek van, amely azonban magasabb fokszámot

igényel adott specifikáció megvalósításához; a legkedvezőtlenebb fázismenettel viszont a Cauer-szűrő rendelkezik. Fontos még, hogy numerikus szempontból is a Butterworth-szűrő a legkedvezőbb, illetve a Cauer-szűrő a legkedvezőtlenebb. A Csebisev- (és a komplexitásban vele megegyező inverz Csebisev-) szűrő a kettő között helyezkedik el. A szükséges fokszám a specifikáció alapján kiadódik, becslő képletek alkalmazásával vagy – programok használata esetén – próbálgatással állapítható meg.

Frekvencia-transzformáció

A frekvencia-transzformáció két lépésből áll:

1. a referens aluláteresztő szűrő egységnyi törésponti frekvenciájának adott frekvenciára szorzása, valamint (amennyiben szükséges):
2. a kívánt nem aluláteresztő karakterisztikába transzformálás.

A tervezés elején a transzformáció iránya fordított.

Aluláteresztő–feluláteresztő transzformáció

Mint az inverz Csebisev approximációnál már szerepelt, ω helyébe $1/\omega$ -t kel helyettesíteni, vagy általánosabban a:

$$p = \frac{1}{s} \quad (6.14)$$

helyettesítést kell alkalmazni, ahol p a referens aluláteresztő szűrő Laplace-transzformáltjának változója.

Aluláteresztő–sáváteresztő transzformáció

A transzformáció ebben az esetben a következő:

$$p = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s}, \quad (6.15)$$

ahol ω_0 a sávközépi frekvencia, és teljesül a következő egyenlőség:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_2\omega_3} = \sqrt{\omega_1\omega_4}, \quad (6.16)$$

ahol ω_2, ω_3 , illetve ω_1, ω_4 rendre a tervezendő sávszűrő áteresztő tartományának, illetve zárótartományainak határát jelöli.

Aluláteresztő–sávzáró transzformáció

A transzformáció ebben az esetben a következő:

$$p = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad (6.17)$$

ahol ω_0 ismét a sávközépi frekvencia, és teljesül (6.16), ahol ω_2, ω_3 , illetve ω_1, ω_4 rendre a tervezendő sávzáró szűrő zárótartományának, illetve áteresztő tartományainak határát jelöli.

Fentiek alapján az analóg szűrőtervezés a következőképpen zajlik:

6. DIGITÁLIS SZŰRŐK

- a specifikáció transzformálása a referens aluláteresztő specifikációba
- a kiválasztott approximáció alapján a karakterisztika tervezése
- a referens aluláteresztő szűrő visszatranszformálása

Ennek a feladatnak a megoldására programok (pl. Matlab) állnak rendelkezésre, régebben pedig táblázatokot használtak.

Folytonos átviteli függvények diszkrétizálása

Ahhoz, hogy digitális szűrőhöz jussunk, a megtervezett analóg szűrőt (analóg átviteli függvényt) transzformálnunk kell. Keresett tehát, hogy adott $H(s)$ átviteli függvénynek milyen $H(z)$ felel meg. Ezzel azért érdemes részletesebben foglalkozni, mert az átviteli függvények megfeleltetése nem kizárólag a digitális szűrők tervezésével kapcsolatos feladat.

Az első lehetőség az ún. impulzus-invariáns transzformáció. Ebben az esetben az analóg rendszer súlyfüggvényének mintavételezésével kapjuk a diszkrét rendszer impulzusválaszát, azaz:

$$h(n) = w(nT), \quad (6.18)$$

ahol $h(n)$ a diszkrét impulzusválasz, $w(nT)$ pedig az analóg súlyfüggvény értékeit jelöli az nT időpontokban. A transzformáció stabil s -beli pólust stabil z -beli pólusba képez le. Problémát jelent azonban, hogy az illesztés az időtartományban történik. A mintavételezés miatt a súlyfüggvényre igaznak kell lenni a mintavételi tétel feltételének, ellenkező esetben a Fourier-transzformáltak (azaz az átviteli függvények) átlapolódhatnak, így a frekvenciatartományban optimalizált szűrő karakterisztikája a diszkrétizálás után nem lesz optimális. Ha azonban az időtartománybeli illesztés a cél, a transzformáció jól használható. A *MATLAB* ezt az illesztést a `prony.m` függvényvel végzi.

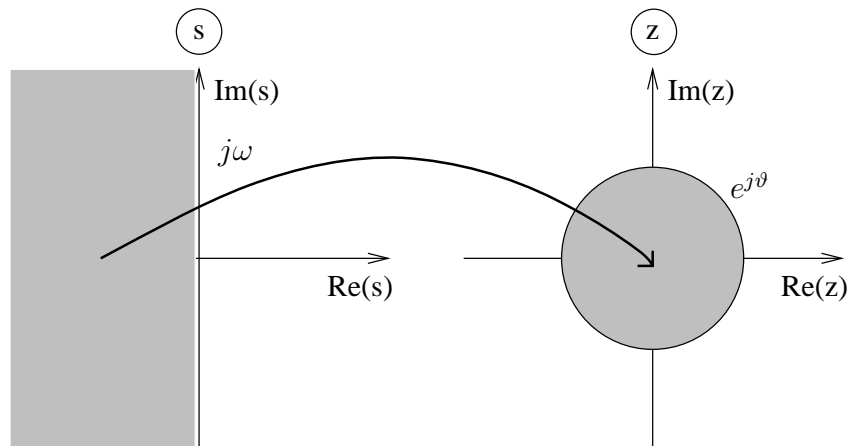
Az analóg szűrők tulajdonságait az ún. bilineáris transzformáció őrzi meg. Ezt az analóg átviteli függvényben az

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} \quad \frac{sT}{2} = \frac{z-1}{z+1} \quad (6.19)$$

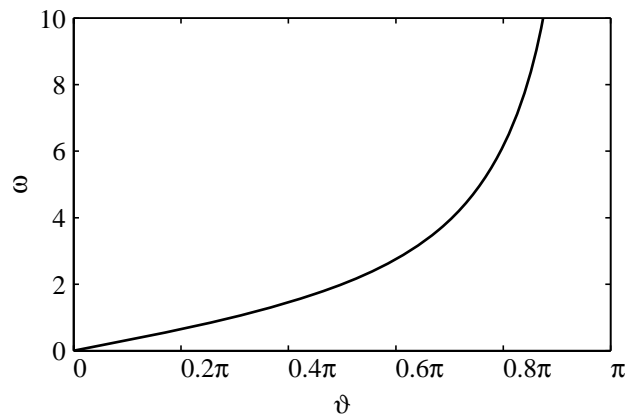
helyettesítéssel tehetjük meg, ahol T_s a mintavételi időköz. Ez a transzformáció is stabil s -beli pólust stabil z -beli pólusba képez le, azaz az s -tartomány bal félsíkját a z -tartomány egységkörének belsejébe képezi le. Ezt szemlélteti a 6.6. ábra. A tartomány határát, a $j\omega$ tengelyt pedig az egységkörre. Ez az impulzus-invariáns transzformáció esetében is így volt, itt azonban nincs átlapolódás. A transzformáció ugyanis az analóg frekvenciát a következőképpen transzformálja:

$$\omega = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\vartheta}{2}. \quad (6.20)$$

Ezt az összefüggést szemlélteti a 6.7. ábra. A (6.2) összefüggés szerint $\vartheta = \pi$ -nek $\omega = 2\pi f_s/2$ felel meg, itt azonban $\omega = \infty$. Tehát a frekvenciatengely torzított, amit a specifikáció megadásánál figyelembe kell venni. Más oldalról viszont ez hasznos tulajdonság, így ugyanis nem lapolódnak át az átviteli függvények, a frekvenciatartománybeli tulajdonságok megőrződnek.



6.6. ábra. A bilineáris transzformáció



6.7. ábra. A bilineáris transzformáció frekvenciatorzítása

A komplex átviteli függvény mintavételezése: mintavételezés a frekvencia-tartományban

Előfordul, hogy adott egy (komplex) frekvenciaátviteli függvény egy sor pontban, és egy ezekre illeszkedő digitális szűrőt kívánunk tervezni. Ez lehet a feladat például csatornakiégyenlítéskor, amikor egy sor pontban megmérjük az átvitelt, és az átviteli sávban ennek inverzét kívánjuk realizálni.

A feladat egyszerűen felírható: keressük azt a szűrőt, amelyre a

$$H(f_k) - \frac{B(z_k)}{A(z_k)}, k = 1, 2, \dots, N \quad (6.21)$$

különbségek valamilyen értelemben (minimax, négyzetösszeg, stb.) minimálisak. Erre a legegyszerűbb eljárás a következő: keressük a

$$\sum_{k=1}^N |H(f_k)A(z_k) - B(z_k)|^2 \quad (6.22)$$

összeg minimumát. Ez egy paraméterekben lineáris LS feladat, melyet megfelelő programokkal meg lehet oldani. *MATLAB*-ban ilyenek pl. a `invfreqz.m`, `elis.m` függvények. Egyetlen apró nehézség az, hogy tervezéskor a stabilitást nem lehet garantálni, ezért kísérletezni kell, esetleg valamennyi késleltetést megengedve.

Összefoglalás

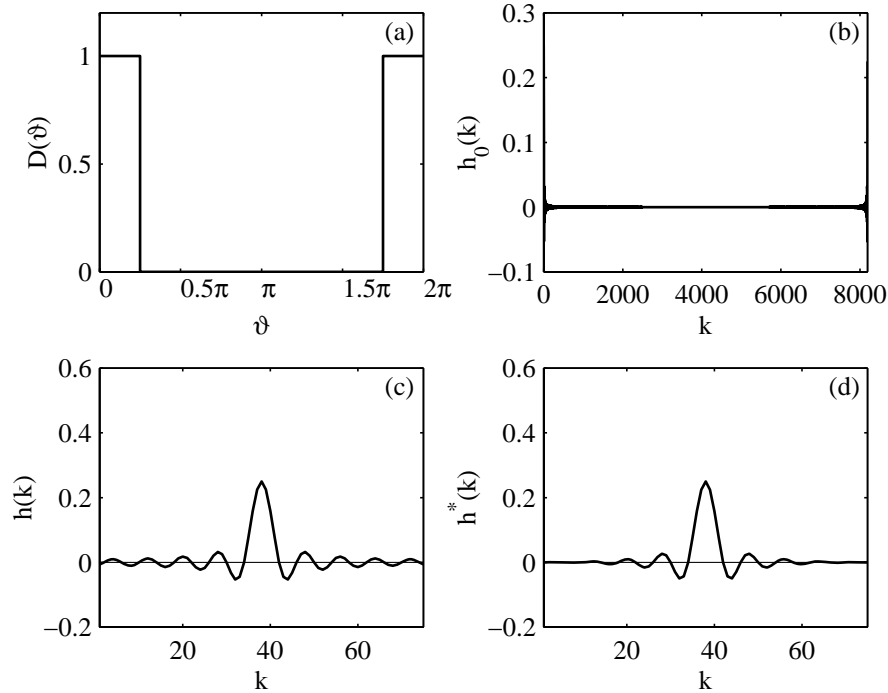
A fentiekben áttekintettük az IIR szűrők tervezésének lépéseit. Ezek – az egyes részfeladatok megoldásának tulajdonságait is figyelembe véve – a következők:

- Specifikáció megadása, és a bilineáris transzformáció frekvenciatorzításának megfelelő előtorzítása
- Analóg szűrő tervezése
- bilineáris transzformáció

IIR szűrők tervezésére a *MATLAB* is kínál függvényeket, pl. `butter.m`, `cheby1.m`, `cheby2.m`, `ellip.m`. Az egyes függvények analóg és digitális szűrők tervezésére egyaránt alkalmasak.

6.3. FIR szűrők tervezése

A véges impulzusválasz a diszkrét rendszerek sajátja. Míg az IIR szűrők lényegében ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek, mint analóg megfelelőik, addig a FIR szűrők új eszközt jelentenek a tervező számára. FIR szűrők tervezésére számos módszer létezik, itt csak két eljárást ismertetünk.



6.8. ábra. Szűrőtervezés ablakozással. (a) aluláteresztő specifikáció, $N = 8192$; (b) prototípus szűrő; (c) a szűrő impulzusválasza ablakozás nélkül, $M = 75$; (d) a szűrő impulzusválasza Hanning-ablakkal.

Szűrőtervezés ablakozással

A módszer az ún. frekvencia-mintavételi eljárás továbbfejlesztése. Ahogyan az a Bevezetőben is szerepelt, a FIR szűrők együtthatói megegyeznek az impulzusválaszokkal. Eszerint tehát a specifikáció (mint ideális átviteli karakterisztika) egyszerű inverz Fourier-transzformációjával előállítható a keresett együtthatókészlet. Az alábbiakban egy célszerű utat mutatunk be ennek gyakorlati megvalósítására:

1. A szűrőspecifikáció megadása egy vektorban. A vektor elemei valósak, és szimmetrikusak a DFT-nek megfelelő módon:

$$D(k) = D(N - k), \quad k = 1..N/2, \quad (6.23)$$

ahol $D(k)$ a specifikáció egy mintája, N a DFT pontszáma és páros. Ez utóbbi nem feltétlenül szükséges, de a tárgyalást megkönnyíti. Nem is megszorítás, mert N -et célszerű nagyra választani, a megvalósítandó szűrő együtthatóinak számánál lényegesen nagyobbra. $D(0)$ a szűrő DC átvitele. A szűrőspecifikáció a 6.8. ábrán látható.

2. IDFT alkalmazásával kapunk egy N hosszúságú impulzusválaszt, amely a prototípus szűrő:

$$h_0 = \text{IDFT} \{D\} \quad (6.24)$$

6. DIGITÁLIS SZŰRŐK

Ennek az impulzusválasznak valósnak kell lennie, és szimmetrikusnak a 0 időpillanatra. Minthogy azonban DFT-t alkalmaztunk, a negatív időnek a prototípus szűrő második felének mintái felelnek meg, ahogyan az a 6.8.b ábrán látható.

3. Legyen az M páratlan szám a megvalósítandó szűrő együtthatóinak száma. (A tervezés természetesen megoldható páros M -re is, de így lényegesen egyszerűbbek az összefüggések. Mivel M rendszerint több 10, ez nem okoz gondot.) Az N mintát csonkolnunk kell úgy, hogy M mintát is kapjunk, és az előírt karakterisztikát is minél jobban közelítsük. Ezt úgy tehetjük meg, ha a zérus időpillanatra szimmetrikusan csonkoljuk a prototípus szűrőt. Mivel a szűrőnek kauzálisnak kell lennie, el is kell tolnunk úgy, hogy negatív időpillanatokban zérus legyen az impulzusválasz, azaz:

$$h(k) = \left[h_0\left(N - \frac{M-1}{2}\right), \dots, h_0(N-1), h_0(0), h_0(1), \dots, h_0\left(\frac{M-1}{2}\right) \right] \quad (6.25)$$

Ez látható a 6.8.c ábrán. Az $(M-1)/2$ eltolás miatt azonban a szűrő karakterisztikája nem lesz valós, de a (6.6), (6.7) egyenletek szerint lineáris lesz a fázismenete. A szűrő karakterisztikája a D specifikáció és a $h(k)$ impulzusválasz N pontos DFT-je alapján ellenőrizhető.

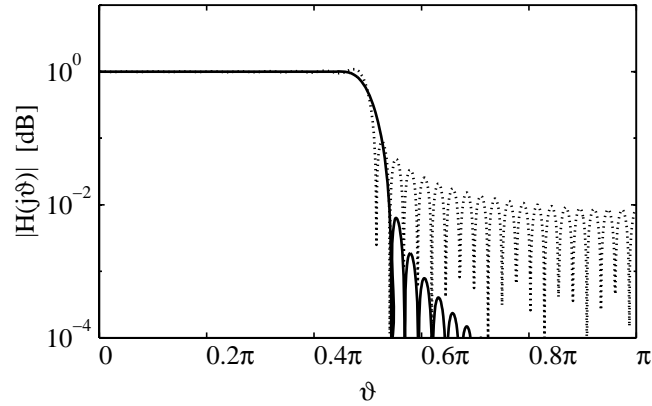
4. A Gibbs-oszcilláció miatt azonban a karakterisztika a levágási pontok közelében jelenősen eltérhet a specifikációtól, még nagy M -ek esetében is. Ezt a jelenséget ablakozással csökkenthetjük, úgy, hogy a $h(k)$ vektort megszorozzuk egy alkalmasan választott, szintén M hosszúságú ablakfüggvénnyel (pl. Hanning-ablakkal):

$$h^*(k) = w(k)h(k), \quad k = 0..M-1, \quad (6.26)$$

ahol $w(k)$ az ablakfüggvény. A 6.8.d ábra az ablakozott impulzusválaszt mutatja. A karakterisztika ismét a $h^*(k)$ impulzusválasz N pontos DFT-je alapján ellenőrizhető. Ha a szűrő valamilyen tervezési igényt nem elégít ki, az ablakfüggvény vagy M értéke módosítható, ilyenkor a 3. és 4. pont szerinti műveleteket újra el kell végezni.

A megtervezett szűrő az előírt karakterisztikát a legkisebb négyzetek elvének megfelelően közelíti, azaz négyzetes hiba integrálja minimális. Ez azonban megengedi azt, hogy a karakterisztika egyes pontokban jelentősen eltérjen a specifikációtól. Az ablakfüggvény ezt a hatást csökkenti, és növeli a zárótartományi elnyomást, de a levágás „élességét” csökkenti. Ezt szemlélteti a 6.9. ábra. Az ablakozásos szűrőtervezést a *MATLAB* a `fir1.m`, `fir2.m` függvénnyel támogatja. Az ablakozásos szűrőtervezéssel természetesen tetszőleges amplitúdómenet megtervezhető.

A szűrőtervezés szempontjából sokszor optimális közelítés a hiba maximumát minimalizálja. Ez az IIR szűrők tervezésénél is alkalmazott Csebisev-approximáció. A következőkben egy ilyen karakterisztikájú szűrő tervezésére alkalmas algoritmust mutatunk be.



6.9. ábra. Az átviteli karakterisztika ablakozás nélkül (pontozott), és ablakozással (folytonos)

Szűrőtervezés Remez-algoritmussal

A Remez- (vagy Remes-) algoritmus egyenletes ingadozású, lineáris fázisú FIR szűrő tervezésére alkalmas. Az approximáció tehát Csebisev-approximáció, a szűrő átviteli karakterisztikája pedig a következő alakú:

$$H(\vartheta) = Q(\vartheta) \sum_{k=0}^{r-1} c_k \cos(k\vartheta), \quad (6.27)$$

ahol $Q(\vartheta) = 1, \cos(\vartheta/2), \sin(\vartheta/2), \sin(\vartheta)$ választás lehetséges, a megvalósítandó karakterisztikától (pl. felüláteresztő) függően. A Remez-algoritmus úgy állítja be a c_k együtthatókat, hogy az:

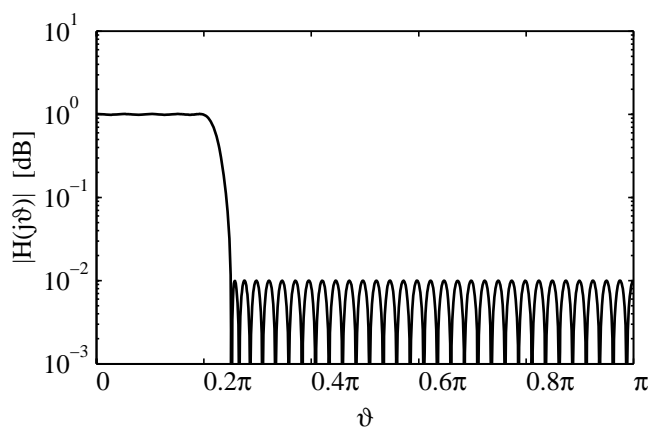
$$\|E(\vartheta)\| = \max \{W(\vartheta)|D(\vartheta) - H(\vartheta)|\} \quad (6.28)$$

normával definiált hiba minimális legyen. A fenti képletben $D(\vartheta)$ a valós specifikáció és $W(\vartheta)$ egy súlyozó függvény. Létezik egy egyértelmű c_k együtthatókészlet, amelyre $\|E(\vartheta)\|$ minimális. A hiba legalább $r+1$ helyen felveszi maximumát a $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{r+1}$, helyeken, alternáló előjellel, azaz:

$$D(\vartheta_m) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k \cos(k\vartheta_m) + (-1)^m \delta, \quad m = 1, \dots, r+1, \quad (6.29)$$

ahol δ a hiba maximuma. (Az egyszerűség kedvéért $W(\vartheta)$ -t egységnyinek tekintjük.) Ez egy lineáris egyenletrendszer, amely c_k -ra megoldható. Maga a szűrőtervezési algoritmus egy iteráció, amelynek lépései a következők:

1. Fel kell venni egy tetszőleges kezdeti $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{r+1}$, készletet, és a (6.29) egyenlet megoldásával meghatározni a c_k együtthatókészletet és egy δ értéket (így adódik ki az $r+1$ független paraméter).



6.10. ábra. Remez-algoritmussal tervezett FIR szűrő

2. Ki kell számolni $H(\vartheta)$ -t elegendően „sűrűn”, kb. $10r$ számú pontban, a frekvenciategyenesen egyenletesen. Mivel az 1. pontban felvett együtthatókészlet általában nem optimális, kiadódik egy új $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{r+1}$, készlet, valamint egy új δ hiba, amely kisebb, mint az előző.
3. Az új frekvenciakészlet és hiba alapján meghatározható egy új c_k együtthatókészlet, amelyre vonatkozóan megint a 2. pont szerint kell eljárni.

Az eljárást addig kell ismételni, amíg a hiba nem növekedik tovább. Az ehhez a hibához tartozó c_k együtthatókészlet a szűrő impulzusválasza, a hiba pedig az átviteli karakterisztika ingadozása. Az algoritmus konvergens, és reális számítási igényt támaszt, ezért széles körben alkalmazzák. Egy Remez-algoritmussal tervezett FIR szűrő átviteli karakterisztikája látható a 6.10. ábrán. A *MATLAB* ezt az algoritmust a `remez.m` függvényvel támogatja. Az eljárás tetszőleges amplitúdómenet megvalósítására alkalmas.

6.4. Gyakorlati kérdések

Analóg vagy digitális?

Sokszor felmerülő kérdés, hogy egy konkrét esetben analóg vagy digitális szűrőt alkalmazzunk. Az alábbi táblázat az analóg és digitális szűrők néhány előnyét és hátrányát mutatja be:

	analóg szűrők		digitális szűrők
hátrányok	pontatlan vagy drága elemek idővariáns elemek nagy elektronikus zaj nehezen változtatható	előnyök	nagy pontosság DSP-ben olcsó csak kvantálási zaj könnyen átkonfigurálható
előnyök	nagy frekvencián is alkalmazható egy egyszerű szűrő olcsó	hátrányok	a mintavételi frekvencia korlátozott analóg rendszerben drága

A technológia fejlődésével egyre nagyobb mintavételi frekvenciát alkalmazhatunk, és egyre több alkalmazásban válthatják fel a digitális szűrők az analóg eszközöket. Egy analóg rendszerben sokszor nehézkes és feleslegesen drága digitális szűrőt alkalmazni, de ha az adott területen is megjelenik a digitális jelfeldolgozás, a digitális szűrő előnyei triviálisak (pl. audio alkalmazások). A jelfeldolgozó rendszerekben alkalmazott véges szóhosszúság azonban problémákat is okozhat.

FIR vagy IIR?

Ha már digitális szűrő alkalmazása mellett döntöttünk, beszélnünk kell a fenti kérdésről is. Az alábbi táblázat ehhez kíván segítséget nyújtani.

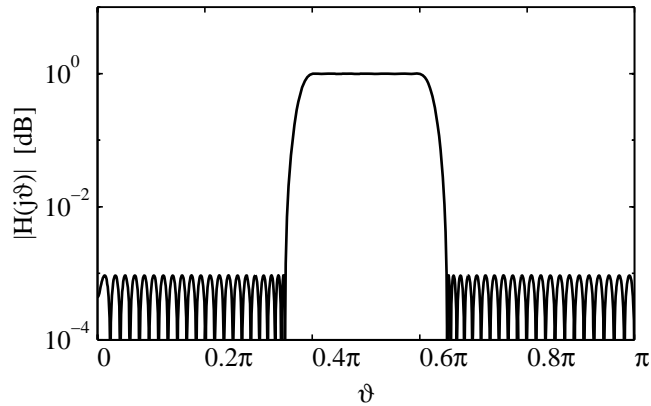
	IIR szűrők		FIR szűrők
hátrányok	stabilitási problémák túlcsordulás, határciklusok sokszor nagy paraméter-érzékenység színes kvantálási zaj számításigényes implementáció nemlineáris fázismenet	előnyök	mindig stabil nincs túlcsordulás, határciklusok kis paraméter-érzékenység fehér kvantálási zaj kis számításigényű implementáció lineáris fázismenet tervezhető
előnyök	alacsony foksám egyszerű tervezési módszer fizikai rendszereket jól modellez	hátrányok	nagy együtthatószám (akár több száz) sok együttható esetén számításigényes fizikai rendszereket rosszul modellez

Mint látható, a legtöbb esetben célszerű FIR szűrőt választani, mert megvalósítása „problémamentesebb”, mint az IIR szűrőké. Ugyanakkor maga szűrési feladat egyes esetekben megkívánja, hogy IIR szűrőt alkalmazzunk. Ekkor lépnek fel a táblázatban feltüntetett hátrányok, amelyek szinte kivétel nélkül az együtthatók véges szóhosszúságú ábrázolásából és a számítások véges pontosságából adódnak.

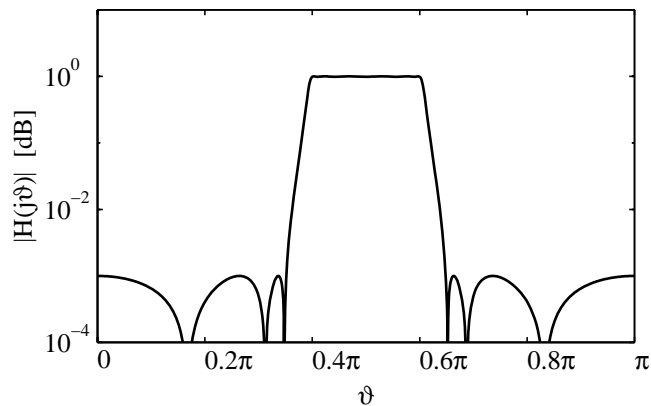
Példaként megterveztünk egy FIR, illetve egy IIR szűrőt, mindkettő ugyanazt a specifikációt elégíti ki: a szűrő sávszűrő, amelynek átvitele:

$$|H(\vartheta)| = \begin{cases} 0, & \vartheta = 2\pi[0..0.175], & \delta_s = 10^{-3} \text{ (-60dB)} \\ 1, & \vartheta = 2\pi[0.2..0.3], & \delta_p = 0.01 \text{ (}\cong 0.1\text{dB)} \\ 0, & \vartheta = 2\pi[0.325..0.5], & \delta_s = 10^{-3} \text{ (-60dB)} \end{cases} \quad (6.30)$$

ahol δ_s a zárótartományi elnyomás és δ_p az áteresztő-tartományi ingadozás. Ezt a specifikációt egy 115 együtthatós FIR szűrő elégíti ki, amelyet a *MATLAB* `remez.m` függvényével terveztünk meg. Az átviteli karakterisztika a 6.11. ábrán látható. Megterveztük



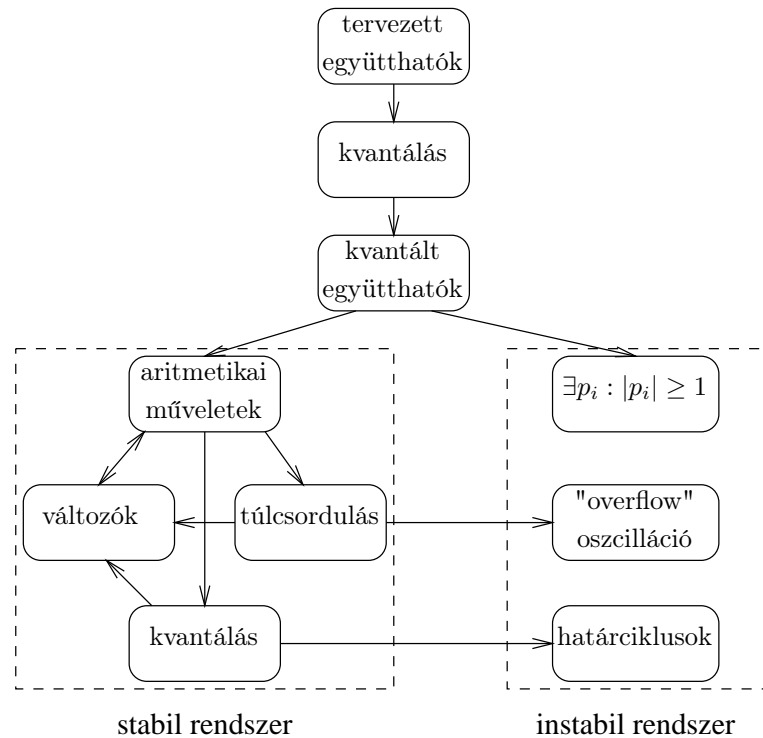
6.11. ábra. A (6.30) specifikációval tervezett egyenletes ingadozású FIR szűrő átviteli karakterisztikája



6.12. ábra. A (6.30) specifikációval tervezett elliptikus IIR szűrő átviteli karakterisztikája

a (6.30) specifikációnak megfelelő IIR szűrőt is, a *MATLAB* `ellip.m` függvényével, tehát elliptikus, minden tartományban egyenletes ingadozású approximációval. Az adott specifikációt egy 6-odfokú elliptikus szűrő elégítette ki, amelynek átviteli karakterisztikája a 6.12. ábrán látható. A két karakterisztika nagyon hasonló, hiszen ugyanazt a specifikációt elégítik ki, a legfontosabb különbség azonban az, hogy az IIR szűrő fázisa nemlineáris. A foksám alapján (ha a fázis nem számít) egyértelmű lenne az IIR szűrő előnye, de numerikus okokból sokszor mégis inkább a FIR szűrőt választják. Ennek hátterére az alábbiakban térünk ki.

A FIR és IIR szűrők implementáció szempontjából is elkülönülnek. Míg a FIR szűrőket szinte kivétel nélkül a (6.5) egyenlet szerint számíthatjuk, addig IIR esetben ritka, hogy a (6.4) egyenlet szerinti (ún. direkt) számítás megfelelő lenne. Az a_i együtthatók pl. a nevezőpolinomot valósítják meg (6.1)-ban. A gyökök és az együtthatók közötti összefüggés erősen nemlineáris, és kis együttható-változáshoz is nagy gyök-eltérés is tartozhat. Ezért előfordulhat, hogy a megtervezett szűrő kvantált együtthatói már la-



6.13. ábra. A kvantálás hatása a tervezés és a működéskorán

bilis rendszert eredményeznek. Minél nagyobb a fokszám, annál nagyobb ez a veszély. De ha stabil is marad a rendszer, előfordulhat, hogy nem teljesíti a specifikációt. További probléma, hogy a kiszámítás során fellépő kvantálási hiba úgy halmozódhat, hogy a rendszer labilissá válik. Ezeket a lehetőségeket foglalja össze a 6.13. ábra.

A fenti problémák miatt a $H(z)$ átviteli függvény megvalósítására speciális struktúrákat alkalmaznak. Egy gyakori megoldás, hogy az átviteli függvényt másodfokú tényezőkre bontják, és ezeket a másodfokú blokkokat már direkt módon meg lehet valósítani. Jó tulajdonságokkal rendelkeznek az ún. *lattice*, illetve *hullámdigitális* és *rezonátoros* szűrők. A működtetés során általában célszerű olyan kerekítési stratégiát alkalmazni, amely a kerekítendő szám abszolút értékét csökkenti. Ha a fenti példában szereplő 6-odfokú elliptikus IIR szűrő megvalósítására fixpontos jelfeldolgozó processzort alkalmazunk, a biztonságosnak tekinthető rezonátoros struktúra kb. 70 utasításciklust igényel. A FIR szűrő esetében együtthetónként egy utasításciklus elegendő, azaz kb. 120. Látható, hogy eltűnt a nagyságrendi különbség. Mindig meg kell azonban vizsgálni, hogy melyik a legkedvezőbb eset, mert valós idejű implementáció esetén ennek igen nagy a jelentősége.

7. fejezet

Átlagolási eljárások statisztikai jellemzése, ablakozási eljárások

7.1. Bevezető

Az eddigiekben az átlagolási eljárásokat, és a mozgó átlagolás általánosításának tekinthető DFT eljárásokat vizsgálva megállapíthattuk, hogy maguk az eljárások valamilyen modellt feltételeznek.

A mozgó átlagolás ill. a DFT esetében azt láttuk, hogy amennyiben ez a modell megfelel a „valóságnak”, akkor az eljárás tökéletes eredményt szolgáltat: az N -re periodikus zajt tökéletesen kiszűri, és a mérendő konstans értékét (DFT esetében a Fourier-komponenset ill. a Fourier-együtthatót) pontosan szolgáltatja. Amennyiben azonban a megfigyelt jel nem ismétlődik az ablakhosszra periodikusan (vagy azért, mert egyáltalán nem periodikus, vagy, mert periodikus ugyan, de periódusa nem osztója N -nek), a szűrés nem tökéletes, a DFT-sorfejtő pedig nem a Fourier-együtthatókat szolgáltatja.

Végeredményben a hiba oka a véges adatmennyiségen végzett számításban, illetve az ennek következtében nem tökéletesen szelektív frekvenciatartománybeli amplitúdó-karakterisztikában keresendő.

A következőkben először azt vizsgáljuk meg, hogy az eredményt hogyan befolyásolja a sztochasztikusan modellezhető zaj (az időtartománybeli jelreprezentációra szórítkozva).

Ezt követően azokat a hibajelenségeket vizsgáljuk meg a frekvenciatartományban, amelyek periodikus jelekre végzett, nem megfelelő ablakhosszúságú mozgó átlagolás, ill. DFT esetén lépnek fel. Ezek a hibajelenségek a spektrumszivárgás és a picket fence (léckerítés)-hatás. Részbeni kiküszöbölésükre különféle ablakozási módszereket mutatunk be. Sztochasztikus jelek feldolgozásakor ugyanezek a jelenségek hasonlóan fellépnek, a bemutatott ablakozási módszerek ezekben az esetekben is alkalmazhatók.

7.2. Az átlagolások statisztikai jellemzése

Az átlagolási eljárásokat vizsgálva arra vagyunk kíváncsiak, hogy a méréseinket terhelő sztochasztikus, *additív zaj* hatását mennyire sikerül általuk elnyomni, és milyen pontossággal tudjuk megbecsülni a mérendő jellemzőt, amely egy determinisztikus, konstans érték. A megfigyelések modellje tehát:

$$y(k) = x + n(k) \quad (7.1)$$

ahol x a keresett mennyiség, és $n(k)$ a zajminták.

Az átlagolás a megfigyelések várható értékének becslője, vagyis maga is a statisztikai jellemzés egy eszköze. Általában minták időbeni sokaságát átlagoljuk, felhasználva, hogy a folyamat (gyengén) stacionárius és ergodikus:

$$E\{y(n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) \quad (7.2)$$

Legyen nulla várható értékű a zaj:

$$E\{n(k)\} = 0 \quad (7.3)$$

Ekkor

$$E\{y(n)\} = x \quad (7.4)$$

Véges idejű átlagolás eredményeként kapott \hat{x} becslő egy valószínűségi változó, statisztikai paramétereit elvileg a *realizációk sokaságából* határozhatjuk meg, vagyis ugyanazt a mérést többszörösen lefolytatva több átlagolás eredményét kellene átlagolnunk.

Ehelyett a következőkben feltételezzük a megfigyelések gyenge stacionaritását, valamint első- és másodrendű statisztikai jellemzőinek ismeretét és ezek függvényeként számítjuk ki az átlagérték várható értékét és varianciáját.

Azt az esetet itt nem tárgyaljuk, amikor csak maguk, a megfigyelések állnak rendelkezésre (véges számban), és azokból kell a statisztikai jellemzőket becsülni (pl. empirikus szórás stb.).

7.2.1. Várható érték

Az **ideális átlagolás** esetén (4.1 egyenlet), a becslő várható értéke:

$$E\{\hat{x}(n)\} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E\{y(k)\} = x \quad (7.5)$$

Ilyen esetben, vagyis ha a becslő várható értéke megegyezik a becsült értékkel, azt mondjuk, hogy a becslés *torzítatlan*.

7. ÁTLAGOLÁSI ELJÁRÁSOK, ABLAKOZÁS

Az olyan becslés, amelyre $E\{\hat{x}\} \neq x$, *torzított*. A *torzítás* mértéke:

$$b = E\{\hat{x}(n)\} - x \quad (7.6)$$

Exponenciális átlagolás esetén a várható érték:

$$E\{\hat{x}(n)\} = \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{n-1} \frac{1}{Q} E\{y(0)\} + \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^{n-2} \frac{1}{Q} E\{y(1)\} + \dots + \frac{1}{Q} E\{y(n-1)\} \quad (7.7)$$

Mivel $E\{y(k)\} = x$, ezért

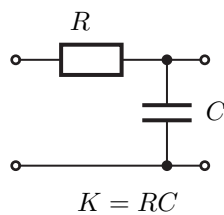
$$E\{\hat{x}(n)\} = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^n\right] x \quad (7.8)$$

A becslő torzított, de a torzítás az idő múltával nullához konvergál:

$$b = -\left(1 - \frac{1}{Q}\right)^n x \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty \quad (7.9)$$

Az ilyen becslést *aszimptotikusan torzítatlannak* nevezzük.

Megjegyzés: Mint a frekvencia-tartománybeli jellemzésnél már beláttuk az exponenciális átlagoló egy-egységnyi időtartományban, amelynek a folytonos időtartományban egy RC aluláteresztő szűrő felel meg (7.1 ábra). Ez utóbbinak az átmeneti függvénye $1 - e^{-t/(RC)}$ szerint aszimptotikusan tart 1-hez, tehát az exponenciális átlagolóhoz hasonlóan a kimenet csak a végtelenben éri el a nulla időpontban belépő állandó jelszintet.



7.1. ábra. RC tag

A **mozgó átlagolásra** ugyanaz írható fel, mint az *ideális átlagolásra*, csupán annyi a különbség, hogy n helyett N tagot összegzünk, ami viszont a várható értékre nézve nem okoz különbséget az eredményben.

A becslő torzítottsága vagy torzítatlansága még nem jelenti azt, hogy pontos vagy pontatlan a becslés, hiszen a várhatóérték-képzés miatt ezek a vizsgálatok csak végtelen számú elvégzett mérés sokaságáról szólnak. Ahhoz, hogy támpontot kapjunk arról, hogy az egyedi mérésünk mennyire megbízható, a sokaság eloszlásáról többet kell mondani.

Ha meg tudnánk adni a becslő sűrűségfüggvényét, akkor az teljes mértékben jellemezné a realizációk sokaságát, ehhez azonban a zajról is ilyen mélységű feltételezéseket kellene tenni; ezért csak a becslő szórásának vizsgálatára szorítkozunk.

A mérési eredményünk tehát a becsült érték és annak szórása lehet. (A szórás helyett, a mérés kiterjesztett bizonytalanságát, vagy konfidencia intervallumokat is lehet használni a bizonytalanság megadására.) A lényeges az, hogy *a becsült érték önmagában még nem mérési eredmény*, hiszen a becslő mindig valószínűségi változó. Mivel a mért jelet sztochasztikusan modelleztük, így a véletlen szerepe soha nem küszöbölhető ki teljes mértékben a mérési eredményből.

7.2.2. Variancia

A variancia a várható értéktől vett eltérés négyzetes várható értéke, amely megegyezik az első- és másodrendű momentumok különbségével, hiszen

$$\text{var} \{ \hat{x}(n) \} = E \{ (\hat{x}(n) - E \{ \hat{x}(n) \})^2 \} \quad (7.10)$$

$$= E \{ \hat{x}^2(n) - 2\hat{x}(n)E \{ \hat{x}(n) \} + E^2 \{ \hat{x}(n) \} \} \\ = E \{ \hat{x}^2(n) \} - E^2 \{ \hat{x}(n) \} \quad (7.11)$$

A *szórás* (σ) a variancia négyzetgyöke, dimenziója megegyezik az argumentumbeli mennyiségével:

$$\sigma_{x(n)} = \sqrt{\text{var} \{ \hat{x}(n) \}}. \quad (7.12)$$

A szórás szemléletesen a valószínűségi változó amplitúdójának átlagos ingadozását adja meg, az effektív értékhez hasonló mennyiség.

Eddigi feltételezéseinket most újabbakkal egészítjük ki (gyenge stacionaritás + a zaj fehérsége):

$$\text{var} \{ n(k) \} = \sigma_n^2 \quad (7.13)$$

$$E \{ n(k)n(j) \} = 0, \quad k \neq j \quad (7.14)$$

Ezekből következően:

$$E \{ y(k)y(j) \} = \begin{cases} E \{ y^2(k) \} = E \{ y^2 \} = x^2 + \sigma_n^2, & k = j \\ x^2, & k \neq j \end{cases} \quad (7.15)$$

Az első feltétel (7.13) a zaj szórásának időbeni állandóságát jelenti. A második feltétel (7.14) a zaj eltérő időpontbeli mintáinak korrelálatlanságát írja elő. Ez azt jelenti, hogy a zaj mintái egymástól független valószínűségi változók, a realizációk sokaságát tekintve, egymástól függetlenül változnak, nem „cibálják egymást”. A stacionaritást figyelembe véve ez azt is jelenti, hogy az autokorrelációs függvénye a nullában a szórásnégyzet (σ_n^2), egyébként nulla. Az autokorrelációs függvény Fourier transzformáltjaként kapott spektrum azonosan $\frac{\sigma_n^2}{2f_M}$, vagyis fehér. A fehér zaj feltétele (7.14) teljesül általában a legnehezebben, hiszen a zaj egymást követő mintái sűrű mintavételezés esetén összefügghetnek. (Ez akkor következik be, ha a zaj sáv szélességére túlteljesítjük az 1. mintavételi tétel szerinti feltételt. Ld. 2. fejezet; Schnell, 24.3.1. fejezet.)

Az **ideális átlagolás** esetén a becslő második momentuma:

$$E \{ \hat{x}^2(n) \} = E \left\{ \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) \right)^2 \right\} = \frac{1}{n^2} E \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-1} y(k) \right)^2 \right\} \quad (7.16)$$

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért az $\frac{1}{n^2}$ tényezőt mellőzzük a további levezetésben:

$$E \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-1} y(k) \right)^2 \right\} = E \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-1} (x + n(k)) \right)^2 \right\} = \quad (7.17)$$

$$= E \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} (x + n(k)) (x + n(l)) \right\} = \quad (7.18)$$

$$= E \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} x^2 + xn(k) + xn(l) + n(k)n(l) \right\} = \quad (7.19)$$

$$= E \left\{ n^2 x^2 + 2n \sum_{k=0}^{n-1} xn(k) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} n(k)n(l) \right\} = \quad (7.20)$$

$$= n^2 x^2 + 0 + \sum_{k=0}^{n-1} (E \{ n^2(k) \}) = n^2 x^2 + n\sigma_n^2 \quad (7.21)$$

Ezzel a 7.16 kifejezés eredménye:

$$E \{ \hat{x}^2(n) \} = \frac{1}{n^2} E \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-1} y(k) \right)^2 \right\} = \frac{1}{n^2} (n^2 x^2 + n\sigma_n^2) = x^2 + \frac{\sigma_n^2}{n}. \quad (7.22)$$

A variancia a 7.11 kifejezését felhasználva a következő adódik:

$$\text{var} \{ \hat{x}(n) \} = \frac{\sigma_n^2}{n}; \quad \sigma_{\hat{x}(n)} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}. \quad (7.23)$$

Vagyis a 7.1, 7.3, ill. 7.13-7.14 feltételek teljesülése esetén (!) az ideális átlagolás n arányában csökkenti a varianciát, illetve \sqrt{n} arányában a szórást.

Megjegyzések

1. A 7.10 képlet szerinti kiszámítás tulajdonképpen egyszerűbbre adódik. Ennek végigszámolását az olvasóra bízjuk. A 7.11 képlet olyan esetben lehet előnyösebb, ha pl. x sztochasztikus, és/vagy a megfigyelési egyenlet nem lineáris.
2. Abban az esetben, ha a zaj várható értéke nem nulla, de továbbra is stacionárius, akkor az eddigi feltételezéseket megtartva, de $y(k) = x + n_{\text{konst.}} + n(k)$ megfigyelési egyenletből indulhatunk ki, ez azonban csak a várható értéket befolyásolja a varianciát nem.

3. Korrelált minták esetén a variancia-csökkenés mértéke általában kisebb, hiszen a keresztszorzatok várható értékei nem nullák, így nem tűnnek el a 7.20 összegzésből:

$$E \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} n(k)n(l) \right\} \neq E \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (n(k))^2 \right\} \quad (7.24)$$

4. A korrelálatlanság pl. úgy biztosíthatjuk, ha minden L . mintát dolgozzuk csak fel, amelyek között a korreláció már elhanyagolható. A frekvenciatartományban az figyelhető meg, hogy a mintavételi frekvencia csökkentésével a zaj spektruma egyre inkább átlapolódik, és közel a egyenletessé válik.
5. Ha a mintavételezés lecsökkentésével sérülne a hasznos jel (pl. nem átlagolást végzünk, hanem DFT-t, és nem konstans mennyiséget, hanem egy periodikus jelet mérünk), akkor eljárhatunk úgy, hogy minden rendelkezésre álló (korrelált) mintát feldolgozunk ugyan, de az eredmény szórásáról legfeljebb annyit tételezünk fel, mint amennyit minden L . minta feldolgozásával értünk volna el.

Mozgó átlagolás esetére ugyanaz a variancia írható fel, mint az ideális átlagoláséra, de $n \rightarrow N$ helyettesítéssel. Korrelálatlan zaj esetére tehát:

$$\text{var} \{ \hat{x}(n) \} = \frac{\sigma_n^2}{N} \quad (7.25)$$

Az időtartományban megfogalmazva: az ablakhosszal fordítottan arányos a variancia-csökkenés. A frekvenciatartományban ugyanez úgy figyelhető meg, hogy az eredetileg „fehér” zajspektrumból, a szűrőkarakterisztika által „kivágott” zajteljesítmény, egyenes arányban áll a sinc karakterisztika főhullámának szélességével; miközben a sávközépre eső hasznos jelösszetevő nem sérül.

A bemenet teljesítménye:

$$E \{ u^2(n) \} = x^2 + \sigma_n^2 \quad (7.26)$$

A kimenet (vö. 7.22 egyenlet):

$$E \{ \hat{x}^2(n) \} = x^2 + \frac{\sigma_n^2}{N} \quad (7.27)$$

vagyis N növelésével az átlagérték mellől „eltűnik” a zaj.

Az eredmények DFT-re és periodikus hasznos jelre is kiterjeszthetők.

Megjegyzés: Periodikus jelek esetén további lehetőség az, hogy az egymástól periódusnyi távolságra lévő mintákat átlagoljuk egymással, és ezt elvégezzük a periódus minden mintájára. Összességében tehát periódusokat átlagolunk. (ld. Schnell, 24.3.5 fejezet) M periódus átlagolása az eredményt tekintve megfelel annak, mintha a periódushossz (N) többszörösére ($M \cdot N$) végeznénk DFT-t, de csak minden M -edik DFT-pontot értékelnénk ki, és a többit 0-nak tekintve transzformálnánk vissza IDFT-vel.

Exponenciális átlagolás varianciája. A variancia 7.10 képletét használva:

$$\begin{aligned}
 \text{var} \{ \hat{x}(n) \} &= E \{ (\hat{x}(n) - E \{ \hat{x}(n) \})^2 \} = \\
 &= E \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(1 - \frac{1}{Q} \right)^{n-1-k} \frac{1}{Q} (x + n(k)) \right] - E \{ \hat{x}(n) \} \right)^2 \right\} = \\
 &= E \left\{ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{Q} \right)^{n-1-k} \frac{1}{Q} (n(k)) \right)^2 \right\} = \\
 &= \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{Q} \right)^{2n}}{2Q - 1} \cdot \sigma_n^2, \tag{7.28}
 \end{aligned}$$

amelyhez felhasználtuk, hogy

$$\left(\frac{1}{Q} \right)^2 \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{Q} \right)^{2n}}{1 - \left(1 - \frac{1}{Q} \right)^2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{Q} \right)^{2n}}{Q^2 - (Q^2 - 2Q + 1)} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{Q} \right)^{2n}}{2Q - 1}. \tag{7.29}$$

Felhasználva a 7.26 és 7.11 egyenleteket, és azt, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{Q} \right)^{2n} = 0$, a variancia időben aszimptotikusan beáll az alábbi határértékre:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var} \{ \hat{x}(n) \} = \frac{\sigma_n^2}{2Q - 1} \tag{7.30}$$

A varianciák alapján a mozgó átlagolás és az exponenciális átlagolás közel egyenértékű korrelátlan minták esetén, ha $N = 2Q - 1$.

irodalom: [Schnell] 5.1.4, 5.1.5, 24.3.1, 24.3.4, 24.3.5 fejezetek

7.2.3. Korrelált minták átlagolása

Az eddigiekben korrelátlan minták átlagolását vizsgáltuk. A korrelátlanlás azonban a mintavételtől függ, és nem mindig tudjuk biztosítani, hogy a minták ténylegesen korrelátlanok legyenek. Ezért meg kell vizsgálnunk a bonyolultabb esetet is.

$$\begin{aligned}
 \text{var}\{\hat{x}(n)\} &= \text{E}\{(\hat{x}(n) - x)^2\} \\
 &= \text{E}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(y(k) - x)\right)^2\right\} \\
 &= \frac{1}{n^2}\text{E}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}(y(k) - x)(y(m) - x)\right\} \\
 &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\text{E}\{(y(k) - x)(y(m) - x)\} \\
 &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}C_{yy}(m - k). \tag{7.31}
 \end{aligned}$$

Észrevehetjük, hogy ha $m - k$ konstans, akkor ugyanazokat az értékeket kell összegeznünk. Ezeket összeszámolva:

$$\begin{aligned}
 \text{var}\{\hat{x}(n)\} &= \frac{1}{n^2}\sum_{p=-(n-1)}^{n-1}C_{yy}(p)(n - |p|) \\
 &= \frac{1}{n}\sum_{p=-(n-1)}^{n-1}C_{yy}(p)\left(1 - \frac{|p|}{n}\right). \tag{7.32}
 \end{aligned}$$

Ezt a kifejezést megvizsgálhatjuk két szélső esetben. Ha a mintavételezés ritka, vagyis az autokovariancia függvény a $p \neq 0$ helyeken már elhanyagolható (korrelálatlan minták), akkor a $C(0) = \sigma^2$ összefüggés miatt visszakapjuk a korábban kiszámított $\text{var}\{\hat{x}(n)\} = \sigma^2/n$ kifejezést.

Számunkra most fontos eset az, ha n jóval nagyobb, mint $C(p)$ nullától különböző részének szélessége. Ekkor a jobb oldali tényező $C(p)$ fontos értékeinél gyakorlatilag 1, és közelítőleg $C(p)$ mintáinak összegét kapjuk. Ha a mintavételi tételt $C(\tau)$ -ra betartjuk, az összeget a mintavételi intervallum szélességével beszorozva, ez jól közelíti $C(\tau)$ integrálját, ami megegyezik $S_c(0)$ értékével:

$$\text{var}\{\hat{x}(n)\} \approx \frac{1}{n}\sum_{p=-(n-1)}^{n-1}C_{yy}(p)\frac{T_s}{T_s} \approx \frac{S_c(0)}{T}. \tag{7.33}$$

Ez a kifejezés egyben a folytonos középértékbecslő közelítő varianciája is ha a regisztrátum-hossz elég nagy ahhoz, hogy ennyi idő alatt $C(\tau)$ eltűnjék, hiszen a minták összege T_s -vel szorozva a T hosszúságú integrált adja.

Vizsgáljuk meg most (7.33) értékét sávkorlátozott fehér zajra. A variancia megegyezik a sáv szélesség és $S_c(0)$ szorzatával, vagyis

$$\text{var}\{\hat{x}(n)\} \approx \frac{\sigma^2}{2BT}. \tag{7.34}$$

7. ÁTLAGOLÁSI ELJÁRÁSOK, ABLAKOZÁS

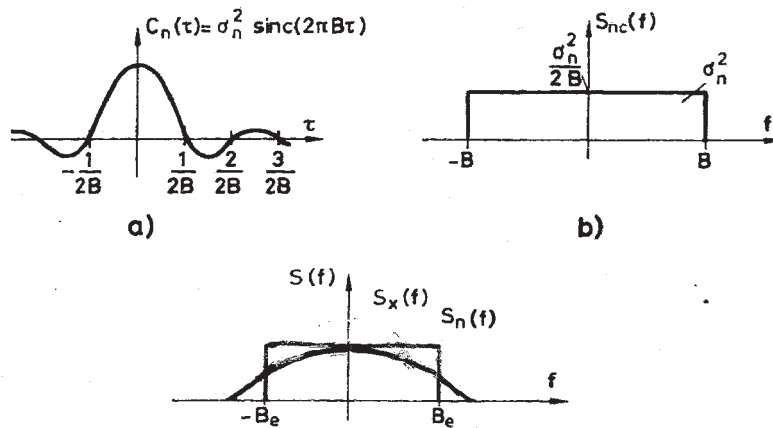
Kiszámítottuk tehát a variancia értékét sávkorlátozott fehér zajra, mind sűrű mintavételezés, mind folytonos átlagolás esetére. Ez a kifejezés jellemző az átlagolási eljárásokra: az átlagolás nélküli értéket (σ^2) osztjuk a BT szorzattal. A $2BT$ szorzatról egyébként tudjuk, hogy megegyezik az *ekvivalens mintaszámmal*, és így ismét a σ^2/n kifejezéshez jutunk.

A (7.34) kifejezés egyébként nem csak sávkorlátozott fehér zajra alkalmazható. Észrevehetjük, hogy a sáv szélességet így vezettük be a kifejezésbe:

$$S_c(0) = \frac{\sigma^2}{2B}. \quad (7.35)$$

Más jelekre az *ekvivalens sáv szélességet* használhatjuk, ennek mintájára:

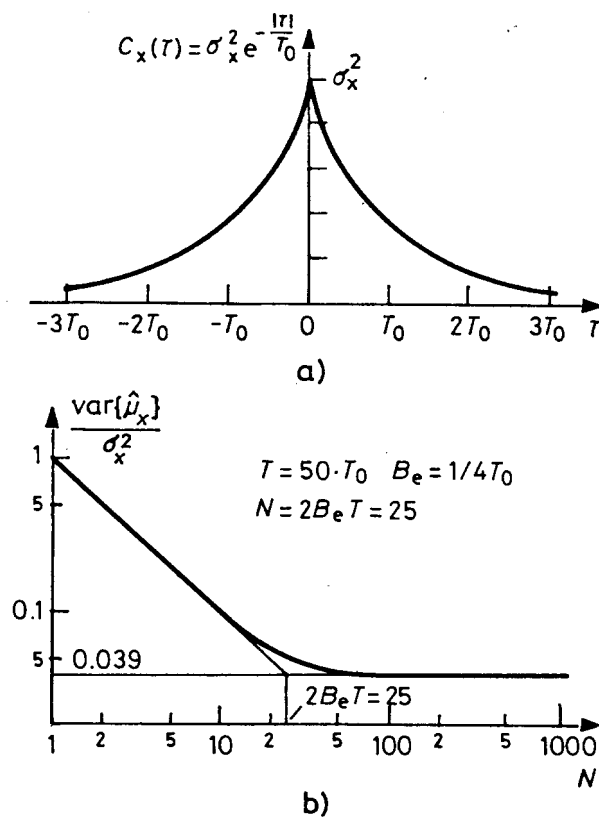
$$B_e = \frac{\sigma^2}{2S_c(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_c(f) df}{2S_c(0)}, \quad \text{var}\{\hat{x}(n)\} \approx \frac{\sigma^2}{2B_e T} \dots \quad (7.36)$$



7.2. ábra. Az egyenértékű fehér zajjal való helyettesítés (az ekvivalens sáv szélesség definíciója) a) a helyettesítő zaj autokorrelációs függvénye b) a helyettesítő zaj teljesítmény-sűrűségfüggvénye c) helyettesítés a frekvenciatartományban

A fenti kifejezések alapján ábrázolhatjuk a variancia mintaszám-függését, állandó regisztrátum-hossz esetén (vagyis a növekvő mintaszám egyre sűrűbb mintavételezést jelent).

Ez a viselkedés ismét általában jellemző az átlagolási eljárásokra: független minták esetén a variancia $1/n$ -nel arányosan csökken addig, amíg el nem érjük az $n = 2BT$ határt, vagyis azt az értéket, amelytől kezdve betartjuk a mintavételi tételt. Innen kezdve a minták sűrítése nem hoz információ többletet: a variancia nem csökken tovább.



7.3. ábra. A variancia mintaszám-függése exponenciális kovariancia-függvény esetén. Az időállandó $\tau = 1$, a regisztrátum-hossz $T_r = 50$. $B_e = 1/4$, $2B_eT = 25$.

7.3. A DFT tulajdonságai, a periodogram

Ahhoz, hogy képünk legyen arról, hogy a transzformált jeleknek milyen tulajdonságai vannak, célszerű megvizsgálnunk a folytonos és a diszkrét Fourier-transzformáció eredményének tulajdonságait különböző bemeneti jelek esetére. Kezdjük egy folytonos négyszögjellel, melynek értéke 1 a $\pm T/2$ értékek között.

$$\begin{aligned}
 W(f) = \mathcal{F}\{w(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \left[\frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_{-T/2}^{T/2} \\
 &= \frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{-j2\pi f} \\
 &= \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \\
 &= T \text{sinc}(\pi fT). \tag{7.37}
 \end{aligned}$$

Amennyiben a négyszögjelet eltoljuk úgy, hogy a $(0, T)$ intervallumban legyen, akkor a számítás hasonló, de az eredmény $e^{-j\pi fT}$ -vel szorzódik:

$$W_{0T}(f) = \mathcal{F}\{w_{0T}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j\pi fT} T \text{sinc}(\pi fT) \tag{7.38}$$

Vizsgáljuk most meg a $0, T_s, 2T_s, \dots, (N-1)T_s$ helyeken mintavételezett négyszög Fourier-transzformáltját!

$$\begin{aligned}
 W_d(f) = \mathcal{F}\{w_d(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \delta\left(\frac{t - iT_s}{T_s}\right) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} T_s e^{-j2\pi f iT_s} \\
 &= T_s \frac{1 - e^{-j2\pi f NT_s}}{1 - e^{-j2\pi f T_s}} \\
 &= \frac{e^{-j\pi f NT_s}}{e^{-j\pi f T_s}} T_s \frac{\sin(\pi f NT_s)}{\sin(\pi f T_s)} \\
 &= e^{-j\pi f (N-1)T_s} T_s \frac{\sin(\pi f NT_s)}{\sin(\pi f T_s)}. \tag{7.39}
 \end{aligned}$$

Észrevehetjük, hogy ha $T = NT_s$, és $T_s \rightarrow 0$, akkor $W_d(f) \rightarrow W_{0T}(f)$, ahogy el is várhatjuk.

Azt is megfigyelhetjük, hogy $W_d(f)$ kifejezése majdnem teljesen megegyezik a diszkrét egység-sorozat DFT-jével az $f = \frac{k}{NT_s}$ helyeken, mindössze el kell hagyni a T_s szorzót:

$$\begin{aligned}
 W_{dk} &= \sum_{i=0}^{N-1} e^{-j2\pi k \frac{1}{NT_s} iT_s} \\
 &= \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-2j\pi \frac{k}{N}}} \\
 &= \frac{e^{-j\pi k} \sin(\pi k)}{e^{-j\pi \frac{k}{N}} \sin(\pi \frac{k}{N})} \\
 &= e^{-j\pi k \frac{N-1}{N}} \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi \frac{k}{N})}. \tag{7.40}
 \end{aligned}$$

Ezek alapján már könnyű meghatározni egy véges hosszúságú szinuszjel Fourier-transzformáltját, hiszen az nem más, mint egy végtelen hosszúságú szinuszjel és egy ablakfüggvény szorzata.

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{F} \{w_{0T}(t) A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)\} \\
 &= e^{-j\pi f T} T \operatorname{sinc}(\pi f T) \star \left(\frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1} \delta(f - f_1) + \frac{A_1}{2} e^{-j\varphi_1} \delta(f + f_1) \right) \\
 &= e^{-j\pi(f-f_1)T} e^{j\varphi_1} \frac{A_1}{2} T \operatorname{sinc}(\pi(f-f_1)T) \\
 &\quad + e^{-j\pi(f+f_1)T} e^{-j\varphi_1} \frac{A_1}{2} T \operatorname{sinc}(\pi(f+f_1)T) \tag{7.41}
 \end{aligned}$$

Megfigyelhető, hogy az ablakfüggvény Fourier-transzformáltja van megismételve a szinusz frekvenciájánál és ennek mínusz egyszeresénél. A pozitív oldalon a fázis pozitív irányba forog, a negatív oldalon negatív irányba.

A mintavételezett szinusz Fourier-transzformáltja hasonló:

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{F} \{w_d(t) A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)\} \\
 &= e^{-j\pi f(N-1)T_s} T_s \frac{\sin(\pi f N T_s)}{\sin(\pi f T_s)} \star \left(\frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1} \delta(f - f_1) + \frac{A_1}{2} e^{-j\varphi_1} \delta(f + f_1) \right) \\
 &= e^{-j\pi(f-f_1)(N-1)T_s} \frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1} N T_s \frac{\sin(\pi(f-f_1)N T_s)}{N \sin(\pi(f-f_1)T_s)} \\
 &\quad + e^{-j\pi(f+f_1)(N-1)T_s} \frac{A_1}{2} e^{-j\varphi_1} N T_s \frac{\sin(\pi(f+f_1)N T_s)}{N \sin(\pi(f+f_1)T_s)} \tag{7.42}
 \end{aligned}$$

Ebből kiszámítható, a DFT eredménye is: láttuk, hogy el kell hagyni egy T_s szorzót, és elvégezni az $f \rightarrow \frac{k}{N} f_s$ valamint $f_1 \rightarrow f_{1d} f_s$ helyettesítéseket (f_{1d} a diszkrét frekvencia, $(0, f_s/2)$ között):

$$\begin{aligned}
 X_k &= e^{-j\pi(\frac{k}{N}-f_{1d})(N-1)} \frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1} N \frac{\sin(\pi(\frac{k}{N}-f_{1d})N)}{N \sin(\pi(\frac{k}{N}-f_{1d}))} \\
 &\quad + e^{-j\pi(\frac{k}{N}+f_{1d})(N-1)} \frac{A_1}{2} e^{-j\varphi_1} N \frac{\sin(\pi(\frac{k}{N}+f_{1d})N)}{N \sin(\pi(\frac{k}{N}+f_{1d}))} \quad (7.43)
 \end{aligned}$$

Jól látható, hogy a DFT eredménye a $\pm f_{1d}$ -nél megismételt négyszög Fourier-transzformáltjának mintavételi értékeiből áll. Speciális eset az, amikor a mintavételezés koherens, (vagyis f_{1d} az $1/N$ egész számú többszöröse, azaz a szinuszból egész periódusokat mértünk), mert ekkor az $f_{1d} = \frac{k_1}{N}$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
 X_k &= e^{-j\pi(k-k_1)\frac{N-1}{N}} \frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1} N \frac{\sin(\pi(k-k_1))}{N \sin(\pi\frac{k-k_1}{N})} \\
 &\quad + e^{-j\pi(k+k_1)\frac{N-1}{N}} \frac{A_1}{2} e^{-j\varphi_1} N \frac{\sin(\pi(k+k_1))}{N \sin(\pi\frac{k+k_1}{N})} \\
 &= \begin{cases} e^{j\varphi_1} \frac{A_1}{2} N & \text{ha } k = k_1 \\ e^{-j\varphi_1} \frac{A_1}{2} N & \text{ha } k = -k_1 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (7.44)
 \end{aligned}$$

Ebben az esetben tehát, ha véletlen fázisú szinuszjelről van szó, akkor X_{k_1} eloszlása egyenletes a $\frac{A_1}{2}N$ sugarú kör fölött, tehát varianciája $\left(\frac{A_1}{2}N\right)^2$. Valós és képzetes része korrelálatlan, de nem független egymástól.

Ha a mintavételezés nem koherens, (vagyis f_{1d} nem az $1/N$ egész számú többszöröse, akkor a helyzet sokkal bonyolultabb, mert az összes helyen lesz valószínűségi változó (ezt szivárgásnak hívjuk, lásd később), a k_1 -hez legközelebb eső vonal is kisebb, mint a $\frac{A_1}{2}N$ érték (picket fence vagy léckerítés-hatás), és ráadásul a körszimmetrikus eloszlás sem igaz, mert a negatív oldalról beszivárgó, a fázis növekedtével ellenkező irányban forgó tagok ezt elrontják.

Ha a feldolgozott jel folytonos spektrumú, akkor másképpen kell számolnunk.

$$\begin{aligned}
 X_k &= \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{-j2\pi\frac{ki}{N}} \\
 &= \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos(2\pi\frac{ki}{N}) - j \sum_{i=0}^{N-1} x_i \sin(2\pi\frac{ki}{N}) \\
 &= \xi - j\eta. \quad (7.45)
 \end{aligned}$$

Ez adott k -ra egy komplex értékű valószínűségi változó. Valós és képzetes részéről azt mondhatjuk el, hogy amennyiben a mintafüggvény normális eloszlású folyamatból származik, akkor ezek eloszlása is normális, ha mégsem, akkor pedig a központi

határeloszlás tétele miatt közelítőleg az. A szinusszal illetve koszinusszal való szorzás miatt a várható értékük nulla, varianciájuk jó közelítéssel azonos, és korrelálatlanok. Összefoglalva: $\xi - j\eta$ körszimmetrikus normális eloszlású.

A variancia is kiszámítható:

$$\begin{aligned}
 \text{var}\{X_k\} &= \text{E}\{\overline{X_k}X_k\} \\
 &= \text{E}\left\{\sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{j2\pi \frac{ki}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} x_l e^{-j2\pi \frac{kl}{N}}\right\} \\
 &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} (N - |m|) R(m) e^{-j2\pi \frac{km}{N}} \\
 &= N \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N - |m|}{N} R(m) e^{-j2\pi \frac{km}{N}} \\
 &\approx NS(k),
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

feltéve, hogy a közelítések helyesek: betartjuk a mintavételi törvényt, és a regisztrátum-hossz eléggé nagy $R(m)$ változó részének lefedéséhez. Ezek szerint ismerjük ξ és η varianciáját is:

$$\text{var}\{\xi\} \approx \text{var}\{\eta\} \approx \frac{N}{2} S(k) \tag{7.47}$$

Azt is könnyű belátni, hogy különböző k értékekre az X_k változók a különböző frekvenciájú szinuszoszok ortogonalitása miatt egymástól közelítőleg függetlenek.

7.3.1. A periodogram

A fentiekben láttuk, hogy egy véges hosszúságú regisztrátum Fourier-transzformáltjának varianciája folytonos spektrumú jeleknél közvetlen kapcsolatban van a spektrummal. Valóban, az

$$\hat{S}(k) = \frac{1}{N} |X_k|^2 \tag{7.48}$$

kifejezés várható értéke folytonos jeleknél közelítőleg a teljesítmény-sűrűségfüggvénnyel egyenlő. Ez azért is kézenfekvő, mert az energia-sűrűségfüggvény és a teljesítmény-sűrűségfüggvény fizikai értelmezése nagyon hasonló, ezért kézenfekvő, hogy az energia-sűrűségfüggvény definíciós összefüggéséhez hasonlóan a teljesítmény-sűrűségfüggvényt is meg tudjuk határozni.

A pontos érték úgy számítható ki, hogy a (7.46) kifejezésben elhanyagolt háromszögablakot (Bartlett-ablakot) figyelembe vesszük:

$$\text{E}\{\hat{S}(k)\} = \{S(k)\} \star \mathcal{F}\{w_\Delta(m)\} \tag{7.49}$$

7. ÁTLAGOLÁSI ELJÁRÁSOK, ABLAKOZÁS

A várható érték tehát az „igazi” spektrum és a frekvenciatartománybeli Bartlett-ablak konvolúciója. Ennek az a következménye, hogy az éles csúcsok szétkenődnek, a meredek élek pedig ellapulnak.

A variancia meghatározásához azt kell meggondolnunk, hogy

$$\hat{S}(k) = \frac{1}{N} |X_k|^2 = \frac{1}{N} (\xi^2 + \eta^2) \approx \frac{S(k)}{2} \chi_2^2. \quad (7.50)$$

Ebből pedig az következik, hogy a variancia

$$\text{var} \left\{ \hat{S}(k) \right\} \approx \left(\frac{S(k)}{2} \right)^2 \text{var} \left\{ \chi_2^2 \right\} = S^2(k) \quad (7.51)$$

Vagyis a variancia 100%, tehát a periodogramot valahogy átlagolni kell. Két egyszerű lehetőségünk van erre:

- A periodogramot többször egymás után mért regisztrátumokra kiszámítjuk, és az eredményeket átlagoljuk (Welch-módszer).
- A periodogramot sok pontra, nagy felbontással kiszámítjuk, és a szomszédos vonalcsoportokat átlagoljuk (Bartlett-módszer).

A periodogramot a fentiekben folytonos spektrumú jelekre vezettük be. Mivel a véletlen fázisú szinusznak szintén van teljesítmény-sűrűségfüggvénye, azt gondolhatnánk, hogy a periodogram szinuszos jelre is használható. Írjuk fel tehát a szinuszjel DFT-jéből meghatározható periodogramot.

$$\begin{aligned}
 S(k) &= \frac{1}{N} \overline{X_k} X_k \\
 &= \frac{1}{N} \left(e^{j\pi(\frac{k}{N} - f_{1d})(N-1)} \frac{A_1}{2} e^{-j\varphi_1} N \frac{\sin(\pi(\frac{k}{N} - f_{1d})N)}{N \sin(\pi(\frac{k}{N} - f_{1d}))} \right. \\
 &\quad \left. + e^{j\pi(\frac{k}{N} + f_{1d})(N-1)} \frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1} N \frac{\sin(\pi(\frac{k}{N} + f_{1d})N)}{N \sin(\pi(\frac{k}{N} + f_{1d}))} \right) \\
 &\quad \times \left(e^{-j\pi(\frac{k}{N} - f_{1d})(N-1)} \frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1} N \frac{\sin(\pi(\frac{k}{N} - f_{1d})N)}{N \sin(\pi(\frac{k}{N} - f_{1d}))} \right. \\
 &\quad \left. + e^{-j\pi(\frac{k}{N} + f_{1d})(N-1)} \frac{A_1}{2} e^{-j\varphi_1} N \frac{\sin(\pi(\frac{k}{N} + f_{1d})N)}{N \sin(\pi(\frac{k}{N} + f_{1d}))} \right) \\
 &= \frac{A^2}{4} N \left(\frac{\sin(\pi(\frac{k}{N} - f_{1d})N)}{N \sin(\pi(\frac{k}{N} - f_{1d}))} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{A^2}{4} N \left(\frac{\sin(\pi(\frac{k}{N} + f_{1d})N)}{N \sin(\pi(\frac{k}{N} + f_{1d}))} \right)^2 \\
 &\quad + 2 \frac{A^2}{4} N \cos(\varphi_1 + 2\pi f_{1d}(N-1)) \\
 &\quad \times \frac{\sin(\pi(\frac{k}{N} - f_{1d})N)}{N \sin(\pi(\frac{k}{N} - f_{1d}))} \frac{\sin(\pi(\frac{k}{N} + f_{1d})N)}{N \sin(\pi(\frac{k}{N} + f_{1d}))} \tag{7.52}
 \end{aligned}$$

Ebben a kifejezésben a varianciát a harmadik tag képviseli. Mivel az ablakfüggvények keresztszorzata kicsi, a szinuszjel periodogramjának kicsi a varianciája, illetve ha a fázis fix (egyetlen függvény), akkor a fázishelyzetből származó hiba kicsi. Ebből az következik, hogy szinusz detektálására a periodogram kiválóan alkalmas, mert nincs esélye annak, hogy a csúcs eltűnik.

A várható értékben tehát itt is a Bartlett-ablak Fourier-transzformáltja jelenik meg, mégpedig a szinusz Fourier-transzformáltjában lévő két Dirac-delta helyén.

Hozzá kell tennünk, hogy ugyanakkor a szinusz periodogramja csak távolról emlékeztet a két Dirac-deltát tartalmazó teljesítmény-sűrűségfüggvényre. Két csúcs van ugyan benne, de ezek véges szélességűek és véges magasságúak. Ezért itt a hibát nem a két függvény különbségeként kell értelmeznünk, hanem úgy, hogy a periodogramból, felismerve a szinuszos tartalmat, ki kell számítanunk a szinusz paramétereit, és ezek hibáját érdemes vizsgálnunk.

Ha a periodogram a teljesítmény-sűrűségfüggvény becslője, akkor ennek inverz Fourier-transzformáltja az autokorrelációs függvény becslője. Ez azért fontos, mert az FFT gyorsasága a DFT többszöri kiértékelését is nagyon gyorsá teszi.

Vizsgáljuk meg tehát a periodogram inverz Fourier-transzformáltjának a várható értékét. Mivel általánosan akarunk vizsgálni, a kereszt-spektrum becslőjét vizsgáljuk meg.

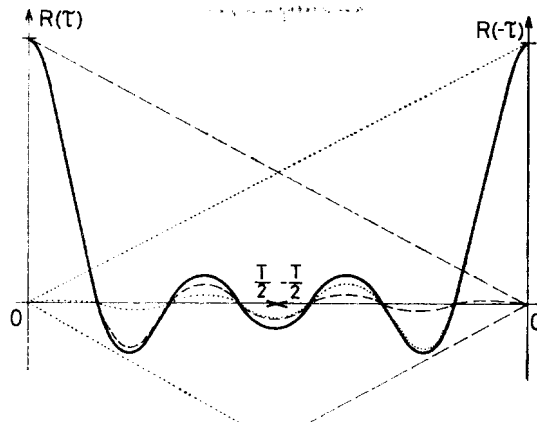
$$\begin{aligned}
 E \left\{ \hat{R}_{xy}^c(i) \right\} &= E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \overline{X}_k Y_k e^{j2\pi \frac{ki}{N}} \right\} \\
 &= \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \left(\sum_{p=0}^{N-1} x_p e^{j2\pi \frac{kp}{N}} \sum_{q=0}^{N-1} y_q e^{-j2\pi \frac{kq}{N}} \right) e^{j2\pi \frac{ki}{N}} \right\} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{s=-(N-1)}^{N-1} \frac{1}{N} (N - |s|) R_{xy}(s) e^{-j2\pi \frac{ks}{N}} \right) e^{j2\pi \frac{ki}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{s=-(N-1)}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 - \frac{|s|}{N} \right) R_{xy}(s) e^{j2\pi \frac{k(i-s)}{N}}. \tag{7.53}
 \end{aligned}$$

Az utolsó előtti lépésben az $s = q - p$ helyettesítést végeztük el.

A k szerinti összegzésben az exponenciális tényezők (a komplex egységgyökök) csak akkor nem ejtik ki egymást, ha $(i - s)$ az N -nek egész számú többszöröse: esetünkben $(i - s) = 0$ vagy $(i - s) = N$. Ilyenkor viszont az N tag összegzésével az $1/N$ szorzó kiesik, és a következőt kapjuk:

$$E \left\{ \hat{R}_{xy}^c(i) \right\} = \left(1 - \frac{i}{N} \right) R_{xy}(i) + \frac{i}{N} R_{xy}(i - N), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \tag{7.54}$$

Azt kaptuk, hogy a háromszög alakú Bartlett-ablakkal súlyozott korrelációs függvény bal oldala rámásolódik a jobb oldalra (7.4. ábra).



7.4. ábra. A cirkuláris korreláció várható értéke, és ennek keletkezése az egymásra másolódó korrelációdarabokból

Ha a korrelációs függvény a $(-T/2, T/2)$ intervallumon kívül elhanyagolható (illetve már konstans: μ^2), tehát elegendően hosszú regisztrátumot dolgoztunk fel, ez az átmásolás nem zavaró. Ha azonban R_{xy} szélesebb (például periodikus komponens

esetén egyáltalán nem válik konstanssá), akkor az egymásra másolódás kellemetlen torzítást okoz.

Vizsgáljuk meg, miből is származik az összemásolódás! A minta regisztrátum az iT_s pontokban adott ($T = NT_s$ időtartam), és így Fourier-transzformáltja is N -pontos. X_k és Y_k ennek megfelelően a k/T helyeken van kiszámítva („mintavételezve”). A frekvenciatartományban elvégzett szorzásnak azonban konvolúció felel meg az időtartományban, és így egy $2T$ hosszúságú korrelációs függvénynek kellene megkapnunk a DFT-jét. Ezt viszont a $k/(2T)$ helyeken kellene mintavételezni, azaz a spektrumra sűrűbben lenne szükség. Nem tartjuk tehát be a mintavételi törvényt. Mit lehet tenni? A következő lehetőségeink vannak:

- Interpoláljuk az $\{X_k\}$ és $\{Y_k\}$ sorozatokat. A sorozatok cirkulárisak, ezért cirkulárisan interpolálunk - ez ekvivalens az alább ismertetett nullákkal való kiegészítéssel, ezért ez egy lehetőség, de végrehajtása több számítást igényel.
- Az időtartományban kiegészítjük a minta-regisztrátumokat N darab 0-val, és így $2N$ -pontos DFT-t hajtva végre megkapjuk a kívánt pontokban a transzformáltakat, majd a spektrumbecslőt.
- Egy lehetséges megoldás az is, hogy az időfüggvényt $T/2$ hosszra csonkoljuk.

A nullákkal való kiegészítéssel a körbeforduló sorozatba annyi nullát iktatunk, hogy a körbefordulás cirkuláris jellege a nullákkal való szorzás miatt eltűnjön (7.4a. ábra).

A cirkuláris konvolúció fellépte egyébként analóg azzal a megfigyeléssel, hogy míg a folytonos Fourier-transzformáció a konvolúciót és a szorzást valóban egymásba viszi át, a DFT a frekvenciatartománybeli szorzást az ún. cirkuláris konvolúciónak felelteti meg.

A korreláció becslője ezzel majdnem készen van, de a Bartlett-ablakkal még mindig osztanunk kell. Mivel kis számmal osztva a variancia nagyon megnőne, a $\pm T/2$ intervallumban végezzük csak el az osztást.

7.3.2. A korrelációbecslő varianciája

A korábbiakban láttuk, hogy a periodogram varianciája nagy: 100%. Arra számíthatunk, hogy az inverz Fourier-transzformált varianciája szintén nagy.

Vizsgáljuk meg először az egyszerű szorzat: $x(i)x(i+m)$ varianciáját. Normális eloszlás esetén a négyszeres szorzat várható értéke egyszerűen kifejezhető:

$$\begin{aligned} E\{x_1x_2x_3x_4\} &= E\{x_1x_2\}E\{x_3x_4\} \\ &+ E\{x_1x_3\}E\{x_2x_4\} + E\{x_1x_4\}E\{x_2x_3\} - 2\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Ennek felhasználásával:

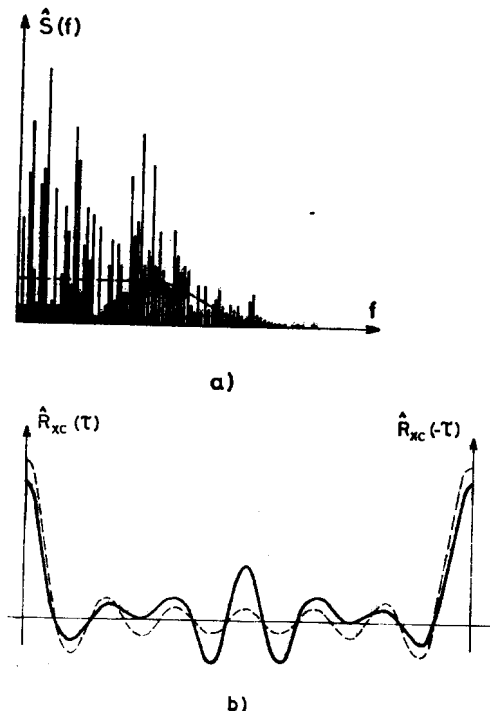
$$\begin{aligned} \text{var}\{x(i)x(i+m)\} &= E\{x^2(i)x^2(i+m)\} - R^2(m) \\ &= \Psi_x^4 + R^2(m) - 2\mu^4 \\ &= C^2(0) + 2\mu^2C(0) + C^2(m) + 2\mu^2C(m). \end{aligned} \quad (7.56)$$

7. ÁTLAGOLÁSI ELJÁRÁSOK, ABLAKOZÁS

Ebből azonnal látható, hogy $m = 0$ esetén a variancia kb. $2\sigma^4$ (200%), nagy m esetén pedig fele ekkora. Ez azt jelenti, hogy a variancia nagyságrendben ugyanakkora minden késleltetés esetén.

Azt is be lehet látni, hogy sávkorlátozott fehér zaj esetén a T hosszúságú átlagolással számított variancia kb. $1/(2BT)$ arányban csökken.

Ezekből már ki tudjuk számítani a varianciát, de a korreláció-becslőt még nem tudjuk jellemezni, hiszen a különböző késleltetésekhez kapott becslők összefüggése nem ismert. A korrelációbecslőnél az a helyzet, hogy a szomszédos pontokhoz tartozó becslők erősen korreláltak. Emiatt a mért pontok az emberi szem számára függvényvé állnak össze, pedig az ábra nagy részén a hullámmás a varianciából származik (7.5).



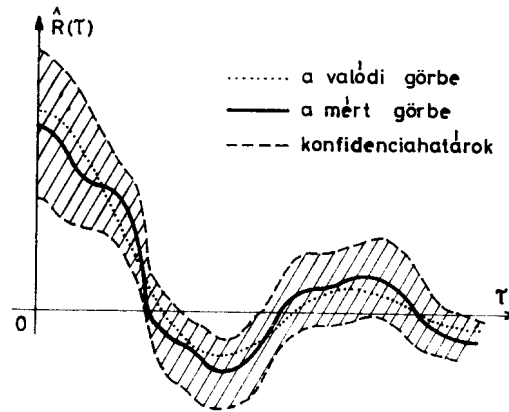
7.5. ábra. A variancia megjelenése a korreláció és a spektrum becslőjében

Mivel ez veszélyes érzékszálódás, jeleznünk kell a felhasználó számára. Ennek legésszerűbb módja a konfidencia-sávok kijelzése (vagyis azon határok kijelzése, melyek közé az ismert variancia esetén az igazi függvény jó eséllyel beleesik, 7.6. ábra). Ezt sajnos a korrelátorok többsége ma még nem teszi meg.

7.4. Ablakozási eljárások

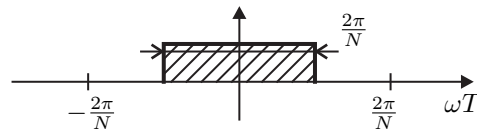
Ebben a fejezetben először a szivárgás és a léckerítés-hatás egy a fentieket szemléletben kiegészítő leírását adjuk, majd megvizsgáljuk csökkentésük módját.

Az ideális átlagérték meghatározása a DC komponens mérését jelenti, minden más frekvencia kiszűrésével. Ehhez a frekvenciatartományban egy végtelenül keskeny alu-



7.6. ábra. A konfidencia-sáv kijelzése korreláció-becslésben

láteresztő karakterisztika tartozik. A valóságban véges számú (N) minta alapján kell becslést tenni, és a véges megfigyelési hossz miatt a frekvenciafelbontás véges. Ezt a tényt elfogadva arra törekszünk, hogy olyan mérőszámot kapjunk, amely kielégítő módon jellemzi a jel spektrumának 7.7 ábrán látható, véges szélességű tartományát.



7.7. ábra. Jelspektrum egy véges keskenységű sávja

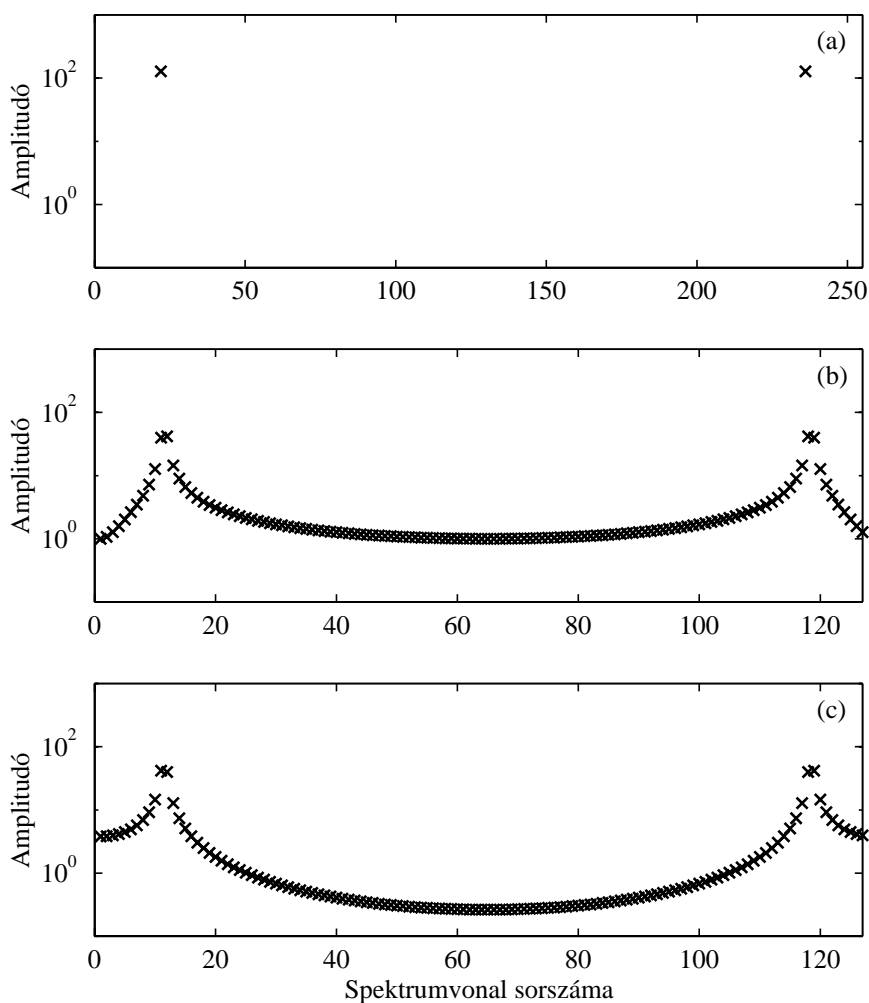
Az N -pontos mozgó átlagolás szűrőkarakterisztikájának áteresztő tartománya nem korlátozódik a kívánt sávra: a fősáv $2\frac{2\pi}{N}$ széles, nem egyenletes, és ún. oldalsávok is vannak. A véges felbontáson túl, tehát, további engedményeket kell tenni, de amint azt az ablakozási módszereknél látni fogjuk, különböző kompromisszumok között választhatunk.

7.4.1. Spektrumszivárgás és picket fence jelenség

A 7.8 ábra egy furcsa jelenségre hívja fel a figyelmet. Egy $\frac{21}{256}$ relatív frekvenciájú diszkrét koszinusz 256 mintáját állítottuk elő (21 periódust). FFT-t végezve a pontokon, a 256-pontos DFT vonalai $\frac{k}{256}$, $k = 0, 1, \dots, 127$ frekvenciáknak felelnek meg, tehát a koszinusz frekvenciája DFT-vonalra esik. Az eredmény a 256-tal való skálázástól eltekintve megadja a koszinusz Fourier-együtthatóit (ld. 7.8/a ábra).

Ezután olyan esetet állítottunk elő, amikor a koszinusz frekvenciája DFT-vonalak közé esik. A koszinusz frekvenciájának módosítása helyett a DFT pontszámát csökkentük felére. Ezzel az új DFT-vonalak $\frac{k}{128} = \frac{2k}{256}$, $k = 0, 1, \dots, 63$ frekvenciákra esnek. A $\frac{21}{256}$ frekvenciájú komponens és párja DFT vonalak közé esnek. Ha a 7.7 ábra szerinti felbontással tudnánk jellemezni a spektrumot, akkor csak a koszinusz frekvenciájában lenne bizonytalanság, ettől eltekintve az eredmény a valódi spektrumot tükrözné. A

7. ÁTLAGOLÁSI ELJÁRÁSOK, ABLAKOZÁS



7.8. ábra. a) $fT = \frac{21}{256}$ normált frekvenciájú koszinusz jel 256 pontos DFT-je. b-c) Spektrumszivárgás és picket fence jelenség a jel 128 pontos DFT-je esetén, az első 128 ill. a második 128 mintát transzformálva; (amplitúdó látható)

DFT ellenben a 7.8/b ill. 7.8/c ábrán látható eredményt adja. Az előbbi esetben a jel első 128 mintájára végeztünk FFT-t, a második esetben a $64+[1:128]$ mintákra. Az első eset mintái egy koszinusznak, a másodiké egy szinusznak felelnek meg ($21 \cdot 90$ fokos fázistolás).

Két jelenséget tapasztalunk:

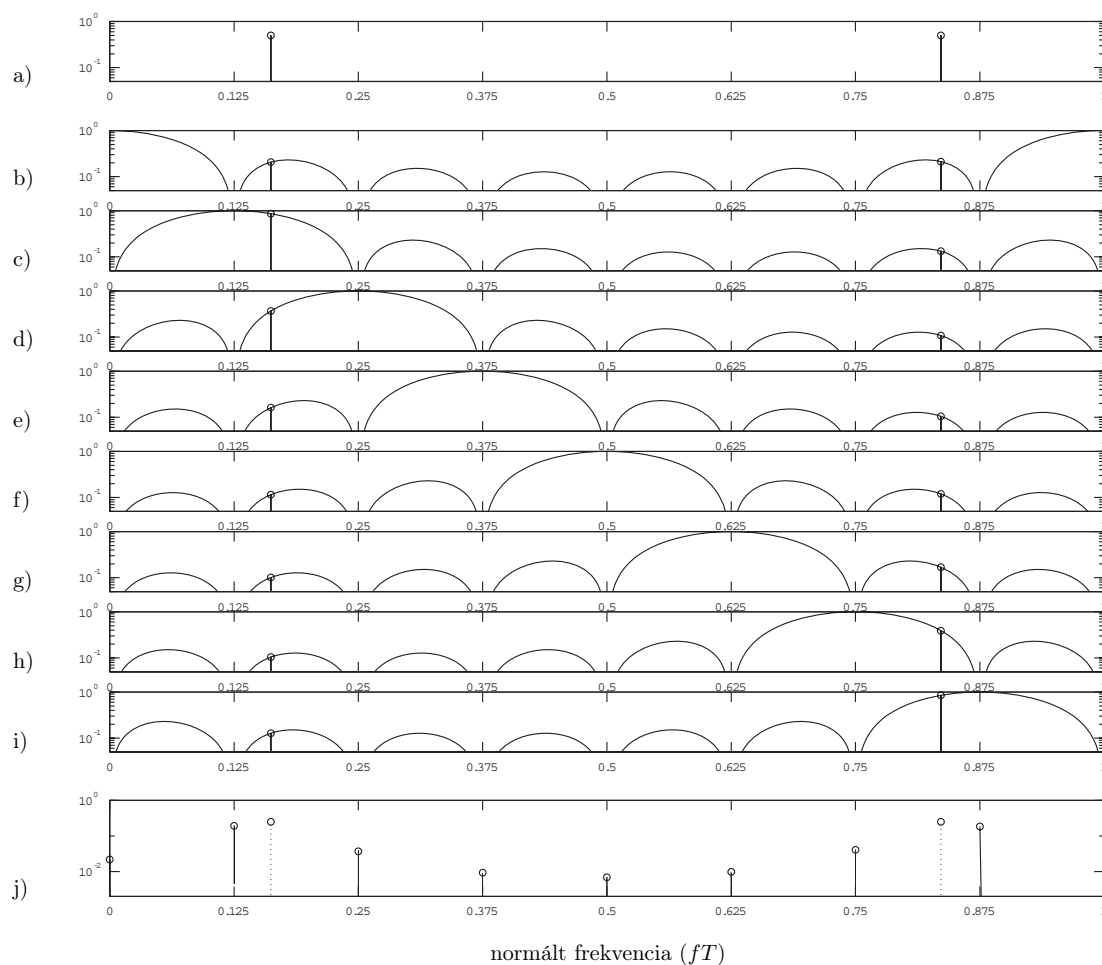
1. Az eredeti jelspektrum egyes komponenseinek teljesítménye távoli frekvenciákra is „átszivárog” (ld. 7.8/b-c ábra), a DFT-frekvenciákra koncentrált teljesítmény azonban egyáltalán nem (ld. 7.8/a ábra).
2. Az eredeti jelspektrum DFT-vonalak közé eső csúcsai elvesznek.

Az előbbit *spektrumszivárgásnak* a másodikat *picket fence* (léckerítés-) hatásnak nevezik. A spektrumszivárgás azért veszélyes, mert a nagyobb amplitúdójú frekvenci-

akomponensek elfedhetnek szomszédos, kisebb amplitúdójú komponenseket. A picket fence hatás pedig az egyes komponensek amplitúdójára nézve megtévesztő.

A 7.8/b-c ábrán az is látható, hogy a spektrumszivárgás jelensége a véletlen fázistól függ.

A jelenségek létrejöttét többféleképpen is lehet értelmezni, de a korábbi fejezetek alapján a legkézenfekvőbb, ha a DFT-t, mint szűrőbankot tekintjük.



7.9. ábra. Spektrumszivárgás és picket fence jelenség: (a) egy szinuszos jel spektruma, (b-i) a DFT-szűrőbank szűrőkarakterisztikái ($N = 8$), (j) a szűrőkimenetek teljesítménye a megfelelő sávközépen ábrázolva (szaggatottal a valódi teljesítmény-spektrum).

A 7.9 ábra egy szinuszos jel amplitúdó spektrumát, alatta pedig az egyes sávszűrők karakterisztikáját mutatja $N = 8$ esetén, a normált frekvencia függvényében. A legalsó tengely mentén az egyes sávszűrők kimenetén megjelenő jel teljesítményét tüntettük fel, mindegyik értéket a szűrő sávközepének megfelelő frekvencia fölött. Ez a jel teljesítmény-spektrumának becslője, melyen nyilvánvaló a szivárgás hatása; (szaggatott vonallal az eredeti teljesítményspektrumot is feltüntettük).

A szivárgás úgy jön létre, hogy mindegyik szűrő, a karakterisztikákon jelzett módon, csak véges mértékben csillapítja a jel két komplex harmonikus komponensét. A két egymásra ortogonális jelkomponens teljesítményét összegezve kapjuk az adott sáv eredő teljesítményét. (jelek ortogonalitása: ld. Schnell, 2.3. fejezet)

A szivárgás tehát a szűrőkarakterisztikák átfedése ill. periodikus „leszívásai” miatt jön létre, a picket fence hatás pedig azért, mert a karakterisztikák nem elég „laposak” a sávközép $\frac{2\pi}{N}(k \pm \frac{1}{2})$ környezetében.

Megjegyzés: A picket fence jelenség más szűrőbank esetén is előfordulhat, spektrumszivárgás azonban hasonló formában nem jelentkezik: Mivel a DFT-szűrők karakterisztikája az áteresztő sávon kívül nem monoton csökkenő, ezért a szinuszos jel frekvenciáját monoton változtatva a spektrumszivárgás előbb csökken, majd növekszik, vagy fordítva; sávközéphez érve pedig teljesen megszűnik. Ez a fajta érzékenység nem jelentkezik azoknál a szűrőbankoknál, amelyek szűrőkarakterisztikái levágnak (ld. Schnell 24.77. ábra).

7.4.2. Ablakozás

A mozgó átlagolás amplitúdó-karakterisztikája kapcsán már megvizsgáltuk, hogy a frekvenciatartománybeli szelektivitás hogyan feleltethető meg az időtartománybeli feldolgozásnak: a 4.15 ábra alapján szinuszos jelekre beláttuk, hogy az oldalsávokon át-szivárgó teljesítményt az ablakban látszódnó nem egész számú periódus okozza. Ezért arra kell törekedni, hogy elnyomjuk az ablakban látszódnó részperiódusokat.

Az egyszerűség kedvéért a mozgó átlagolásra szorítkozunk, az eredmények értelem-szerűen a többi DFT pozícióra is kiterjeszthetők.

Ha nem egyenletes súlyokkal átlagoljuk a mintákat, hanem például a szélek felé fokozatosan csökkenő súllyal, akkor az ablakhosszon egész-számú periódust tartalmazó jel, ill. nem egész-számú periódust tartalmazó jel közötti „különbözőség” csökken. Az amplitúdó-karakterisztika oldalsávjai csökkennek. A módszert *ablakozásnak* nevezik, a súlyok megválasztására különböző *ablakfüggvények* javasolhatók.

Az átlagolás helyébe súlyozott átlagolás lép: eddig minden minta egyforma $\frac{1}{N}$ súllyal szerepelt, most különböző $\{w_k\}$ súlyok. A torzítatlanság feltétele stacionárius jelek esetén:

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_k = 1 \quad (7.57)$$

mivel:

$$E \{ \hat{x}(n) \} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k E \{ y(n - N + k) \} = x \sum_{k=0}^{N-1} w_k. \quad (7.58)$$

A torzítatlanság értelmében 0 frekvencián a szűrő átvitele 1.

A Hanning ablak:

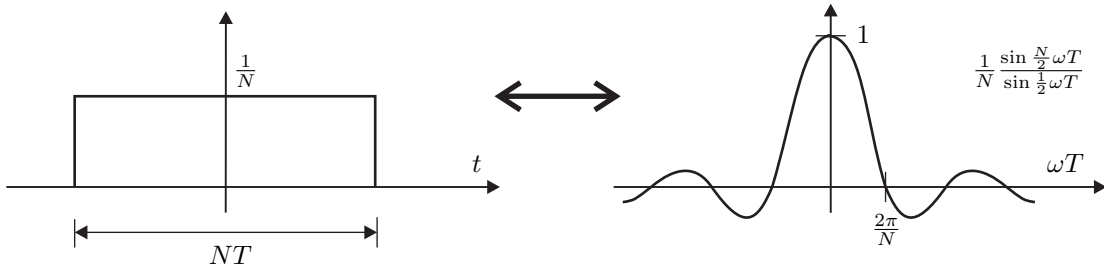
$$w_{\text{Hanning}}(n) = \frac{1}{N} [1 + \cos \frac{2\pi}{N} n]; \quad -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} \quad (7.59)$$

Az ablak a kiértékelés időpontjára szimmetrikus, így Fourier-transzformáltja valós értékű, az w_k súlyok összege 1. Az ablak a szélek felé egyre kevésbé veszi figyelembe a mintákat, míg közepén a négyszögletes ablakhoz képest éppen kétszeres súllyal.

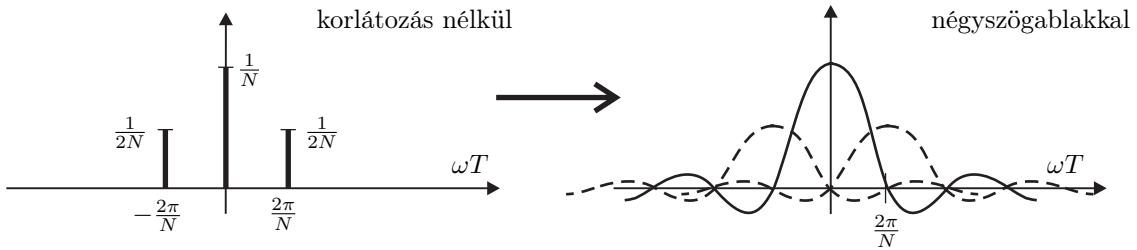
Az ablakfüggvény a periodikus „emelt koszinusz” és az azt NT időtartományra korlátozó, diszkrét-idejű, négyszögletes ablak szorzata. Ezért az ablak karakterisztikája az „emelt koszinusz” vonalas spektrumának és a négyszögletes ablak Fourier transzformáltjának konvolúciójaként áll elő (ld. 7.10 és 7.11 ábra):

$$\mathcal{F}\{w_{\text{Hanning}}\} = \frac{1}{2N} \frac{\sin \frac{N}{2}(\omega T_s + \frac{2\pi}{N})}{\sin \frac{1}{2}(\omega T_s + \frac{2\pi}{N})} + \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin \frac{N}{2}\omega T_s}{\sin \frac{1}{2}\omega T_s} + \frac{1}{2N} \frac{\sin \frac{N}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N})}{\sin \frac{1}{2}(\omega T_s - \frac{2\pi}{N})} \quad (7.60)$$

A három összetevő eredőjeként, a négyszögletes ablak karakterisztikájához képest,



7.10. ábra. Négyszögletes ablak, és amplitúdó-karakterisztikája



7.11. ábra. Az ablak spektruma korlátozás nélkül és négyszögletes ablakkal szorozva

$\pm \frac{2\pi}{N}$ -nél eltűnnek a leszívások, tehát a frekvenciafelbontás romlik, viszont az ellentétes fázisú oldalhullámok összege kisebb oldalhullámokat eredményez, ezért a spektrumszivárgás csökken. Mivel a főhullám is szélesebb, ezért a maximális amplitúdóhiba is csökken.

További felharmonikusok felhasználásával más ablakok is tervezhetők, így például a Flat-top ablak, amely minimalizálja a maximális amplitúdó-hibát adott számú együtt-ható mellett. Az alábbi Flat-top ablak Fourier transzformáltja kilenc $\frac{\sin \frac{N}{2}\omega T_s}{\sin \frac{1}{2}\omega T_s}$ jellegű komponens lineáris kombinációja:

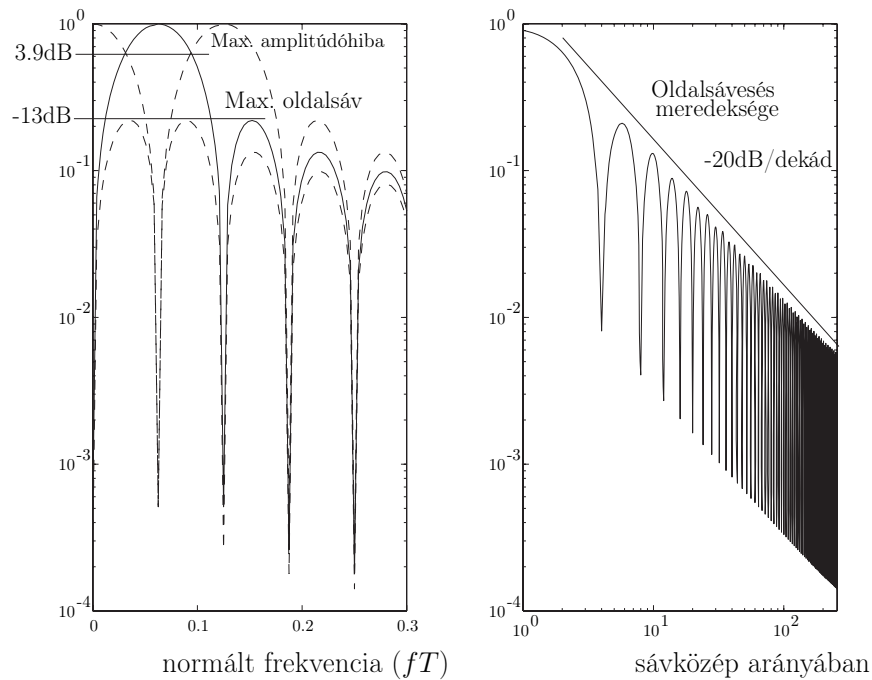
$$A_0 + \sum_{k=1}^4 A_k \cos \frac{2\pi}{N} k \cdot n; \quad -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} \quad (7.61)$$

7. ÁTLAGOLÁSI ELJÁRÁSOK, ABLAKOZÁS

A három ablaktípus jellemző adatai (vö. 7.12 ábra):

Ablak függv.	Oldallengés maximuma	Oldallengés határmeredekség	Zajsáv szélesség (relatív)	Max. ampl. hiba két pozíció között
Négyszögletes	-13dB	-20dB/D	1	3.9 dB
Hanning	-32 dB	-60	1.5	1.4 dB
Flat-top	-90,5 dB	0	> 3	< 0,1 dB

(7.62)



7.12. ábra. Az ablakfüggvények frekvenciatartománybeli jellemzői (a négyszögletes ablak példáján)

Ha az ablak karakterisztikája egységnyi varianciájú fehérzaj teljesítménysűrűség-spektrumából éppen $\frac{1}{N}$ területet vág ki (az $fT \in [-0.5, +0.5]$ tartományon), akkor ekvivalens zajsáv szélessége egységnyi. (A négyszögletes ablak zajsáv szélessége a 7.25 egyenletből következően 1.)

Az ekvivalens zajsáv szélességet tehát úgy számíthatjuk ki, hogy a karakterisztika négyzetét a relatív frekvencia szerint integráljuk a $[-0.5, +0.5]$ tartományon, és szorzunk N -nel. A Parseval-tétel értelmében az integrál megegyezik a súlyok négyzetösszegével. Egységnyi zajsáv szélességhez tehát a súlyok skálázása:

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_k^2 = \frac{1}{N} \quad (7.63)$$

Az ablakfüggvények relatív zajsáv szélessége megadja, hogy a 7.57 szerinti skálázás mellett a súlyok négyzetösszege hányszor nagyobb a a 7.63 szerinti skálázással kapott

súlyok négyzetösszegénél, vagyis $\frac{1}{N}$ -nél.:

$$B_{\text{rel}} = N \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{w_k}{\sum_{k=0}^{N-1} w_k^2} \right)^2 = N \frac{\sum_{k=0}^{N-1} w_k^2}{\left(\sum_{k=0}^{N-1} w_k \right)^2} \quad (7.64)$$

Sztochasztikus jelek teljesítménysűrűség-spektrumának becslése esetén is alkalmazható ablakozás (ld. Schnell, 24.8.3. fejezet). Ha a 7.57 szerinti skálázást alkalmaztuk a súlyokra, akkor az ablak relatív zajsávzsélességével le kell osztani az eredményt ahhoz, hogy helyesen skálázott spektrumot kapjunk. Természetesen egyszerűbb és egyenértékű megoldás, ha eleve a 7.63 szerinti skálázást alkalmazzuk.

A DFT ablakozással:

$$X_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k x(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} km} \quad (7.65)$$

Megjegyzés: Az ablakozás művelete egyenértékű módon elvégezhető a frekvenciatartományban is. Ekkor az időkorlátozás nélküli ablakfüggvény spektrumával kell cirkuláris konvolúciót végezni a négyszögletes időablakkal korlátozott jel spektrumán. Hanning ablak esetén, ez a megoldás bizonyos esetekben előnyösebb is, mint az időtartományban elvégezni a beszorzást. Ha ugyanis N kettő hatványa, akkor a Hanning ablak esetében a konvolúcióhoz nem kell szorozni, csak helyiértéket léptetni, és összegezni. (Más ablakfüggvényeknél az időtartománybeli kiértékelés előnyösebb, kivétel olyan jelfeldolgozási esetekben, ahol a jel eleve a frekvenciatartományban áll rendelkezésre.)

Megjegyzés: Tervezhető a fentiekől eltérő módon is ablakok, ha a periodikus leszívások elérése nem célkitűzés. A Kaiser ablak például a kívánt sávon kívül eső teljesítményt minimálja (közelítőleg).

8. fejezet

Modellillesztés

8.1. Bevezető

Az előző fejezetekben bemutatott eljárásokban felfedezhető volt *a jel modellje*:

- Az átlagolást állandónak feltételezett paraméter becslésére használjuk, és valóban felfedezhető benne az állandó érték egy modellje (5.12 ábra).
- A DFT-szűrő tartalmazza az N -re periodikus diszkrét harmonikus jelek modelljeit (vö. 5.15, 5.2 ábrákat).
- A megfigyelő elvet használó struktúrák a jelmodellből indulnak ki, és a modell és kópiája közötti hibát használják fel az állapotparaméterek lemásolásához. (5.14 és 5.16 ábrák).

A *modellillesztés* egyrészt az előbbieket *kiegészítő*, másrészt azokhoz *hasonló* feladat.

„Kiegészítő” abban az értelemben, hogy az előzőekben ismertnek feltételezett *modellparaméterek* (esetleg modellstruktúra) meghatározása a cél. Azt a modellillesztési feladatot, amikor a megfigyeléseinkre legjobban illeszkedő rendszert a topológiájával és fokszámaival megadott modellosztályon belül, a modellparaméterek változtatásával keressük, *paraméterbecslésnek* nevezzük.

Ugyanakkor a paraméterbecslés az állapotbecsléshez „hasonló” feladat is.

Az eljárásban itt is megvalósul egy modellkópia, és a rendszer ill. az illesztett modell kimeneteinek eltérését minimalizáljuk valamilyen hibakritérium szerint, hasonlóan, mint a megfigyelőnél; (ott a pontos modellkópia, és a zajmentes megfigyelés miatt a „nulla eltérés” volt a cél).

Egyes esetekben előfordulhat, hogy egyazon feladat megoldható úgy is, mint paraméterbecslés, és úgy is, mint állapotbecslés, hiszen ugyanazon mennyiség megméréséhez sokféle módon rendelhetünk modellt: az egyik esetben az ismeretlen mennyiség paramétere, a másik esetben állapotváltozója lehet a modellünknek. Ehhez megengedhetjük a modell paraméterek időbeli változását is.

A paraméterbecslés és az állapotbecslés közötti hasonlóságokat szemlélteti az alábbi példa, amelyben \mathbf{c} és $\mathbf{x}(n)$ szerepe felcserélődik a kétféle becslésben, de az ismeretlenekben továbbra is lineáris a feladat, és hasonló rekurzív összefüggések adódnak:

Mérendő modell	Modellkópia (megfigyelőelmélet)	Modellkópia (paraméterbecslés)
$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(n)$ $\mathbf{c} = \text{konst.}$ $y(n+1) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}(n)$	$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}(n) + \text{korrekció}$ \mathbf{c} ismert $\hat{y}(n+1) = \mathbf{c}^T \cdot \hat{\mathbf{x}}(n)$	$\mathbf{x}(n)$ ismert $\hat{\mathbf{c}}(n+1) = \hat{\mathbf{c}}(n) + \text{korrekció}$ $\hat{y}(n+1) = \hat{\mathbf{c}}^T(n) \cdot \mathbf{x}(n)$

Formailag hasonló, *predikciós-korrekciós* kifejezéseket kapunk a becslésre. A különbség az, hogy nem az állapotváltozók másolódnak, hanem a súlyparaméterek változnak, „hangolódnak”. Az \mathbf{A} mátrix helyébe pedig egységmátrix kerül, mivel a paraméterekről azt feltételezzük, hogy időben állandók.

A korrekció, melyet ebben az összehasonlításban nem részleteztünk, jelentősen különbözik a modellillesztés esetében amiatt, hogy *sztochasztikus megfigyelésekből* indulunk ki. (Megjegyzés a megfigyelőnél bemutatott modellstruktúra is kiegészíthető zajbemenettel: ld. Schnell, 4. fejezet: Kálmán-szűrő.)

A modellillesztési feladatok két nagy csoportját célszerű megkülönböztetni:

Identifikáció (meghatározás): Identifikáció esetén fix objektumot vizsgálunk, ezért többnyire stacionaritást feltételezhetünk; sok adat begyűjtésére van lehetőség. Gyakran a gerjesztést is mi határozhatjuk meg. Nagy pontosságú, de nem gyors válaszidejű eredmény a cél. Méréssel, azonosítással kapcsolatos feladatokra jellemző.

Adaptáció (követés): A követés valós idejű követelményt támaszt: tűnjön el gyorsan a hiba, az „együttmozgás” a fontos. A rendszerparaméterek pontos megfeleltethetősége a valóság és a modell között nem elsőrendű szempont, sőt sokszor a könnyebben kezelhető struktúrára és paraméterkészletre térés a cél (úgy, hogy a lényeges működési tartományban hasonlóan viselkedő modellt kapjunk.) Szabályozással, követéssel kapcsolatos feladatokra jellemző.

A jelen fejezetben bemutatott módszerek elvileg mind a kétféle feladatcsoporthoz alkalmazhatók. A módszerek alkalmazhatóságát egy adott feladatban többek között a felsorolt szempontok ill. körülmények függvényében ítélni lehet meg.

8.1.1. A fejezet tartalma

A regresszió-számítás és a modellillesztés feladatának alapstruktúrája megegyezik (8.1 ábra). Ezért először bemutatjuk egy egyszerű, lineáris regresszió kiszámítását. Ezután megmutatjuk, hogy általános modellillesztési problémák széles köre esetén, a modellstruktúra kettéválasztásával olyan paramétereket tudunk elkülöníteni (8.3 ábra, 8.17 és 8.18 egyenletek), amelyek becslésére lineáris regresszió írható fel. Ezt az általános paraméterbecslési problémát vizsgálva vezetjük a Wiener-Hopf egyenletet (8.23), amely

8. MODELLILLESZTÉS

négyzetes hibakritérium esetén az optimális paraméter-beállítást adja meg a megfigyelések statisztikai paramétereinek függvényében. (Ez utóbbiakat mérésrel tudjuk csak megbecsülni.)

A Wiener-Hopf egyenletből kiindulva gradiens-alapú, iteratív eljárásokat vezetünk le a paraméterváltoztatásra, amelyek különböző mélységű statisztikai ismereteket használnak fel, ill. ezeket – különböző módon – a megfigyelések alapján folyamatosan becsülik.

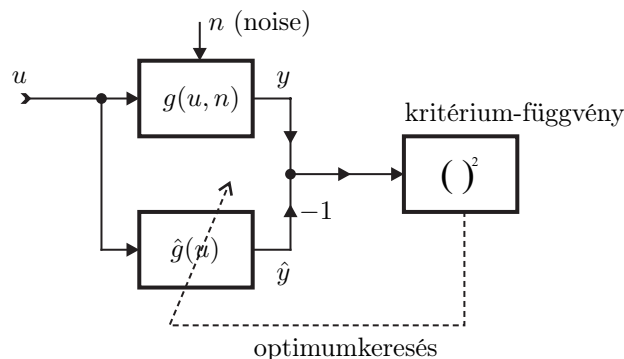
A lineáris regresszió esetében a hibafelület kvadratikusan, és a minimum elhelyezkedését adja meg a Wiener-Hopf egyenlet. Az iteratív eljárások konvergenciájának vizsgálatához a hibafelület elhelyezkedéséről és alakjáról kell pontosabb képet nyerni. Ehhez a regressziós vektor autokorrelációs mátrixának diagonál alakra transzformálását kell elvégezni, és a sajátvektorokkal párhuzamos koordinátairányok szerint kell felírni az iterációt.

Ha a lineáris regresszió feladatától eltérünk, a hibafelület nem marad kvadratikusan. Ekkor a hibafelület véges Taylor-sorfejtésével a korábbi eredmények kiterjeszthetők ugyan, tehát az iteratív eljárások továbbra is alkalmazhatók, de a közelítést figyelembe kell venni az iterációs paraméterek megválasztásánál, és a konvergencia teljesülése nem vizsgálható egyszerűen.

Ezt a kiterjesztést felhasználva bemutatunk adaptív végtelen impulzusválaszú rendszereket. Az első alapeset (ún. „Equation Error” módszer) lineáris regresszióra vezet vissza a feladatot, a második (ún. „Output Error” módszer) pszeudo-lineáris regresszió megoldását keresi.

8.2. Regresszió-számítás

A regresszió-számítás feladata függő és független változók közötti közvetlen determinisztikus kapcsolat meghatározása. Ez a modellillesztésnek egy speciális esete (8.1 ábra).



8.1. ábra. A regresszió-számítás, mint a modellillesztés egy speciális esete.

A zaj miatt az y függő és u független változó közötti kapcsolat a keresett determinisztikus összefüggés mellett sztochasztikus komponenst is tartalmaz.

Az illesztendő modell, $\hat{y} = \hat{g}(u)$ (determinisztikus függvénykapcsolat), nem ugyanúgy van beágyazva a környezetbe, mint az eredeti rendszer, $y = g(u, n)$, hanem pl. számítógépen futó szimuláció, vagy műszer belsejében található áramkör, ezért nem reprodukálható a zaj hatása. Ebből adódóan csak közelítőleg megegyező kimenetet szolgáltató rendszer adható meg.

Approximáció esetén meg kell határozni, hogy mi számít optimálisnak. Ez szubjektív döntés eredménye, amit pragmatikus szempontok befolyásolnak.

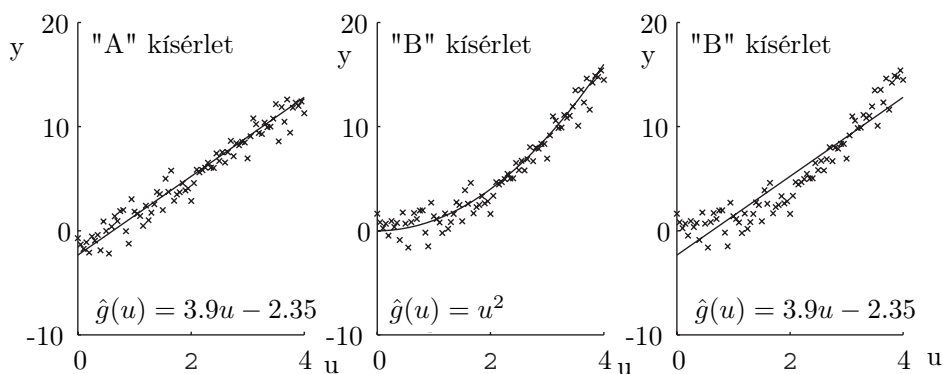
A továbbiakban a minimalizálandó költségfüggvény, vagy hibakritérium, legyen:

$$\varepsilon = E \left\{ (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \right\} \quad (8.1)$$

A négyzetes kritériumfüggvény előnyös tulajdonságokkal rendelkezik: egyrészt alkalmazásával az optimumfeladat megoldása matematikai szempontból többnyire kedvező, másrészt a négyzetes hibának a hibateljesítmény vagy hibaenergia révén fizikai értelmezés is adható.

Az illesztés tipikusan szabad paraméterek beállítását jelenti (u, y) párok segítségével. Általában sok méréshez (u, y) párok kevés paramétert rendelünk (\hat{g} -t állítják), így a zaj hatása nagyrészt kiküszöbölhető (8.2 ábra).

Az $[u, \hat{g}(u)]$ görbe az y változó u -ra vonatkoztatott *regressziós görbéje*; ha u vektor, akkor $[u, \hat{g}(u)]$ *regressziós felület*. u a regressziós változó. (ld. Schnell, 5.4. fejezet; Prékopa).



8.2. ábra. „A” kísérlet: lineáris karakterisztika + Gauss zaj, „B” kísérlet: négyzetes karakterisztika + Gauss zaj, a) az „A” pontthalmazra illeszthető modell teljesen specifikált jellemzők vagy lineáris regresszió esetén, b) a „B” pontthalmazra illeszthető modell teljesen specifikált esetben c) a „B” pontthalmazra lineáris regresszióval illeszthető modell (A regressziós egyenes éppen elfedi az „A” ill. a „B” kísérlet közötti különbséget).

8.2.1. Regresszió-számítás teljesen specifikált statisztikai jellemzőkkel

Teljesen specifikált statisztikai jellemzőkről akkor beszélhetünk, ha ismerjük u és y együttes valószínűség sűrűségfüggvényét: $f_{u,y}(u, y)$, vagy azzal ekvivalens leírását, minden időpillanatra.

A regresszió-számítással kapott $\hat{g}(u)$ -nak olyannak kell lennie, hogy

$$\varepsilon = E \{(y - \hat{y})^2\} \quad (8.2)$$

átlagos, négyzetes hiba minimális legyen. Ez az ún. Bayes becslési probléma:

$$\hat{g}(u) = E \{y|u\} \quad (8.3)$$

8.2.2. Regresszió-számítás részben specifikált statisztikai jellemzőkkel

Gyakoribb eset, hogy nem ismerjük az együttes eloszlást, csak véges számú momentumát, így részben specifikált statisztikai jellemzők mellett kell regresszió-számítást végezni.

A modellel szemben támasztott fontos gyakorlati szempontok:

Számíthatóság: Az alkalmazott eljárás a válaszdő követelmények betartása mellett konvergáljon.

Statisztikai jellemzők ismerete: A paraméterillesztés ne igényelje olyan statisztikai jellemzők ismeretét, amelyek nem becsülhetők meg megfelelő pontossággal a megfigyelésekből (Pl. 2-od fokúnál magasabb rendű momentumok ne szerepeljenek az eljárásban.)

Lineáris regresszió:

Legyen a determinisztikus függvénykapcsolat egy lineáris egyenlet, melynek b_i paraméterei az ismeretlenek:

$$\hat{g}(u) = b_0 + b_1 u \quad (8.4)$$

Ezen a függvényhalmazon belül keressük az optimális modellt. (A 8.2 ábra szerint ez megegyezhet az általában vett optimális megoldással – a) eset –, de általában csak szuboptimális megoldást jelent – c) eset.)

Minimalizálandó:

$$\varepsilon = E \{(y - \hat{g}(u))^2\} = E \{(y - b_0 - b_1 u)^2\} \implies \min_{b_0, b_1} . \quad (8.5)$$

Mivel a hibafelület – a hibának a paramétersík feletti függvénye – kvadratikus, ezért pontosan egy minimumhelye van, ahol viszont a függvény értéke nem feltétlen nulla. A minimumot tehát differenciálással kereshetjük:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_i} = -2E \left\{ (y - \hat{g}) \frac{\partial \hat{g}}{\partial b_i} \right\} = 0 \quad (8.6)$$

Először a b_0 szerinti parciális deriváltra írjuk fel a nulla-feltételt (a várhatóérték képzés és az összegzés sorrendjét felcserélve):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_0} = -2(E \{y\} - b_0 - b_1 E \{u\}) = 0 \quad (8.7)$$

Ez egy kétismeretlenes (b_0, b_1) , lineáris egyenlet, amelyet átrendezünk, és $E\{u\}$ -vel szorzunk, hogy $b_0 E\{u\}$ majd később kiejthető legyen.

$$E\{y\} = b_0 + b_1 E\{u\} \quad | \cdot E\{u\} \quad (8.8)$$

$$E\{u\} E\{y\} = b_0 E\{u\} + b_1 E^2\{u\} \quad (8.9)$$

Ezután a másik paraméter, b_1 szerinti parciális deriváltra is felírjuk a feltételt:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_1} = -2 (E\{uy\} - b_0 E\{u\} - b_1 E\{u^2\}) = 0 \quad (8.10)$$

Ebből is egy kétismeretlenes, lineáris egyenletet adódik (8.11), amelyből az előzőleg kapott 8.9 egyenletet kivonva, a b_0 ismeretlent kiküszöböljük:

$$E\{uy\} = b_0 E\{u\} + b_1 E\{u^2\} \quad (8.11)$$

$$E\{uy\} - E\{u\} E\{y\} = b_1 (E\{u^2\} - E^2\{u\}) \quad (8.12)$$

Ebből b_1 közvetlenül adódik, b_0 pedig kifejezhető elvégezve b_1 behelyettesítését a 8.8 egyenletben:

$$b_1 = \frac{E\{uy\} - E\{u\} E\{y\}}{E\{u^2\} - E^2\{u\}} \quad (8.13)$$

$$b_0 = E\{y\} - b_1 E\{u\} = \frac{E\{y\} E\{u^2\} - E\{u\} E\{uy\}}{E\{u^2\} - E^2\{u\}} \quad (8.14)$$

A lineáris regresszió két lényeges előnye:

1. A b_0 és b_1 ismeretlenekben lineáris a modell, így explicit megoldás adható.
2. Az u -ban elsőfokú egyenlet és a négyzetes hibakritérium miatt csak első- és másodrendű momentumok szükségesek a becsléshez.

Ez utóbbi azért lényeges kérdés, mert a momentumok becslése véges számú adat alapján csak véges pontossággal történhet. Jóllehet, elvileg a bemenetet meghatározott statisztikai jellemzőkkel tudjuk gerjeszteni, (ilyen esetben ezek eleve ismertek), a kimenetet is tartalmazó momentumok a modellezendő rendszertől is függenek, így azokat csak mérésrel tudjuk megbecsülni. Minél magasabb rendű momentumot próbálunk becslőni, annál több adatra van szükség, vagy nagyon bizonytalan lesz a momentum becslője.

Általánosabb modellek:

N -ed fokú polinomiális regresszió:

$$\hat{g}(u) = \sum_{i=0}^N b_i u^i \quad (8.15)$$

Előnye: paramétereiben lineáris modell. (A bemenetre nézve nemlineáris). Hátránya: a momentumok $2N$ -ed rendig kelljenek.

Több kimenetű/bemenetű modell

A lineáris regresszió általánosítható több bemenetű, esetleg több kimenetű rendszerre is.

Paramétereiben nemlineáris modell

A paraméterekben nemlineáris összefüggés is használható matematikai modellként. Ekkor két szélső választás lehetséges: vagy lineáris regresszióvá alakítjuk változócserevel a feladatot (ld. Horváth, 4.1. fejezet), vagy nemlineáris regressziót kell végeznünk.

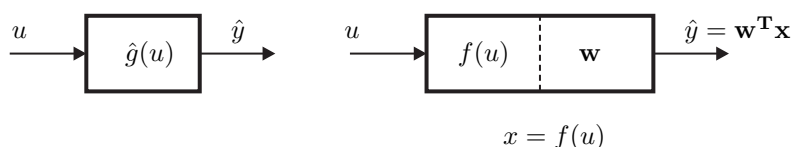
8.3. Adaptív lineáris kombinátor

A modellillesztés feladatát ugyanaz az ábra (8.1) írja le, mint a regresszióét. Az illesztendő modell:

$$\hat{y} = \hat{g}(u) = \hat{g}(\mathbf{w}, u), \quad (8.16)$$

ahol u a bemenőjel, $\mathbf{w}^T = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]$ az állítható paramétereiből összeállított vektor. A $\hat{g}(\mathbf{w}, u)$ jelölés azt fejezi ki, hogy a modell a \mathbf{w} súlyvektoron keresztül változtatható, adaptálható.

Az adott problémában felvetődő modellt úgy hozzuk létre, hogy a modell dinamikus és/vagy nemlineáris tulajdonságú részeit rögzítjük ($f(u)$), és különválasztjuk a modell adaptálható részétől (8.3 ábra). Az adaptálható rész paramétereinek (\mathbf{w}) becslése egy lineáris regressziós feladat.



8.3. ábra. Adaptív lineáris kombinátor

A modell rögzített része a bemenőjelből előállítja az \mathbf{x} regressziós vektort (elemei a regressziós változók), amely a hálózat adaptálható részének bemenete:

$$\mathbf{x} = f(u) \quad (8.17)$$

$$\hat{y}(n) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) = \sum_{i=1}^{M-1} w_i(n)x_i(n) \quad (8.18)$$

ahol M a regressziós vektor hossza. Ez a skalár szorzat több kimenet esetén (y_j) általános mátrix-vektor szorzattá bővül: $\hat{\mathbf{y}}(n) = \mathbf{W}^T(n)\mathbf{x}(n)$. Több bemenet esetén $\mathbf{x} = f(\mathbf{u})$.

Az adaptív lineáris kombinátor két meghatározó tulajdonsága:

1. az adaptálható rész paramétereiben lineáris,
2. a paraméterváltoztatás véges memóriájú hatással jár.

(Megjegyzés: A lineáris regresszió előzőleg tárgyalt egyszerű esete az adaptív lineáris kombinátor egy eseteként is felírható, ahol $\mathbf{x}^T = [1 \ u]$, $\mathbf{w}^T = [b_0 \ b_1]$.)

A korábbi regressziós példához hasonlóan itt is az átlagos négyzetes hibát (a hiba négyzetének várható értékét) minimalizáljuk:

$$\varepsilon(n) = E \left\{ (y(n) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(n))^2 \right\} = \quad (8.19)$$

$$= E \{ y^2(n) \} - 2 \underbrace{E \{ y(n) \mathbf{x}^T(n) \}}_{\mathbf{p}^T} \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \underbrace{E \{ \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \}}_{\mathbf{R}} \mathbf{w} \quad (8.20)$$

$$= E \{ y^2(n) \} - 2 \mathbf{p}^T \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w}, \quad (8.21)$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T &= E \{ y(n) \mathbf{x}^T(n) \} \\ \mathbf{R} &= E \{ \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \} \end{aligned}$$

a kimenet és a regressziós vektor közti keresztkorrelációs vektor, illetve a regressziós vektor autokorrelációs mátrixa. Az autokorrelációs mátrix főátlójában a vektor egyes elemeinek négyzetes várhatóértéke áll, többi eleme pedig a sor- és oszlopindexnek megfelelő regressziós változók közötti keresztkorrelációt adja meg. Feltételezzük a rendszer bemenetének és kimenetének másodrendű stacionaritását, ezért \mathbf{R} és \mathbf{p} független n -től.

Az átlagos, négyzetes hiba kifejezésében a \mathbf{w} vektor mögül elhagytuk az időindexet, mivel egyelőre nem adaptáljuk a súlyokat, hanem az optimális, fix beállításra keresünk kifejezést. A minimumot differenciálással keressük:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{w}} = -2 \mathbf{p} + 2 \mathbf{R} \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (8.22)$$

Ennek megoldása:

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} \quad (8.23)$$

Ez a Wiener-Hopf egyenlet, amely zárt alakban megadja az egyetlen optimum helyét. Érdekes összefoglalni, hogy milyen feltételek vezettek erre az eredményre: A *(i)* paramétereiben lineáris modell, *(ii)* az átlagos négyzetes hibakritérium, valamint *(iii)* a másodfokú momentumok stacionaritása, együtt kvadratikus (\mathbf{w} -ben másodfokú) hibafelülethez vezettek, amelynek gradiense \mathbf{w} lineáris függvénye. Így az optimális paraméter-beállításra, amelyet a gradiens $\nabla(n) = 0$ feltétele egyértelműen megad, a Wiener-Hopf egyenlet adódott.

Visszahelyettesítve 8.23-et 8.21-be:

$$\varepsilon_{\min} = E \{ y^2(n) \} - \mathbf{p}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} = E \{ y^2(n) \} - \mathbf{p}^T \mathbf{w}_{\text{opt}}. \quad (8.24)$$

Ehhez felhasználtuk az alábbi két algebrai azonosságot, és az \mathbf{R} mátrix szimmetriáját:

1. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$,

8. MODELLILLESZTÉS

2. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, ahol \mathbf{I} az egységmátrix

3. $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$, így $\mathbf{R}^{-T} = \mathbf{R}^{-1}$

A hiba kifejezésében (8.21) elkülönítve ε_{\min} -t, mint konstans eltolási értéket:

$$\varepsilon(n) = \varepsilon_{\min} + [\mathbf{w}_{\text{opt}} - \mathbf{w}(n)]^T \mathbf{R} [\mathbf{w}_{\text{opt}} - \mathbf{w}(n)]. \quad (8.25)$$

Ha a paramétertér origóját az optimumba toljuk el, vagyis az optimumhoz képest „tájékozódunk”, akkor az új koordinátavektor:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}} \quad (8.26)$$

nem más, mint a paraméterhiba. A paraméterhiba függvényében a kimenet átlagos, négyzetes hibája:

$$\varepsilon(\mathbf{v}) = \varepsilon_{\min} + \mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v} \quad (8.27)$$

A hibafelület tehát a paramétersíktól vett ε_{\min} eltolású (hiper)paraboloid, amelynek formáját az \mathbf{R} mátrix határozza meg.

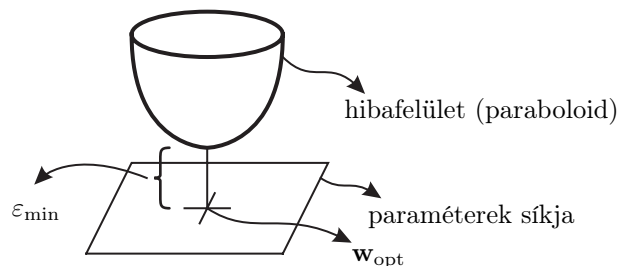
Mivel \mathbf{R} a regressziós vektor autokorrelációs mátrixa, ezért 8.27 és 8.28 alapján egyértelmű, hogy a kvadratikus hibafelület alakja, és főtengelyeinek elhelyezkedése, csak a bemenet mintáitól függ. A modellezett rendszertől csak a hibafelület origótól való eltolása (\mathbf{w}_{opt} és ε_{\min} , azaz a minimumhely és a minimum értéke) függenek.

A gradiens vektor:

$$\begin{aligned} \nabla &= 2(\mathbf{R}\mathbf{w}(n) - \mathbf{p}) \\ &= \frac{\partial \varepsilon(n)}{\partial \mathbf{w}(n)}(n) = 2\mathbf{R}[\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}}] \\ &= 2\mathbf{R}\mathbf{v}(n) \end{aligned} \quad (8.28)$$

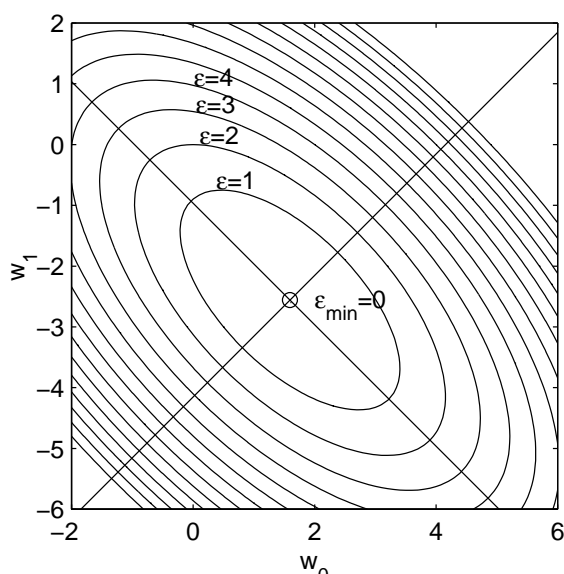
A három kifejezés közvetlenül adódik a hiba megfelelő kifejezéseinek (8.21,8.25,8.27) differenciálásával.

A 8.4 ábra kétdimenziós paramétervektor esetén mutatja a hiba-paraboloidot.

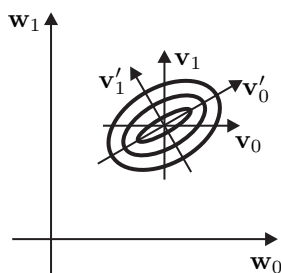


8.4. ábra. A hibafelület a paramétervektorok által kifeszített sík felett

A hibaparaboloid alapsíkkal párhuzamos metszetei ellipszisek (8.5 ábra), amelyek az elmetszés magasságának megfelelő hibát eredményező paraméter-beállítások mér-tani helyét adják meg. Különböző magasságokban elmetszve a paraboloidot, több ilyen



8.5. ábra. Izokritérium görbék: a hibafelület metszeteinek vetülete. Főtengelyek.



8.6. ábra. Koordináták eltolása és forgatása

ellipszist kapunk, amelyeket a paramétersíkra vetítve egy a hiba értékével paraméterezett görbesereg adódik. A görbesereget alkotó koncentrikus ellipszisek főtengelyei egybeesnek, de a sík koordinátatengelyeihez képest általános helyzetben helyezkednek el. A főtengelyirányok kitüntetett szerepét az adja, hogy ezekben az irányokban a hiba-paraboloidon fekvő bármely pontban a negatív gradiens mindig az optimum felé mutat. Így ezen pontokból kiindulva a gradiensek mentén megfelelően nagyot lépve az optimumba érkezhetünk, vagy afelé „ereszkedhetünk”.

8.3.1 Példa. Legyen

$$\mathbf{x}^T(n) = [x_0(n) \ x_1(n)] = \left[\sin \frac{2\pi}{N}n \quad \sin \frac{2\pi}{N}(n-1) \right] \quad (8.29)$$

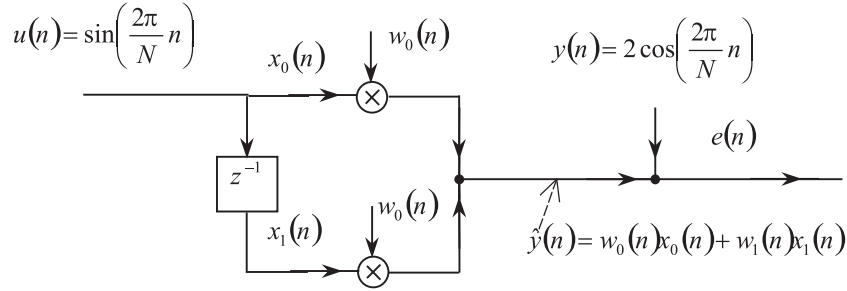
$$y(n) = 2 \cos \frac{2\pi}{N}n \quad (8.30)$$

$$\mathbf{w}^T(n) = [w_0(n) \ w_1(n)] \quad (8.31)$$

$$\hat{y}(n) = w_0(n)x_0(n) + w_1(n)x_1(n) \quad (8.32)$$

8. MODELLILLESZTÉS

Megjegyzés: A feladat megfogalmazható úgy is, hogy csak a bemenőjel adott, pl. $u(n) = \sin \frac{2\pi}{N}n$, és akkor a modell fix részére is (8.3 ábra) ötletet kell találni: egy késleltető elemre vezetve az $u(n)$ jelet éppen a $\mathbf{x}^T(n)$ állítható elő (8.7 ábra). A rendszer, amit modellezünk, egy 90 fokos fázistolást végez a szinuszon.



8.7. ábra. A példában szereplő adaptív lineáris kombinátor.

A várhatóértéket az egész számú periódusra vett átlagértékként számítjuk. (Ez egyenértékű azzal, mintha véletlen kezdőfázis szerepelne az argumentumban, és erre nézve képeznénk a várhatóértéket). Felhasználva, hogy $\sin^2 \alpha = 0.5(1 - \cos 2\alpha)$, illetve $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$:

$$E \{x_0^2\} = E \left\{ \sin^2 \left(\frac{2\pi}{N}n \right) \right\} = 0.5 \cdot E \left\{ 1 - \cos \left(2 \frac{2\pi}{N}n \right) \right\} = 0.5, \quad (8.33)$$

illetve

$$E \{x_0 x_1\} = E \{x_1 x_0\} = E \left\{ \sin \left(\frac{2\pi}{N}n \right) \sin \left(\frac{2\pi}{N}(n+1) \right) \right\} = \quad (8.34)$$

$$= 0.5 E \left\{ \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) - \cos \left(\frac{2\pi}{N}(2n+1) \right) \right\} = 0.5 \cos \left(\frac{2\pi}{N} \right). \quad (8.35)$$

Ezzel

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \cos \frac{2\pi}{N} \\ 0.5 \cos \frac{2\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix}, \quad (8.36)$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{4}{\sin^2 \frac{2\pi}{N}} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \cos \frac{2\pi}{N} \\ -0.5 \cos \frac{2\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (8.37)$$

Mivel

$$E \left\{ 2 \cos \left(\frac{2\pi}{N}n \right) \sin \left(\frac{2\pi}{N}n \right) \right\} = E \left\{ \sin \left(2 \frac{2\pi}{N}n \right) \right\} = 0, \quad (8.38)$$

ezért

$$\mathbf{p} = \left[0, -\sin \frac{2\pi}{N} \right], \quad (8.39)$$

és

$$E \{y^2(n)\} = 2. \quad (8.40)$$

Az átlagos, négyzetes hiba és az optimális paraméter-beállítás:

$$\varepsilon(n) = \underbrace{0.5 (w_0^2(n) + w_1^2(n))}_{\mathbf{w}^T(n)\mathbf{R}\mathbf{w}(n)} + \underbrace{w_0(n)w_1(n) \cdot \cos \frac{2\pi}{N} + 2w_1(n) \sin \frac{2\pi}{N}}_{-2\mathbf{p}^T\mathbf{w}(n)} + \underbrace{2}_{+E\{y^2(n)\}}, \quad (8.41)$$

$$\mathbf{w}_{\text{opt}}^T = \left[\frac{2}{\tan \frac{2\pi}{N}} \quad -\frac{2}{\sin \frac{2\pi}{N}} \right]. \quad (8.42)$$

Megjegyzés: w_{opt} mellett $\varepsilon_{\text{min}} = 0$. Vagyis egy koszinusz mintái a megfelelő szinusz egymást követő mintáiból egyszerű súlyozott összegzéssel előállíthatók.

Megjegyzés: $1/N$ éppen azt adja meg, hogy milyen gyorsan változik a jel. Ha nagyon sűrűn mintavételezzük a jelet, akkor két egymást követő mintából numerikus problémák miatt nem tudjuk előállítani a koszinuszt, ezért a gyakorlatban nem így állítjuk elő a fázistolást. ■

A 8.5 és a későbbi ábrákon a fenti példával végzett szimulációk eredménye szerepel.

8.4. Iteratív modellillesztés

Az előzőekben adaptív struktúrákat mutattunk be, és kimutattuk, hogy paramétereiben lineáris modell és négyzetes hibakritérium mellett (feltételezve a másodrendű stacionaritást) a modellparaméterek optimális megválasztása egy kvadratikus hibafelületre megfogalmazott szélsőérték-keresési feladat. A hibafelület teljes ismerete mellett az optimum helyét explicit módon megadja a Wiener-Hopf egyenlet, és a paraméterbeállítás egyetlen lépésben megtehető. A továbbiakban olyan szélsőérték-kereső eljárásokat mutatunk, amelyek képesek a hibafelület részleges ismerete mellett, több lépésben, iteratív módon elvezetni a minimumhoz.

Melyek azok a részleges ismeretek, amelyek a gyakorlatban rendelkezésre állhatnak?

A regressziós vektor (\mathbf{x}) és a kimenet (y) korrelációja előre semmiképpen sem ismert, hiszen y a mérendő objektumtól függ, ezért \mathbf{p} , és így közvetetten a gradiens is, legfeljebb mérésből becsülhető meg az adott időpontig befolyt megfigyelések alapján.

Az adott paraméter-beállítás melletti gradiens például numerikus differenciálással számítható. Ehhez különböző irányokban kis mértékben módosítani kell a paraméterbeállítást, és rögzített paraméterek mellett megfelelő számú megfigyelést kell összegyűjteni. Az átlagos, négyzetes hibát mindegyik paraméter-beállításra meg kell ezekből becsülni, majd az egyes koordinátaírányok szerinti (közelítő) meredekségeket ki kell számítani.

Más lehet a helyzet a regressziós vektor autokorrelációs mátrixával, \mathbf{R} -rel, mivel az nem függ a mérendő rendszertől. Mivel a regressziós vektort a bemenetből állítjuk elő (8.17), ezért ha a bemenet (u) egy általunk megválasztott gerjesztés, amelyből ki tudjuk számítani \mathbf{R} -et, akkor az elvileg teljes mértékben ismert, sőt, általunk megválasztható. Ebben az esetben olyan optimalizációs algoritmust alkalmazunk, amely felhasználja \mathbf{R} ismeretét (lásd majd: Newton módszer).

Előfordulhat azonban, hogy a rendszer gerjesztése mérhető ugyan, de tőlünk független tényezők közreműködésével születik. Ebben az esetben hasonló a helyzet \mathbf{R} -rel mint \mathbf{p} -vel ill. a gradienssel: legfeljebb a megfigyeléseinkből becsülhető. Jelentős lehet az eltérés azonban abban, hogy mennyire pontosan tudjuk egyiket vagy másikat mérni, ill. becsülni. Ezek és egyéb gyakorlati körülmények (számítási teljesítmény, a paraméterek viszonylagos állandósága ill. változékonysága) függvényében más és más iterációs algoritmus javasolható.

Megjegyzés: Mivel az átlagos, négyzetes hiba, illetve a gradiens az iteráció módjától függetlenül többféle módon is becsülhető, viszont többnyire jó közelítése a valódi értéknek, ezért a becslés tényét nem jelöljük („ $\hat{\cdot}$ ”), hanem úgy tekintjük, mintha egy másik algoritmustól készen kapnánk a valódi értéket. (Szimuláció esetén természetesen a valódi értéket használjuk.) Azokban az esetekben azonban (ld. LMS algoritmus), amelyekben a becslés valamely pillanatnyi érték elfogadását jelenti, vagyis természeténél fogva pontatlan, és az algoritmus részét képezi, ott a becslő jelölést használjuk („ $\hat{\cdot}$ ”).

8.4.1. Newton módszer

A hibagradiens 8.28 szerinti kifejezését $\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}$ -zel balról szorozva, és felhasználva a Wiener-Hopf egyenletet adódik, hogy:

$$\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\nabla(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}} \quad (8.43)$$

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{w}(n) - \frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\nabla(n) \quad (8.44)$$

Mivel $\nabla(n)$ nem pontos (esetleg \mathbf{R}^{-1} sem az), ezért iterációvá alakítjuk a fenti kifejezést:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu\mathbf{R}^{-1}\nabla(n) \quad (8.45)$$

$\frac{1}{2}$ helyébe a μ lépésköz-paraméter („bátorsági” tényező) lép. Ezt nevezik *Newton módszernek*. A paraméterhiba alakulása \mathbf{w}_{opt} kivonásával írható fel:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}_{\text{opt}} &= \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}} - \mu\mathbf{R}^{-1} \underbrace{\nabla(n)}_{2\mathbf{R}[\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}}]} = \\ &= (1 - 2\mu)[\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}}] \end{aligned}$$

Azaz,

$$\mathbf{v}(n+1) = (1 - 2\mu)\mathbf{v}(n) = (1 - 2\mu)^{n+1}\mathbf{v}(0) \quad (8.46)$$

Ebből is látható, hogy $\mu = \frac{1}{2}$ választással elvben egy lépéses konvergencia érhető el, (ha \mathbf{R}^{-1} és $\nabla(n)$ pontos). Az eljárás konvergens, ha $0 < \mu < 1$. Ekkor a paraméterhiba minden főtengetyirányban egyformán, $(1 - 2\mu)$ arányban csökken lépésenként (8.8 ábra).

8.4.2. A legmeredekebb lejtő módszere

Ennél a módszernél a korrekció a legmeredekebb lejtő irányában, a negatív gradiens mentén történik:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}(n) - \mu\nabla(n) \quad (8.47)$$

\mathbf{R} és \mathbf{p} nem szerepel a képletben; tulajdonképpen nem használjuk ki, hogy kvadrátikus a hibafelület, csupán azt, hogy egyetlen lokális minimuma van, (azaz egyetlen pontban 0 a gradiens). Ebből következően, ha minden újabb pontból a negatív gradiens mentén mozdulunk, akkor egyre lejjebb kerülve, végül a minimum környezetébe érkezünk. (Az, hogy mennyire közelítjük meg a minimumot, μ megválasztásától függ.)

Úgy is tekinthetjük az eljárást, mintha a Newton módszert (8.45) alkalmaznánk, de a hibafelület pontos ismeretének hiányában $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$ választással kellene élnünk, ahol \mathbf{I} az egységmátrix. Ez azt jelenti, hogy nincsenek kitüntetett irányaink, a metszék ellipsziseket köröknek feltételezzük; miközben a hibaparaboloid, amin mozgunk nem ilyen, így ez az eljárás kevésbé hatékony, mint a Newton módszer (\mathbf{R} ismeretében). Ha valóban $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, akkor a két eljárás egyenértékű: ekkor mindegyik paramétervektorra egyformán érzékeny a hiba (ld. 8.49 egyenlet.).

8. MODELLILLESZTÉS

A Newton módszerhez képest a számítás egyszerűsödik, mert a $\mu\mathbf{R}$ mátrixszal való szorzás helyett skalárral szorozzuk a gradienst (vö. 8.45 és 8.47 egyenlet).

Megjegyzés: Talán meglepően hangzik, hogy a gradiens menti (tehát legmeredekebb) ereszkedés nem eredményezi a legrövidebb utat a minimumba, jóllehet minden pillanatban a legnagyobb ereszkedést biztosító irányba mozdul. Két tényező magyarázza, hogy az eljárás nem „optimális”:

1. Tegyük fel, hogy folytonosan ereszkedünk. Igaz ugyan, hogy minden pillanatban a pillanatnyilag legnagyobb ereszkedést biztosító irányba lépünk, de ha ismer-nénk a hibafelület alakját, akkor „látnánk” merre van a minimum, és a hibafelület mentén abba az irányba mozognánk, még ha adott pillanatban, adott ponton az nem is biztosítja a maximális ereszkedést. A hibafelület globális ismerete tehát azt jelentené, hogy olyan irányba mozdulhatnánk, amely a *teljes* útvonalat tekintve a leggyorsabb ereszkedést biztosítja. A Newton módszer pontosan ezt teszi, feltéve, hogy \mathbf{R} pontosan ismert.
2. Ha a hibafelületet nem ismerjük, akkor sem biztos, hogy a legmeredekebb lejtő módszere optimális. Az ereszkedés ugyanis nem folytonos, mint előbb feltételeztük, hanem diszkrét lépésekben történik. Azaz, jóllehet, az ellépés pillanatában még a negatív gradiens irányba mozdulunk, de ahova érkezünk, ott már más irányba, esetleg éppen ellentétes irányba mutat a gradiens. Az ereszkedés, ezért oszcillációkon keresztül valósul meg. Ez ellen úgy védekezhetünk, ha a negatív gradiens mentén törekszünk ugyan lépni, de ismerve az előző lépéseket elkerüljük az oszcillációt. Pl. A konjugált irányok módszere N -dimenziós kvadratikus felületen elvileg N lépésben eléri a minimumot, amihez lépésenként az adott pontbeli gradiens mellett az előző lépés irányát is felhasználja. (Ld. [Horváth] 3. fejezet; [Rózsa])

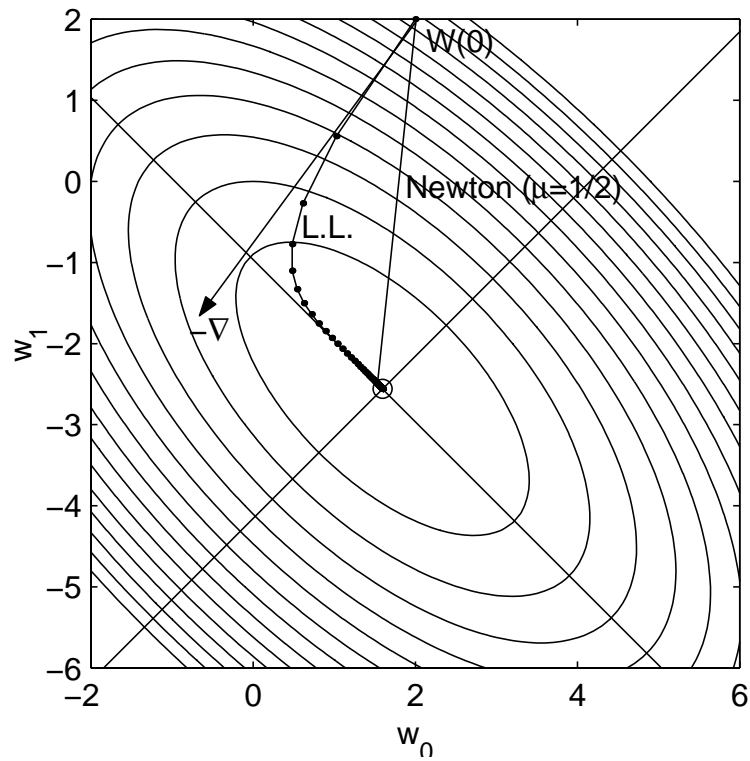
A paraméter-hiba alakulása:

$$\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}} - \mu\nabla(n) = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}][\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}}] \quad (8.48)$$

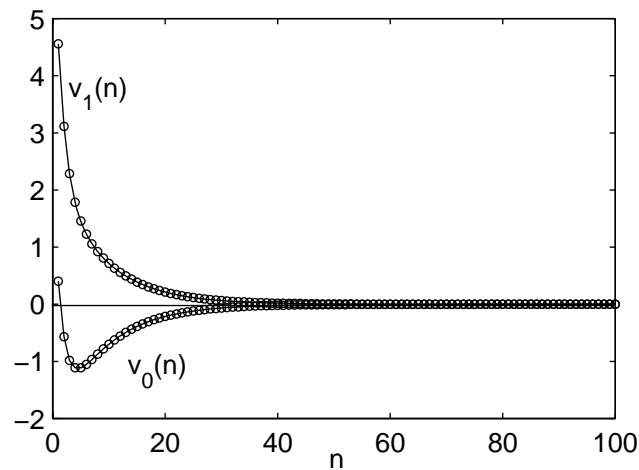
$$\mathbf{v}(n+1) = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}]\mathbf{v}(n) = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}]^{n+1}\mathbf{v}(0) \quad (8.49)$$

A fenti egyenletekben a $(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})$ tényező mutatja, hogy az egyes paraméterek nem egymástól függetlenül javulnak, hanem keresztcsatolásban, vagyis az egyik paraméter módosítása kihat a következő lépésben a többi módosítására. Ennek eredményeképpen a paraméterhiba egyes elemei egymáshoz képest nem egyforma, és időben nem egyenletes arányban csökkennek az adaptáció során, egyes lépésekben egy-egy paraméter hibája nőhet is (ld. 8.9 ábra). E közben a négyzetes hiba monoton csökken (ld. 8.10 ábra).

A 8.49 kifejezés alapján a konvergencia nehezen vizsgálható. Milyen választással biztosítható az eljárás konvergenciája? Hogyan javíthatók a körülmények a konvergencia gyorsításához? Ezek a kérdések az \mathbf{R} mátrix sajátértékeinek ismeretében válaszolhatók meg, a következő szakaszban ezt vizsgáljuk meg.



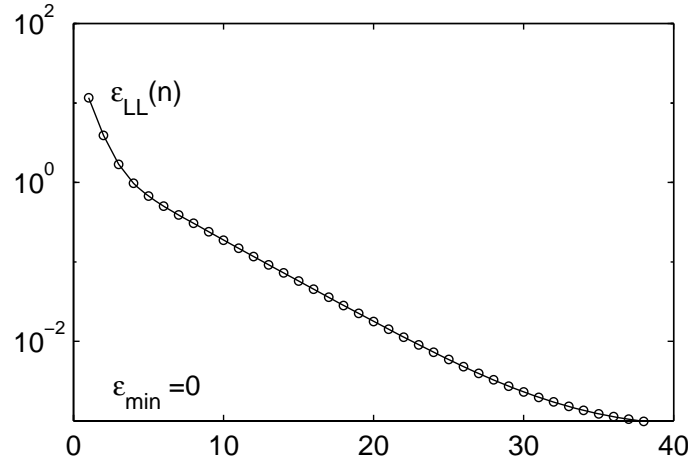
8.8. ábra. Kezdeti gradiens, és paraméteradaptáció illusztrálása két súly esetén; legmeredekebb lejtő (L.L.), ill. Newton módszerrel



8.9. ábra. A relatív paraméterhiba alakulása L.L. módszer esetén. Amíg w_1 hibája dominál, addig w_0 kárára javul.

8.4.3. Az \mathbf{R} mátrix diagonalizálása; a szélsőérték-keresés konvergenciájának vizsgálata

A következőkben az \mathbf{R} mátrixot diagonál-alakra transzformáljuk. Mivel \mathbf{R} szimmetrikus, ezért ez biztosan megtehető. Az egyszerűbb tárgyalás kedvéért azt is feltételezzük,



8.10. ábra. A kimenet átlagos, négyzetes hibája, $\varepsilon(n)$, exponenciálisan csökken, előbb λ_1 , majd λ_0 , sajátértékek által meghatározott időállandó szerint.

hogyan a mátrix sajátértékei egyszeresek (!).

Keressük azokat a \mathbf{q}_m , $m = 0, 1, \dots, N - 1$ (nem nulla) vektorokat, amelyekkel

$$(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{q}_m = \mathbf{0}. \quad (8.50)$$

(Ennek a λ -val paraméterezett homogén egyenletrendszernek akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az együttthatómátrix rangja alacsonyabb a mátrix rendjénél: $\text{rang}(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}) < N$. Vagyis olyan λ paraméter szükséges, amellyel a mátrix determinánsa 0.) Elsőként tehát meghatározzuk a

$$\det[\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}] = 0. \quad (8.51)$$

karakterisztikus egyenlet gyökeit. Ezek az \mathbf{R} mátrix $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}$ sajátértékei (mint kikötöttük egymástól különbözőek), amelyekkel egyenként elvégezve a visszahelyettesítést 8.50-be, $\text{rang}(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}) = N - 1$ lesz, és skálázástól eltekintve (hiszen 8.50 bármely értékkel beszorozható) rendre meghatározhatók a \mathbf{q}_m vektorok, \mathbf{R} sajátvektorai. Ezekre teljesül:

$$\mathbf{R}\mathbf{q}_m = \lambda_m \mathbf{q}_m \quad m = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (8.52)$$

A sajátvektorok normáját egyre választjuk, (így már egyértelmű a megoldás).

Az N összefüggést mátrixalakban megadva:

$$\mathbf{R} \underbrace{[\mathbf{q}_0 \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_{N-1}]}_{\mathbf{Q}} = \underbrace{[\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{N-1}]}_{\mathbf{\Lambda}} \underbrace{[\mathbf{q}_0 \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_{N-1}]}_{\mathbf{Q}} \quad (8.53)$$

azaz:

$$\mathbf{R}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}, \quad (8.54)$$

Ebből felírható a \mathbf{Q} -val végzett hasonlósági transzformáció, amellyel az \mathbf{R} mátrixot diagonál-alakra hozzuk:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T \quad (8.55)$$

A 8.55 egyenlet \mathbf{R} diagonál-alakja. A második egyenlőségben azt használtuk ki, hogy \mathbf{Q} ortogonális, azaz $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. A \mathbf{Q} mátrix ortogonalitása a sajátvektorok ortonormáltságából (ortogonalitásából és normáltságából) következik. A sajátvektorok ortogonalitása az alábbiak szerint bizonyítható:

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{R}^T = (\mathbf{R}\mathbf{q}_i)^T = \lambda_i \mathbf{q}_i^T \quad (8.56)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j \quad (8.57)$$

Ezeket jobbról ill. balról szorozva

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{R}^T \mathbf{q}_j = \lambda_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j \quad (8.58)$$

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{R}\mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j \quad (8.59)$$

$\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$ miatt az egyenletek baloldali tagjai egyformák. Mivel a sajátértékek különbözőségét végig feltételeztük: $\lambda_i \neq \lambda_j$, ezért $\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = 0$ kell, hogy teljesüljön, vagyis a sajátvektorok egymásra ortogonálisak.

Mivel $\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$, ezért tetszőleges \mathbf{a} vektorra teljesül $\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} \geq 0$. Ezt a tulajdonságot pozitív szemidefinitésnek nevezik, és egyenértékű azzal, hogy \mathbf{R} minden sajátértéke nem negatív: $\lambda_i \geq 0$.

A matematikai levezetésben kapott diagonál-alakot (8.55) az alábbiakban felhasználjuk a szélsőérték-kereső eljárások konvergenciájának a vizsgálatára:

Megismételve a hiba 8.25 szerinti kifejezését:

$$\varepsilon(n) = \varepsilon_{\min} + [\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}}]^T \mathbf{R} [\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}}] = \quad (8.60)$$

$$= \varepsilon_{\min} + \mathbf{v}^T(n) \mathbf{R} \mathbf{v}(n) = \varepsilon_{\min} + \mathbf{v}^T(n) \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T \mathbf{v}(n) = \quad (8.61)$$

$$= \varepsilon_{\min} + [\mathbf{Q}^T \mathbf{v}(n)]^T \mathbf{\Lambda} [\mathbf{Q}^T \mathbf{v}(n)] = \varepsilon_{\min} + \mathbf{v}'^T(n) \mathbf{\Lambda} \mathbf{v}'(n) \quad (8.62)$$

ahol

$$\mathbf{v}'(n) = \mathbf{Q}^T \mathbf{v}(n). \quad (8.63)$$

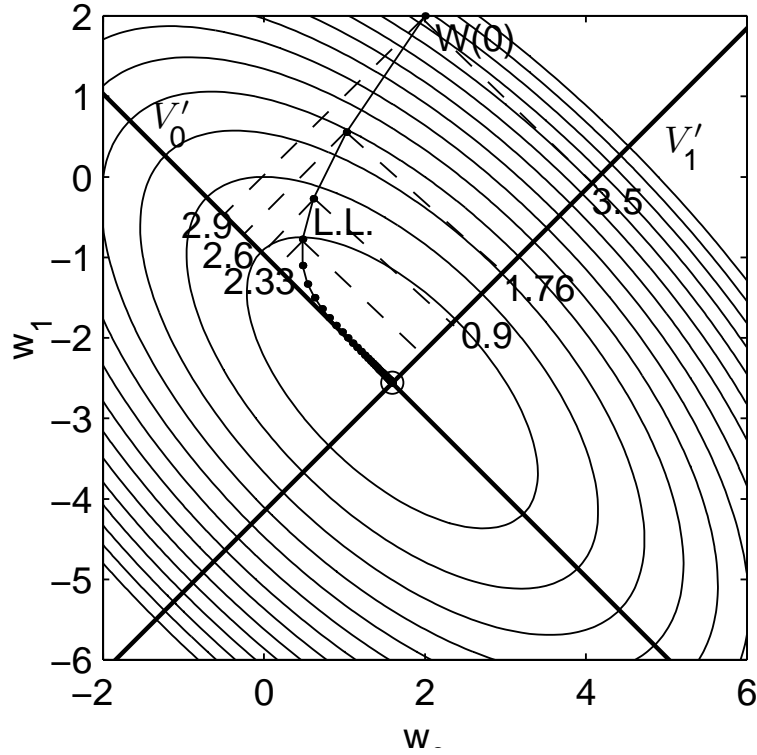
Összességében nemcsak az origót toltuk el, hanem a koordinátasíkokat is elforgattuk. A gradiens kifejezése ebben a koordinátarendszerben:

$$\nabla'(n) = 2\mathbf{\Lambda} \mathbf{v}'^T(n) = 2[\lambda_0 v'_0, \lambda_1 v'_1, \dots, \lambda_{N-1} v'_{N-1}]^T \quad (8.64)$$

Az \mathbf{R} mátrix sajátvektorai a hibaparaboloid főtengelyirányait adják meg. Az új koordináta rendszerben az ellipszis főtengelyei mentén egyenletesen ereszkedünk (8.11 ábra). A legmeredekebb lejtő módszere esetén a paraméterhiba tengelyenként a meredekségnek megfelelő gyorsaságban csökken (vö. 8.49):

$$\mathbf{v}'(n+1) = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Lambda}] \mathbf{v}'(n) = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Lambda}) \mathbf{v}'^{n+1}(0) \quad (8.65)$$

Ez az egyenlet fontos elvi eredmény a lépésköz paraméter meghatározásához.



8.11. ábra. A transzformált koordináta tengelyek mentén egyenletesen csökken a hiba; (Newton és L.L. módszer esetén egyaránt, de L.L. módszer esetén a két tengely mentén különböző hányadossal)

Mivel a 8.65 kifejezésben szereplő $(\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)$ mátrix diagonálmátrix, ezért az egyenletrendszer független skalár egyenletekre esik szét:

$$v'_m(n+1) = (1-2\mu\lambda_m)v'_m(n) = (1-2\mu\lambda_m)^{n+1}v'_m(0) = r^{n+1}v'_m(0) \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8.66)$$

Ez formailag ugyanaz a probléma, mintha egyelemű regressziós vektor, azaz skalár regressziós változó (x) lenne, következésképpen skalár lenne az „autokorrelációs mátrix” ($\mathbf{R} = \lambda$) Tekintsük ezért most ezt az esetet:

$$w(n+1) = w(n) - \mu\nabla(n); \quad \text{ahol } \nabla(n) = 2\lambda(w(n) - w_{\text{opt}}(n)) \quad (8.67)$$

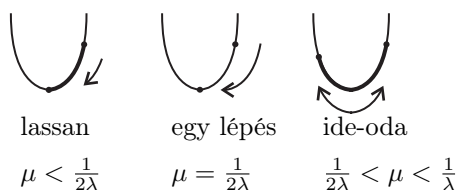
vagyis λ egyben a hibaparabola görbülete is, vagyis deriváltjának a meredeksége.

$$v'(n+1) = (1-2\mu\lambda)v'(n) = (1-2\mu\lambda)^{n+1}v'(0) = r^{n+1}v'(0) \quad (8.68)$$

ahol $v'(n) = v(n) = w(n) - w_{\text{opt}}$, hiszen skalár esetben diagonalizálásról, illetve koordinátasík-forgatásról nem beszélhetünk. Az eljárás konvergál, ha $|r| = |1-2\mu\lambda| < 1$. Ebből

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda} \quad (8.69)$$

$$\begin{aligned} \text{Speciális esetek: } & 0 < \mu < \frac{1}{2\lambda} && \text{túlszillapított} \\ & \mu = \frac{1}{2\lambda} && \text{kritikusan szillapított} \\ & \frac{1}{2\lambda} < \mu < \frac{1}{\lambda} && \text{alulszillapított} \end{aligned} \quad (8.70)$$



8.12. ábra. A konvergencia alapesetei

Visszatérve az általános esetre (8.66), ott $0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}$ kell, hogy teljesüljön, mivel a legmeredekebb irány szabja meg, hogy mekkorát léphetünk.

A konvergencia eddigi vizsgálatában feltételeztük \mathbf{R} ill. a λ_i sajátértékek ismertét, ami a valóságban nem teljesül, ezáltal azonban betekintést nyertünk a problémába. Az eredmények bizonyos óvatosságra intenek μ megválasztásában, és mint látni fogjuk, újabb ötleteket vetnek fel az eljárások finomítására.

A sajátértékek ismertének hiányában, például, felhasználhatjuk, hogy

$$\lambda_{\max} < \sum \lambda_m = \text{tr}[\mathbf{\Lambda}] = \text{tr}[\mathbf{R}], \quad (8.71)$$

amely a mátrix nyoma (angolul: trace, innen a jelölés), azaz diagonál-elemeinek összege, és hasonlósági transzformációval szemben invariáns paraméter (független a bázis megválasztásától). Így \mathbf{R} diagonál-elemeiből (azaz \mathbf{x} elemeinek négyzetes várhatóértékeiből), \mathbf{R} teljes ismerete, és sajátérték-számítás nélkül egyszerűen adható (a szükségesnél valamivel szigorúbb) korlát a lépésköz tényezőre:

$$0 < \mu < \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{R}]} \quad (8.72)$$

Adaptív, transzverzális szűrő esetén, amikor a regressziós vektort egy késleltetősor állítja elő u mintáiból, akkor elegendő a bemenőjel teljesítményét becsülni, mivel:

$$\frac{1}{\text{tr}[\mathbf{R}]} = \frac{1}{ME\{u^2\}} \quad \text{ahol } M \text{ a regressziós vektor hossza.} \quad (8.73)$$

\mathbf{R} ismeretében $\mathbf{x} = f(u)$ helyett $\mathbf{x}' = f'(u) = \mathbf{T} \cdot f(u)$ regressziós vektort állíthatná elő a modell rögzített része, ahol $\mathbf{T} = \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T$. (Mint láttuk \mathbf{R} pozitív szemidefinit mátrix, így $\lambda_m \geq 0$, és létezik a sajátértékek négyzetgyökeiből alkotott $\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ diagonál

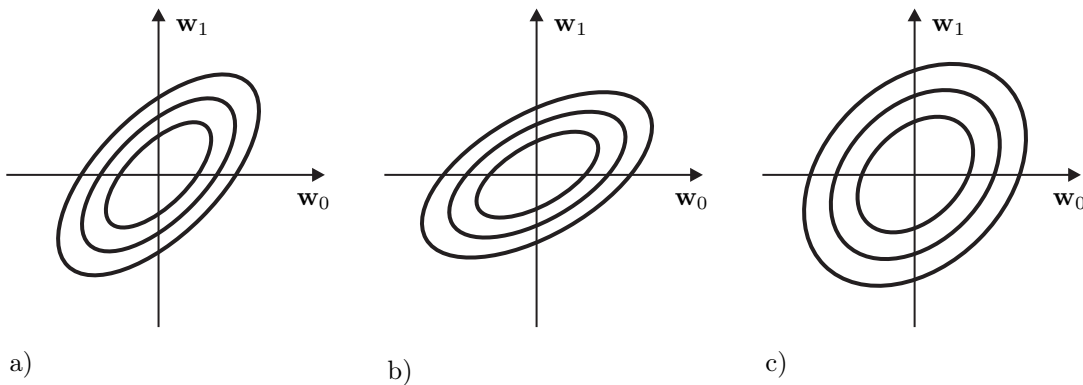
mátrix, amivel $\mathbf{R}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$.) A \mathbf{T} transzformációban \mathbf{Q}^T végzi az ortogonális komponensekre bontást (avagy geometriailag a forgatást), $\mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}$ pedig teljesítmény-normálást hajt végre.

$$\mathbf{R}' = E \{ \mathbf{x}' \mathbf{x}'^T \} = E \{ \mathbf{T}\mathbf{x} (\mathbf{T}\mathbf{x})^T \} = E \{ \mathbf{T}\mathbf{x}\mathbf{x}^T \mathbf{T}^T \} = \mathbf{T}\mathbf{R}\mathbf{T}^T = \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{I} \quad (8.74)$$

Úgy is eljárhatunk, hogy a kisebb teljesítményű komponenseket kevésbé lényegesnek tekintjük, és elhagyjuk. Ez a főkomponens-analízis ill. jeltömörítés lényegében a Karhunen-Loève transzformáció.

\mathbf{R} hiányában jöllehet, nem tudjuk a bemenetet úgy transzformálni, hogy a regressziós vektor elemei korrelálatlanok legyenek, de előnyben részesíthetjük az olyan modelleket, ahol $f(\cdot)$, vagyis a rögzített rész valamilyen ortogonális transzformációt tartalmaz, mint például a DFT.

Legyen például $f(\cdot)$ eredetileg egy késleltetősor, vagyis ekkor egy transzverzális szűrő súlyait adaptáljuk. Módosítsuk $f(\cdot)$ -et úgy, hogy a regressziós vektoron DFT-t végzünk minden ütemben. Az így kapott $f(\cdot)$ egy DFT-szűrőbank, melyet az 5. fejezetben bemutatott módon többféleképpen, hatékonyan megvalósíthatunk. Ekkor az új regressziós vektor egyes elemei az $u(n)$ bemenet különböző frekvenciasávba eső komponenseitől függnnek, így közel korrelálatlanok lesznek. A fennmaradó korreláltság a spektrumszivárgás következménye. Ezután a regressziós változók négyzetét pl. exponenciálisan átlagolva, becsülni tudjuk az egyes komponensek teljesítményét, és minden csatornán normálást végezhetünk. A normálást ugyancsak a rögzített $f(\cdot)$ részének tekintjük. Figyeljük meg ezek után, hogy $f(\cdot)$ e két módosításával, hogyan változik a hibafelület, amelynek minimumát a súlyadaptációval keressük (8.13 ábra).



8.13. ábra. Izokritérium görbék a) a DFT transzformáció nélkül b) a DFT transzformáció alkalmazásával c) a teljesítmény-normálás után

8.4.4. LMS módszer

Helyettesítsük az eddigi módszereknél nehézséget okozó statisztikai paramétereket a pillanatnyi be- és kimeneteből számított mennyiségekkel. Ezáltal a bonyolult számítást, illetve az információhiányt megkerüljük. Az átlagos négyzetes hiba helyett ($\varepsilon(n)$)

minimalizáljuk a pillanatnyi hiba négyzetét:

$$\hat{\varepsilon}(n) = [y(n) - \hat{y}(n)]^2 = [y(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2 \quad (8.75)$$

a derivált helyett pedig értelmezzük a pillanatnyi deriváltat:

$$\hat{\nabla}(n) = \frac{\partial \hat{\varepsilon}(n)}{\partial \mathbf{w}(n)} = -2[y(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)]\mathbf{x}(n) = -2e(n)\mathbf{x}(n) = -2\mathbf{x}(n)e(n) \quad (8.76)$$

ahol $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$ a pillanatnyi eltérés a kimenetek között. A legmeredekebb lejtő módszeréhez hasonlóan (vö. 8.47 egyenlet):

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \hat{\nabla}(n) = \mathbf{w}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n) \quad (8.77)$$

Ez az ún. LMS módszer. A paraméterhiba alakulása:

$$\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}} - \mu \cdot \underbrace{\hat{\nabla}}_{2\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)[\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}}]} \quad (8.78)$$

$$= [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)][\mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{\text{opt}}] \quad (8.79)$$

$$\mathbf{v}(n+1) = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{v}(n) = \prod_{k=0}^n [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)]\mathbf{v}(0) \quad (8.80)$$

amely kapcsolatba hozható a legmeredekebb lejtő módszerére kapott képlettel, felismerve, hogy:

$$\underbrace{\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}_{\text{pillanatnyi becslő}} \quad (8.81)$$

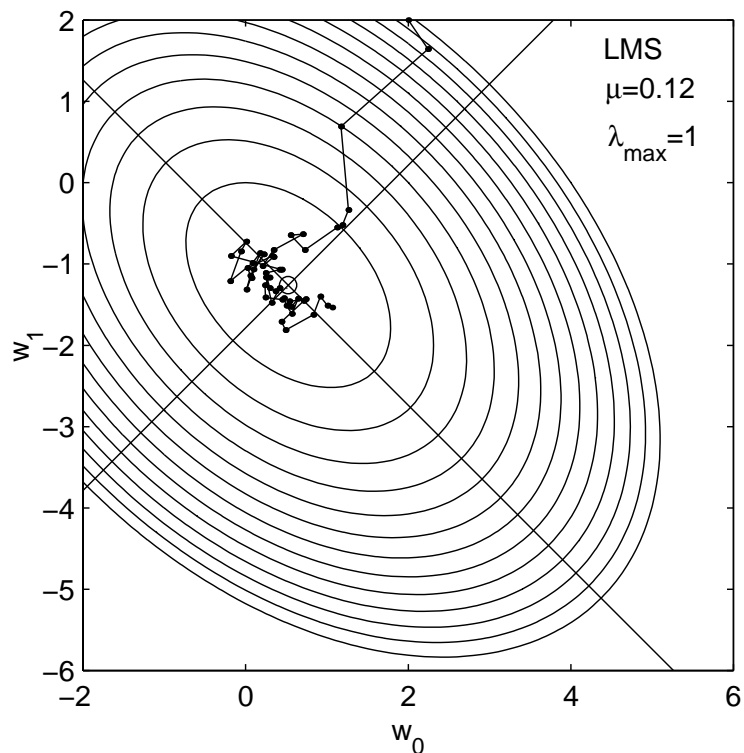
Ha feltételezhetjük, hogy az egymást követő $\mathbf{x}(n)$ regressziós vektorok korrelálatlanok, és \mathbf{R} stacionárius, 8.80 várhatóértékét képezve egyszerűen adódik, hogy a paramétervektor várhatóértéke ugyanúgy konvergál, mint a legmeredekebb lejtő (L.L.) módszerével:

$$E\{\mathbf{v}(n+1)\} = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})^{n+1}\mathbf{v}(0) \quad (8.82)$$

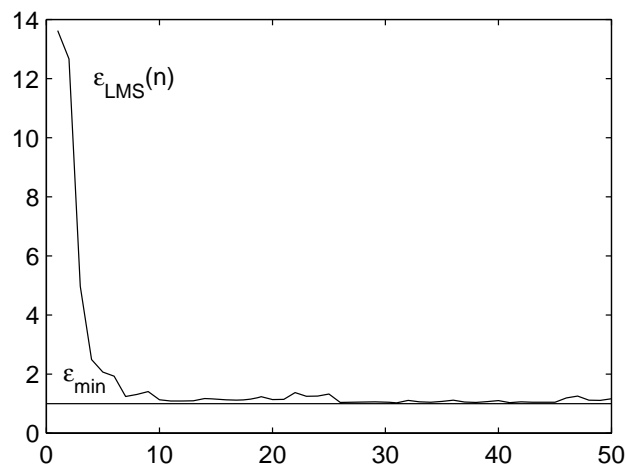
Az LMS eljárásban a pillanatnyi becslés miatt a módosítás is nagyon pontatlan lesz, gyakorlatilag előfordul, hogy közel sem a negatív gradiens irányában mozdulunk a hibafelületen. A pontatlan korrekciók időbeni sokassága azonban átlagolódik, és eredőben az optimum felé vezet. Ehhez regressziós vektor stacionaritását kellett feltételeznünk, ezért az LMS algoritmus korlátozottabb körben alkalmazható, mint az L.L. módszer, viszont a becsült paraméter esetleges változását jobban képes követni. Ahol a regressziós vektor és a kívánt válasz minden lépésben rendelkezésre áll, ott általában az LMS módszer előnyösebb választás az L.L. módszerrel szemben.

A pillanatnyi derivált mentén nagyon kis lépésben szabad korrigálni. A viszonyok modellezhetők additív zajjal:

$$\hat{\nabla}(n) = \nabla(n) + \mathbf{z}_a \quad (8.83)$$



8.14. ábra. Paraméter adaptáció LMS módszer esetén. (A korábbi példában szereplő szinuszos bemenethez negyed akkora teljesítményű fehér zajt adtunk a szimuláció során; emiatt módosul a hibafelület)



8.15. ábra. A pillanatnyi gradiens miatt az LMS az optimum körül bolyong.

Az optimum közelében a zaj dominál, hiszen ott $\nabla(n) \sim 0$, így az eljárás konvergenciája előbb lelassul, majd le is áll, és a minimumhely környezetében bolyong (8.14 ábra). Ez azt jelenti, hogy a hiba minimális értékét nem érjük el (8.15).

Megjegyzés: Olyan esetben ez a tulajdonság előnyös is lehet, ahol a hibafelület nem

kvadratikus, hanem lokális minimumok is léteznek, amint az a végtelen impulzusválaszú adaptív rendszereknél előfordul (ld. a későbbiekben). Ilyenkor a pillanatnyi gradiens zajszerű viselkedése és az ebből következő bolyongás elviheti a paraméter-beállítást a lokális minimum közeléből, és így esély nyílik a globális minimum megtalálására.

A fenti jelenségből adódó maradékhiba-többször sztochasztikus jellegű. Az adaptáció konvergenciája után megmaradó átlagos, négyzetes hiba, ε_∞ , és az elvileg elérhető minimális érték, ε_{\min} , közötti hányadost nevezik angolul „misadjustment”-nek.

8.4.5. Kombinált módszerek

α -LMS módszer:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \alpha \frac{e(n)\mathbf{x}(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \quad (8.84)$$

A paraméterhiba alakulása:

$$\mathbf{v}(n+1) = \prod_{k=0}^n \left[\mathbf{I} - \alpha \frac{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)}{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)} \right] \quad (8.85)$$

Az LMS módszerhez képest μ helyett $\frac{\alpha}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)}$ veszi át. Vagyis lépésenként normalizáljuk a korrekciót, így elkerüljük $\|\mathbf{x}(n)\|$ ingadozásából eredő egyenlőtlen paraméter módosításokat, és közelítőleg érvényes lesz, hogy a konvergencia $0 < \alpha < 1$ választással biztosítható. Ez utóbbi állítás az LMS módszer konvergenciájához hasonló módon, (8.85) várható értékének felírásával látható be. A teljes bizonyításhoz, melyet itt nem végzünk el, fel kell használni, hogy $E\left\{\frac{1}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)}\right\} = \frac{1}{\text{tr}(\mathbf{R})} < \frac{1}{\lambda_{\max}}$ Vagyis az előző szakaszban kapott eredményt használjuk fel (8.72-8.73 egyenletek).

LMS-Newton módszer:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{R}^{-1}e(n)\mathbf{x}(n) \quad (8.86)$$

A paraméterhiba alakulása:

$$\mathbf{v}(n+1) = \prod_{k=0}^n \left[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}^{-1} \underbrace{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)}_{\hat{\mathbf{R}}} \right] \quad (8.87)$$

\mathbf{R} -et ismertnek feltételezzük, de a gradiens helyett pillanatnyi gradienst használunk. Mivel a módszer számíthatósága, és konvergencia-tulajdonsága igen jó, viszont \mathbf{R} ismeretét feltételezi, ezért általában megközelítendő etalonnak tekintik ezt az eljárást, és ideális-paraméterbecslési eljárásnéven is szokás említeni.

LMS-Newton módszer, \mathbf{R} rekurzív becslésével kombinálva:

Az eljárás nem változik:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu\mathbf{R}^{-1}(n+1)e(n)\mathbf{x}(n) \quad (8.88)$$

csupán kiegészül az ismeretlen \mathbf{R} adatokból történő rekurzív becslésével:

$$\mathbf{R}(n+1) = (1-\nu)\mathbf{R}(n) + \nu\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n) \quad (8.89)$$

$$= \mathbf{R}(n) + \nu[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n) - \mathbf{R}(n)], \quad (8.90)$$

ahol $\nu = 0.01 \dots 0.1$. Érdemes összevetni (8.89)-t az exponenciális átlagolással (4.8). (ν megfelelő megválasztásával az ideális átlagolásnak megfelelően is lehet becsülni.)

Valójában $\mathbf{R}^{-1}(n)$ -re van szükségünk, ezért közvetlenül ezt számítjuk. $\mathbf{R}^{-1}(n)$ iteratív számítása 8.89-nek megfelelően, a Sherman-Morrison-féle képlet alapján:

$$\mathbf{R}^{-1}(n+1) = \frac{1}{1-\nu}\mathbf{R}^{-1}(n) - \frac{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{R}^{-1}(n)}{\frac{1}{1-\nu} + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{R}^{-1}(n)\mathbf{x}(n)} \quad (8.91)$$

A nevezőben álló tagok skalárok. Ha $\mathbf{R}^{-1}(0) = \varepsilon_0\mathbf{I}$ akkor egyszer sem kell mátrixot invertálni, ami a végrehajtandó műveletek száma szempontjából nagyon előnyös.

8.5. Általánosabb kritériumfüggvény Taylor sorfejtése

Nem kvadratikus hibafelület esetén a Wiener-Hopf egyenlet nem adja meg az optimumot, így az eddig bemutatott gradiens-alapú, iteratív algoritmusok konvergenciája nem garantált. Az eljárásokban alkalmazott modell a valódi hibafelületet véges Taylor-sorfejtéssel közelíti.

Legyen egy általános hibakritérium függvény:

$$C(y, \hat{y}) = C(y, \hat{y}(\mathbf{w})) = C(\mathbf{w}) \quad (8.92)$$

amely a paramétervektor iteratív állításával lépésenként változik: $C(\mathbf{w}(n))$.

(Megjegyzés: Az eddigiekben a hibakritérium $C(y, \hat{y}) = E\{(y - \hat{y})^2\}$ volt, melyet ε jelölt; $C(\mathbf{w})$ (8.21) szerint kvadratikus volt.)

Végezzünk sorfejtést $\mathbf{w} = \mathbf{w}(n)$ környezetében:

$$C(\mathbf{w}) \cong C(\mathbf{w}(n)) + \mathbf{grad}^T C(\mathbf{w}(n))[\mathbf{w} - \mathbf{w}(n)] + \frac{1}{2}[\mathbf{w} - \mathbf{w}(n)]^T \mathbf{H}[\mathbf{w} - \mathbf{w}(n)] \quad (8.93)$$

ahol

$$\mathbf{grad}C(\mathbf{w}(n)) = \frac{\partial C(\mathbf{w}(n))}{\partial \mathbf{w}} \text{ az első derivált,} \quad (8.94)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{grad}C(\mathbf{w}(n))}{\partial \mathbf{w}} \text{ a második derivált.} \quad (8.95)$$

$\mathbf{grad}^T = \left[\frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial w_2}, \dots \right]$. Megjegyzés: az eddigi jelölésekben $\nabla = \mathbf{grad}^T C(\mathbf{w}(n))$. Lineáris modell esetén kvadratikus a hibafelület, így ekkor a sorfejtés pontosan háromtagú, és megfelel 8.21 egyenletnek. Ekkor $\mathbf{H} = 2\mathbf{R}$, tehát kvadratikus felület esetén a második derivált állandó. Ha magasabb rendű a felületet, akkor nem, vagyis minden lépésben más és más kvadratikus felületet illesztünk az adott pontra az első és a második derivált alapján, és ennek minimuma felé léphetünk.

8.5.1. Modellillesztés a Taylor-sorfejtett kritériumfüggvény alapján

a) eset

$C(\mathbf{w})$ Taylor sorának első két tagját figyelembe véve, (tehát lineáris felületet illesztve,) $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w}(n+1)$ behelyettesítéssel keressük $\mathbf{w}(n+1)$ -t, amelyre:

$$C(\mathbf{w}(n+1)) = 0 \quad (8.96)$$

$$C(\mathbf{w}(n)) + \mathbf{grad}^T C(\mathbf{w}(n))[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)] = 0 \quad (8.97)$$

Utóbbiból kapható:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{C(\mathbf{w}(n))}{\mathbf{grad}^T C(\mathbf{w}(n))\mathbf{grad}C(\mathbf{w}(n))} \mathbf{grad}C(\mathbf{w}(n)); \quad (8.98)$$

ahol a tört nevezője és számlálója is skalár.

Ez az ún. Newton-Raphson módszer.

A tapasztalatok szerint az optimumtól távol kedvezően viselkedik, az optimumhoz „közele” eredményessége pedig attól függ, hogy $C(\mathbf{w}_{\text{opt}}) = 0$ teljesül-e, hiszen ebből vezettük le az eljárást.

b) eset

A másik lehetőség az, hogy a sorba fejtett $C(\mathbf{w})$ minimumát deriválással keressük.

$$\mathbf{grad}C(\mathbf{w}(n+1)) = \mathbf{0} = \mathbf{grad}C(\mathbf{w}(n)) + \mathbf{H}(\mathbf{w}(n))[\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)]; \quad (8.99)$$

Ebből a Newton-módszer adódik:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{w}(n))\mathbf{grad}C(\mathbf{w}(n)) \quad (8.100)$$

Megjegyzés: A 8.44 egyenlethez képest az $\frac{1}{2}$ szorzó a korrekciós tagból itt hiányzik, mert a 8.93 Taylor-sorban szerepel.

A következő szakaszban bemutatott pseudolineáris regresszió hibafelülete nem kvadratikus, a gradiens eljárások alkalmazása ezért a Taylor-közelítésen alapulnak.

8.6. Adaptív végtelen impulzusválaszú rendszerek

Abban az esetben, ha végtelen impulzusválaszú szűrő visszacsatoló súlyait adaptáljuk, akkor a lineáris regresszióhoz felírásában hasonló feladatot, ún. pseudolineáris regressziót kell megoldanunk:

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k(n)u(n-k) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k(n)\hat{y}(n-k) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}_{u,\hat{y}}(n), \quad (8.101)$$

8. MODELLILLESZTÉS

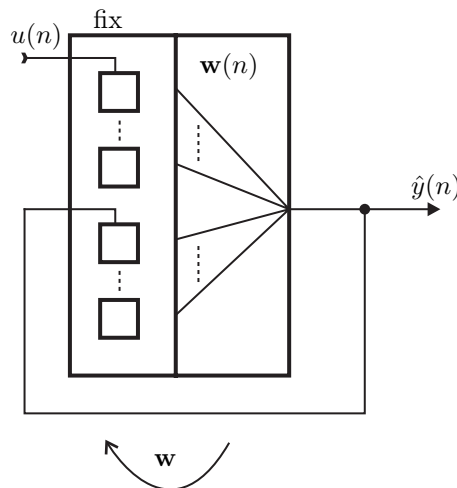
ahol:

$$\mathbf{w}^T(n) = [a_0(n), a_1(n), \dots, a_{M-1}(n); b_1(n), b_2(n), \dots, b_{N-1}(n)], \quad (8.102)$$

$$\mathbf{x}_{u,\hat{y}}^T(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1); \hat{y}(n-1), \hat{y}(n-2), \dots, \hat{y}(n-N+1)]. \quad (8.103)$$

Azért *nem* tekinthető valódi lineáris regressziónak a feladat, mivel a regressziós vektor implicit módon függ a regressziót meghatározó paraméterektől, így nem is stationárius.

Az implicit függés által az adaptív lineáris kombinátor struktúrájához képest az előre rögzített $f(u)$ valójában $\mathbf{w}(n)$ függvénye, a b_k paraméterek megváltoztatása pedig végtelen tranzienseket indít el a szűrő kimenetén. (Emlékeztetőül: Az adaptív lineáris kombinátor két alapvető tulajdonsága az állítható paraméterektől való lineáris függés és a paraméterváltoztatás véges memóriájú hatása.) Az adaptív lineáris kombinátor szerkezetével ad összehasonlítást a 8.16 ábra.



8.16. ábra. Adaptív IIR szűrő: az implicit függések miatt a paraméterváltoztatás visszahat az regressziós vektor fixnek tekintett előállítására.

Megjegyzés: a 8.102 szerinti regressziós vektor (egyben állapotvektor) közvetlenül adódik a differencia-egyenletből. Ez a struktúra a szűrő egyik megvalósítása, melyet úgy kapunk, ha kaszkádban előbb az előreccatoló részt, majd a visszacsatoló részt valószínűsítjük meg. Ettől különböző struktúrákat most nem tekintünk. A jobb áttekinthetőség kedvéért azonban megemlítjük, hogy a kaszkád felcserélésével (lineáris, időinvariáns esetben ez megtehető), a két részrendszer állapotváltozói összevonhatók, és egy direkt struktúrához jutunk.

Megjegyzés: Az IIR szűrők paraméteradaptációja stabilitási problémákat is felvet, hiszen az adaptáció során a pólusok (átmenetileg) az egységkörön kívül kerülhetnek. Erre a problémára a következőkben nem térünk ki.

8.6.1. Visszavezetés FIR problémára (EE)

A következő eljárás lényege az, hogy ragaszkodunk a hiba implicit függésektől mentes felírásához. Paramétereiben lineáris, valódi lineáris regressziót oldunk meg. Ehhez gyakorlatilag egy FIR szűrő súlyait kell adaptálni. Az eljárás angol elnevezése: Equation Error (EE) Formulation, vagyis „egyenlet-hiba felírás”.

Az illesztendő modell átviteli függvénye:

$$\frac{\hat{Y}(z)}{U(z)} = \frac{A(z)}{1 - B(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (8.104)$$

A kimenetek eltérése: e , amelynek átlagos vagy pillanatnyi négyzetes értékét ($\hat{\epsilon}$ -t) kell minimalizálni:

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n); \quad (8.105)$$

Ebbe helyettesítve $\hat{y}(n)$ kifejezését:

$$e(n) = y(n) - (A_n(z)u(n) + B_n(z)\hat{y}(n-1)) \quad (8.106)$$

(A fenti egyenletben keverednek az időtartománybeli, illetve z -tartománybeli jelölések: a z^{-1} itt késleltetés operátorként értelmezhető, amellyel formálisan szorozzuk a jelet (pl. $z^{-1}y(n)$).

Az implicit függés úgy küszöbölhető ki, ha $\hat{y}(n)$ -t olyan mennyiséggel helyettesítjük, amely közelíti $\hat{y}(n)$ -et, de előállításában nem játszanak közre a regressziót meghatározó paraméterek. Mivel $\hat{y}(n)$ -nal $y(n)$ -t közelítjük, és ez utóbbi nem függvénye a modellparamétereknek, ezért helyettesítsük ezt $\hat{y}(n)$ helyébe. Ld. 8.17 ábra. Az így kapott „egyenlet-hiba” (e_e) az eredeti hiba (e) szűrt változata:

$$\begin{aligned} e_e(n) &= y(n) - (A_n(z)u(n) + B_n(z)y(n-1)) = D_n(z)y(n) - N_n(z)u(n) \\ &= D_n(z)y(n) - D_n(z)\hat{y}(n) = D_n(z) \cdot e(n) \end{aligned} \quad (8.107)$$

A szűrt hiba, e_e , pillanatnyi vagy átlagos négyzetes értéke az eddig tárgyalt iteratív módszerekkel minimalizálható, és a konvergenciára az ott megfogalmazottak továbbra is érvényesek, mivel a hibafelület kvadratikus.

A regressziós vektort lecseréltük, így valójában az alábbi FIR rendszer optimális paraméter-beállítását számítjuk ki (ld. 8.18 ábra):

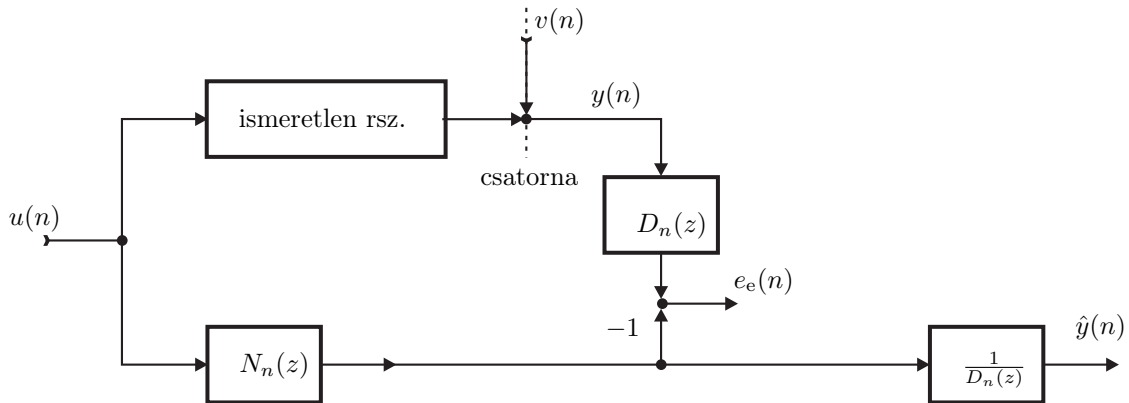
$$\hat{y}(n)_{\text{FIR}} = \sum_{k=0}^{M-1} a_k(n)u(n-k) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k(n)y(n-k) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}_{uy}(n) \neq \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}_{u\hat{y}}(n) \quad (8.108)$$

ahol

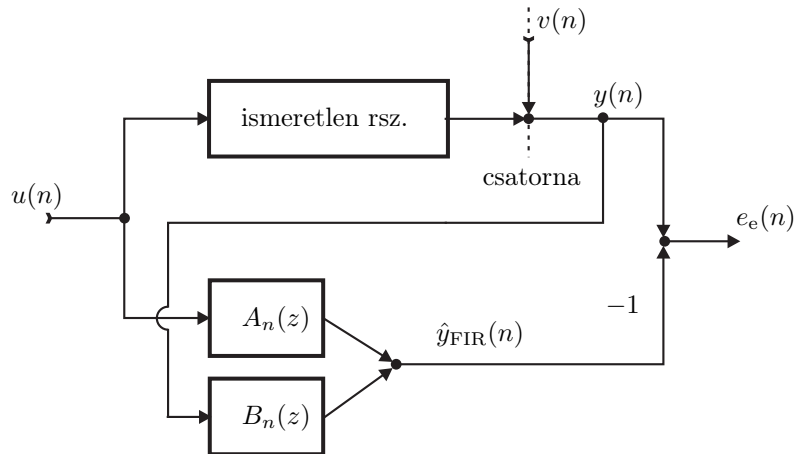
$$\mathbf{x}_{u,y}^T(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1); y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N+1)]. \quad (8.109)$$

Vö. (8.103), (8.101). Mivel az eredeti hibakritériumtól eltértünk, így számolni kell azzal, hogy közelítés esetén az optimális paraméter-beállítás torzított lesz.

A hibaminimalizáláshoz a FIR rendszert működtetjük, de a további jelfeldolgozás számára az azonos paraméterű IIR rendszer állítja elő a kimenetet (vö. a 8.17 és 8.18 ábrákat, $\hat{y} \neq \hat{y}_{\text{FIR}}$).



8.17. ábra. A szűrt hiba előállítása („EE”). ($v(n)$ a megfigyelési zaj)



8.18. ábra. Az „EE” adaptációban felfedezhető FIR rendszer.

8.6.2. A kimeneti hibán alapuló modellillesztések (OE)

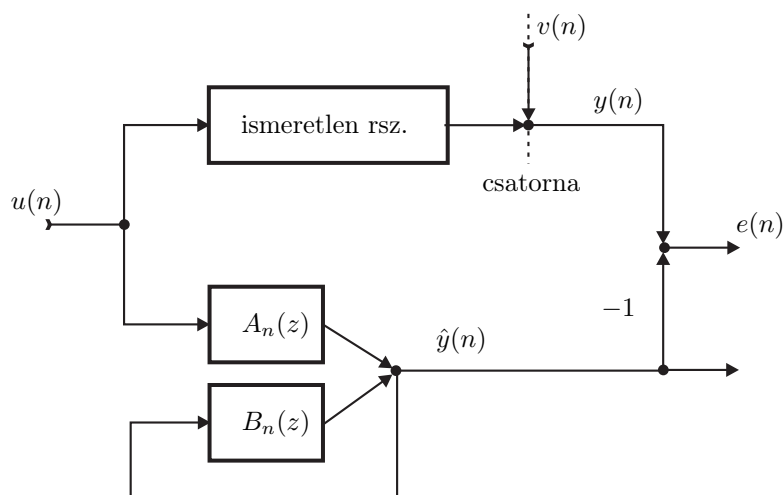
Míg az előbbi módszer ez egyik végletet képviselte, miszerint oldjunk meg valódi lineáris regressziót, a *kimeneti hibán* alapuló módszer a másik végletnek tekinthető, miszerint ragaszkodjunk az eredetileg értelmezett hibához (8.105 egyenlet, 8.19 ábra), vállalva az IIR rendszer implicit paraméterfüggéseit.

A paraméter-optimalizáláshoz az eddigi gradiens alapú eljárások módosított változatait alkalmazzuk. Az egyszerűség kedvéért tekintsük az LMS eljárást, amelyben csak a gradiens számítása módosul az előbbiekhöz képest:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \hat{\nabla}(n) \quad (8.110)$$

A hiba $\hat{\varepsilon}(n) = [y(n) - \hat{y}(n)]^2$. A gradiens:

$$\hat{\nabla}(n) = -2e(n) \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \mathbf{w}(n)} \quad (8.111)$$



8.19. ábra. Az eredeti pszeudolineáris feladatnak megfelelő hibaértelmezés („OE”, ua. 8.16 ábra)

amelyben az implicit függések miatt:

$$\mathbf{grad}^T \hat{y}(n) = \left[\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_0(n)}, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_1(n)}, \dots, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_{n-1}(n)}, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_1(n)}, \dots, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_{n-1}(n)} \right]. \quad (8.112)$$

Kifejtve minden paraméterre:

$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_k(n)} = u(n-k) + \sum_{i=1}^{N-1} b_i(n) \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial a_k(n)} \quad (8.113)$$

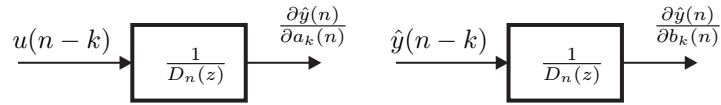
$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_k(n)} = \hat{y}(n-k) + \sum_{i=1}^{N-1} b_i(n) \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial b_k(n)} \quad (8.114)$$

nonkauzális kifejezések adódnak, amelyek nem számíthatók szűrőszerűen, ezért a következő közelítésekhez folyamodunk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial a_k(n)} &\approx \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial a_k(n-i)}; \\ \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial b_k(n)} &\approx \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial b_k(n-i)}; \end{aligned}$$

amivel a gradiensvektor közelítő számítása szűrőszerűen működik (8.20 ábra). Lassan kell változtatni az a_k, b_k paramétereket, hogy a fenti közelítésekkel elkövetett hiba ne legyen túl nagy. Mivel a pillanatnyi hibából indulunk ki (LMS), ezért eleve indokolt az óvatosság μ megválasztásánál. A gyakorlatban mindegyik b_k súly adaptálásához különböző lépésköz tényezőt alkalmaznak, és ezeket az iteráció során módosítják; (ebben az esetben (8.110)-ben μ helyét egy időben változó diagonálmátrix veszi át).

A fenti eljárás bonyolult, hiszen idővariáns szűrést kell végezni minden egyes paraméter szerinti derivált kiszámításához. Kétféle egyszerűsítés vehető fel:



8.20. ábra. Az egyes deriváltak meghatározása szűréssel

1. Elhagyjuk a konvolúciós tagot a 8.113-8.114 kifejezésekből, vagyis $\mathbf{grad} \hat{y}(n) \approx \mathbf{x}_{u\hat{y}}$ közelítést alkalmazunk. Az így kapott eljárás ugyan különbözik az Equation Error módszertől, hiszen ott $y(n)$ -t, $\hat{y}(n)$ -tel helyettesítettük, míg itt az implicit függés marad, de formailag ugyanazt az LMS eljárást alkalmazzuk.
2. Úgy is egyszerűsíthetünk, ha az idővariáns szűrést elvégezzük ugyan a_1 -re ill. b_1 -re, de a többit már ezekkel becsüljük. Ehhez azt használjuk föl, hogy az egyes szűrők (8.20 ábra) bemenetei egymásnak késleltetettjei. Ezt a késleltetést helyezzük át a kimenetre. Így egyetlen szűrést végzünk, és a kimenet késleltetettjei adják meg az érzékenységeket. Ez a sorrendcsere szabadon megtehető lenne időinvariáns szűrés esetén, ebben az esetben azonban közelítést követtünk el. Az egyes paraméterekhez tartozó gradiensekre nem azonos időpontbeli szűrőegyüttműködéssel végezzük a szűrést. (Ld. bővebben Horváth: 4.12. ábra.)

Irodalomjegyzék

Irodalom a 2. fejezethez

- [1] Cooley, J. W. and Tukey, J. W., An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Mathematics of Computation*, Vol. 19, No. 90, pp. 297–301. 1965.
- [2] Jerry, A. J., The Shannon Sampling Theorem — Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review. *Proc. IEEE*, Vol. 65, No. 11, pp. 1565–1596. 1977.
- [3] Kollár I., „Jelanalízis feladatgyűjtemény”. BME jegyzet, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2001. 260 p. 51441.
- [4] Nyquist, H., Certain Topics in Telegraph Transmission Theory. *AIEE Transactions*, Vol. 47, pp. 617–644. 1928.
- [7] Schnell, L., Jelek és rendszerek mérés technikája (jegyzet-formában: III. kötet, Műegyetemi kiadó, 514352). Az ebben a segédletben nem tárgyalt, a mintavételezéssel, és kvantálással kapcsolatos anyag nagy részét tartalmazzák a következő részek: 24. fejezet bevezetés; 24.1.1; 24.3.1; 24.3.5; 24.10.1-2-4.
- [6] Shannon, C.E., Communication in the Presence of Noise. *Proc. IRE*, Vol. 37, pp. 10–21. 1949.

Irodalom a 3. fejezethez

- [1] De Lotto, I. and Paglia, G. E., Dithering Improves A/D Converter Nonlinearity. *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, Vol. IM-35, No. 2, pp. 170–177. 1986.
- [2] Dobrowiecki, T., Modelling a Quantizer — Models and Possible Approaches. *Periodica Polytechnica Ser. Electrical Engineering*, Vol. 28, Nos. 2-3, pp. 159–172. 1984.
- [3] Katzenelson, J., On Errors Introduced by Combined Sampling and Quantization. *IRE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-7, pp. 58–68. 1962.

- [4] Kollár, I., Statistical Theory of Quantization: Results and Limits. Periodica Polytechnica Ser. Electrical Engineering, Vol. 28, Nos. 2-3, pp. 173–190. 1984.
- [5] Kollár, I., The Noise Model of Quantization. Proc. 1 IMEKO TC4 Symposium „Noise in Electrical Measurements”, Como (Italy), June 19-21, 1986. Bp. OMIKK-Technoinform, 1987. pp. 125–129.
- [6] Kollár I., „Quantization Noise”. Akadémiai doktori értekezés, Budapest, 1996. 416 p.
- [5] Schnell, L., Jelek és rendszerek mérés technikája (jegyzet-formában: III. kötet, Műegyetemi kiadó, 514 352). Az ebben a segédletben nem tárgyalt, az átlagolással, a DFT-vel, és a periodogrammal kapcsolatos anyag nagy részét tartalmazza: 24.3.1; 24.3.5; 24.4.2: A korreláció indirekt elvű mérése; 24.6.2; 24.8.2; 24.8.3.
- [8] Sripad, A. B. and Snyder, D. L., „A Necessary and Sufficient Condition for Quantization Errors to Be Uniform and White.” IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-25, No. 5, pp. 442–448. 1977.
- [9] Widrow, B., A Study of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theory. Sc.D. Dissertation, M.I.T. Elec. Eng. Dept., Electronics Systems Lab., Cambridge, Mass., 1956.
- [10] Widrow, B., „A Study of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theory.” IRE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-3, Dec. 1956, pp. 266–276.
- [11] Widrow, B., „Statistical Analysis of Amplitude-Quantized Sampled-Data Systems.” Trans. AIEE, Vol. 79, Part II. Appl. and Ind., No. 52, pp. 555–568. 1961.
- [12] B. Widrow, I. Kollár and M.-C. Liu, „Statistical Theory of Quantization”. IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. 45, No. 2, pp. 353–61, Apr. 1996.

Irodalom a 4-5-7-8. fejezetekhez

- [1] Schnell L. ed., *Jelek és rendszerek mérés technikája I.,III.*, Műegyetemi Kiadó, 1994 (jegyzetazonosító: 51435, 514 352)
 2. fejezet: Péceli G., *Jelek és rendszerek*
 5. fejezet: Dobrowiecki T., *Mérési adatok feldolgozásának alapvető módszerei*
 24. fejezet: Kollár I., *Jelanalizátorok*
- [2] Luenberger, D.G., „An Introduction to Observers”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-16, No.6, 1971
- [3] Hostetter, G. H., „Recursive Discrete Fourier Transformation”, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, No. 2., 1980.

- [4] Péceli G., „A Common Structure for Recursive Discrete Transforms”, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. CAS-33, No.10, 1986.
- [5] Horváth G., *et al*, *Neurális hálózatok és műszaki alkalmazásai*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1998 (jegyzetazonosító: 55034). 4. fejezet: Horváth G., Várkonyiné Kóczy A., *Tanulás*
- [6] Prékopa A., *Valószínűségelmélet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962
- [7] Widrow, B. and S. D. Stearns, *Adaptiv Signal Processing*, Prentice-Hall, New Jersey, 1985.
- [8] Rabiner, L. R. and B. Gold, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
- [9] Rózsa P., *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

Irodalom a 6. fejezethez

- [1] Simonyi E., „*Digitális szűrők. A digitális jelfeldolgozás alapjai*”, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.
- [2] T. W. Parks, C. S. Burrus, „*Digital Filter Design*”, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1987.
- [3] Herpy M., Berka J-C., „*Aktív RC szűrők*”, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [4] *MATLAB. The Language of Technical Computing*, The MathWorks, Inc., 1987-2004.