Digitális Jelfeldolgozás

Gyakorlat

Tematika

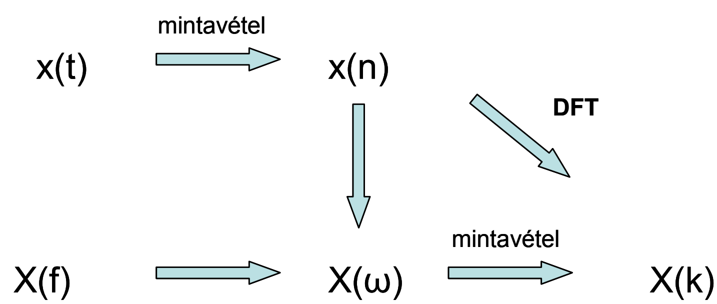
<u>*Diszkrét Fourier Transzformáció*</u>: fogalma, definiciólevezetés, példák

<u>*A DFT mint lineáris transzformáció:*</u> fogalma, példák

<u>*A radix-2 FFT algoritmus:*</u> fogalma, példák

Elméleti összefoglaló és feladatok

<u>*Diszkrét Fourier Transzformáció*</u>



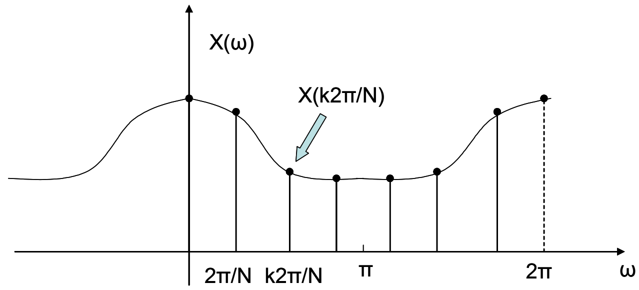
Az x(n) diszkrét jelsorozat Fourier transzformáltja:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \ .$$

Az $X(\omega)$ spektrumot szeretnénk mintavételezni. Tudjuk, hogy $X(\omega)$ 2π szerint periodikus, ezért elegendő az alapsávban mintát venni. Tehát osszuk fel a $0 \le \omega < 2\pi$ intervallumot N egyenlő részre, ekkor az $X(\omega)$ mintái:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} \ ,$$

ahol $k = 0,1,...,N-1$.



Az előbbi végtelen szummát feloszthatjuk véges, N tagú szummák végtelen összegére:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \ldots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} + \ldots =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$$

Indexcsere és a szummák felcserélése után:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \right] e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$$

Nevezzük el x_p-nek a belső szummát, tehát:

$$x_p = \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN) \right],$$

ami x(n) jel egy N szerint periodikus kiterjesztett sorozata, ezért Fourier sorba fejthető:

$$x_p = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi\frac{kn}{N}} ,$$

ahol $n = 0,1,...,N-1$ és a Fourier együtthatók:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi\frac{kn}{N}} ,$$

ahol $k = 0,1,...,N-1$, ami összevetve a kezdetekkel:

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$$

tehát végül:

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi\frac{kn}{N}} .$$

Mivel $x_p(n)$ az *x(n)* jel periodikus kiterjesztettje, ezért természetesen *x(n)* előállítható $x_p(n)$ jelből, amennyiben nem lép fel aliasing az időtartományban, vagyis *x(n)* véges tartójú, és a tartó kisebb, mint *N*. Ekkor:

$$x(n) = x_p(n), \text{ ha } 0 \le n \le N-1 .$$

Tehát x(n) is felírható, mint:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{j2\pi\frac{kn}{N}} ,$$

ahol $0 \le n \le N-1$. És ekkor az x(n) spektruma a következő:

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{j2\pi\frac{kn}{N}}\right]e^{-j\omega n} = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\left(\omega-2\pi\frac{k}{N}\right)n}\right],$$

és bevezetve a

$$P(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\sin(\omega N/2)}{N\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(N-1)/2},$$

a következő összefüggés adódik:

$$\boxed{X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)P\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)}$$

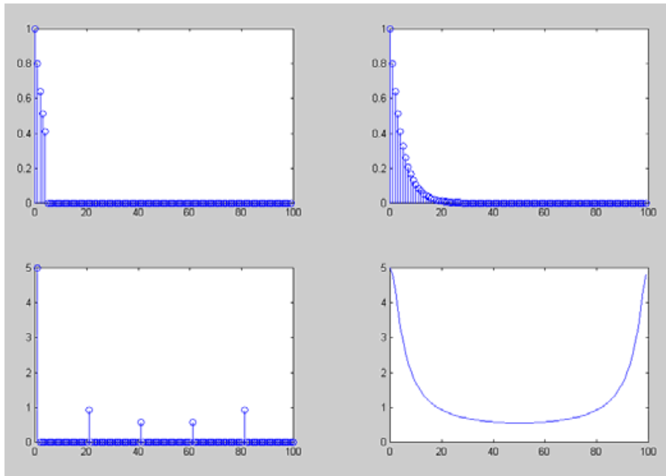
<u>Példa I.</u>

Legyen a diszkrét jelsorozat: $x(n) = u(n)\cdot a^n$, ahol $0 < a < 1$. A jel spektruma legyen mintavételezve a $\omega_k = 2\pi k/N$ helyeken, ahol $k = 0,1,\ldots,N-1$. Határozza meg a diszkrét jelsorozat spektrumát, a mintavett spektrumot, és a periodikus jelsorozatot! Írjon Matlab függvényt, ahol $a = 0.8$ és *N=5* illetve *50*!

<u>Megoldás I.</u>

Az *x(n)* Fourier transzformáltja: $X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$. Egyenletes időközönként mintát véve: $\omega_k = 2\pi k/N$, a minták pedig: $X(\omega_k) = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1-e^{-j2\pi k/N}}$, ahol $k = 0,1,\ldots,N-1$. Ekkor $x_p(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n-lN) = \sum_{l=-\infty}^{0} a^{n-lN} = a^n\sum_{l=0}^{\infty} a^{lN} = \frac{a^n}{1-a^N}$. Az $\frac{1}{1-a^N}$

reprezentálja az aliasing hatását. Az aliasing hiba $0 < a < 1$ és $N \to \infty$ esetén nullához tart.



```
clear
a=0.8;N=5;K=100;
x=a.^(0:K-1);
X=fft(x);
maszk=repmat(eye(1,length(X)/N),1,N);
Xk=X.*maszk;
xk=ifft(Xk);
subplot(221)
xk=K/N*[yk(1:N), zeros(1,length(x)-N)]
stem(0:K-1,xk)
subplot(222)
stem(0:K-1,x)
subplot(224)
plot(0:K-1,abs(X))
subplot(223)
stem(abs(Xk))
```

A DFT:

$$\boxed{X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}}, \text{ ahol } k=0,1,\ldots,N-1$$

Az IDFT:

$$\boxed{x_p(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi\frac{kn}{N}}}, \text{ ahol } n=0,1,\ldots,N-1$$

Példa II.

Egy véges hosszúságú jelsorozat legyen az $x(n)=\begin{cases}1 & ha \quad 0 \le n \le L-1 \\ 0 & \quad egyébként\end{cases}$. Határozza meg a sorozat N pontos DFT-jét ha $N \ge L$!

Megoldás II.

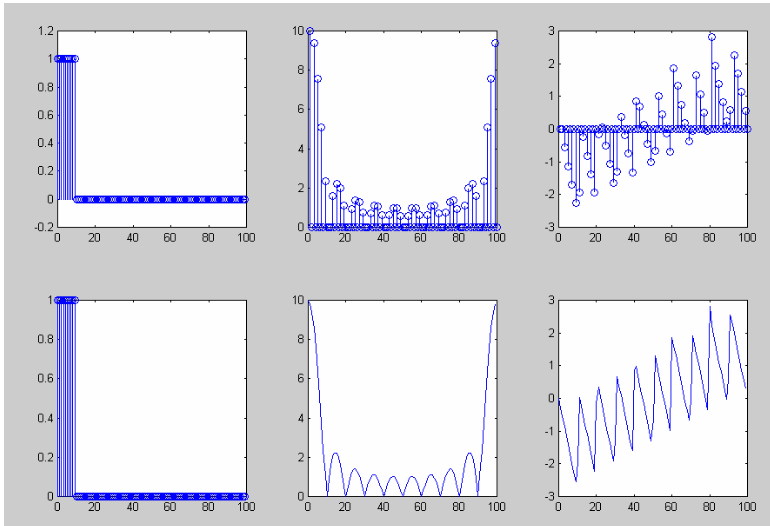
A sorozat Fourier transzformáltja:

$$X(\omega)=\sum_{n=0}^{L-1} x(n) e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$$

Az N pontos DFT pedig:

$$X(k)=\frac{1-e^{-j2\pi kL/N}}{1-e^{-j2\pi k/N}}=\frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)} e^{-j\pi k(L-1)/N}$$

```
clear
L=10;N=50;K=100;
x=[ones(1,L),zeros(1,K-L)];
X=fft(x);
maszk=repmat(eye(1,length(X)/N),1,N);
Xk=X.*maszk;
xk=ifft(Xk);
subplot(231)
xk=K/N*[yk(1:N), zeros(1,K-N)];
stem(0:K-1,kk)
subplot(232)
stem(abs(Xk))
subplot(233)
stem(angle(Xk))
subplot(234)
stem(0:K-1,x)
subplot(235)
plot(0:K-1,abs(X))
subplot(236)
plot(0:K-1,angle(X))
```



<u>A DFT mint lineáris transzformáció</u>

A DFT és az IDFT formulája megadható

$$\boxed{X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}}, \text{ ahol } k=0,1,\ldots,N-1$$

$$\boxed{x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}}, \text{ ahol } n=0,1,\ldots,N-1,$$

és $W_N = e^{-j2\pi/N}$.

Mátrixos alakba is átírható:

$$\overline{X}_N = \overline{\overline{W}}_N \overline{x}_N \text{ és } \overline{x}_N = \overline{\overline{W}}_N^{-1} \overline{X}_N = \frac{1}{N}\overline{\overline{W}}_N^{*} \overline{X}_N, \text{ ahol}$$

$$\overline{x}_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ . \\ . \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \text{ és } \overline{X}_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ . \\ . \\ X(N-1) \end{bmatrix}, \text{ valamint}$$

$$\overline{\overline{W}}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & . & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^{21} & W_N^{N-1} & . & W_N^{2(N-1)} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & . & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Példa III.

Számítsa ki az $x(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ DFT-jét.

Megoldás III.

Először a $\overline{\overline{W}}_4$ mátrixot kell meghatároznunk. Felismerve a mátrix periodicitás és szimmetria tulajdonságát: $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, azaz

$$\overline{\overline{W}}_4 = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

Ez alapján:

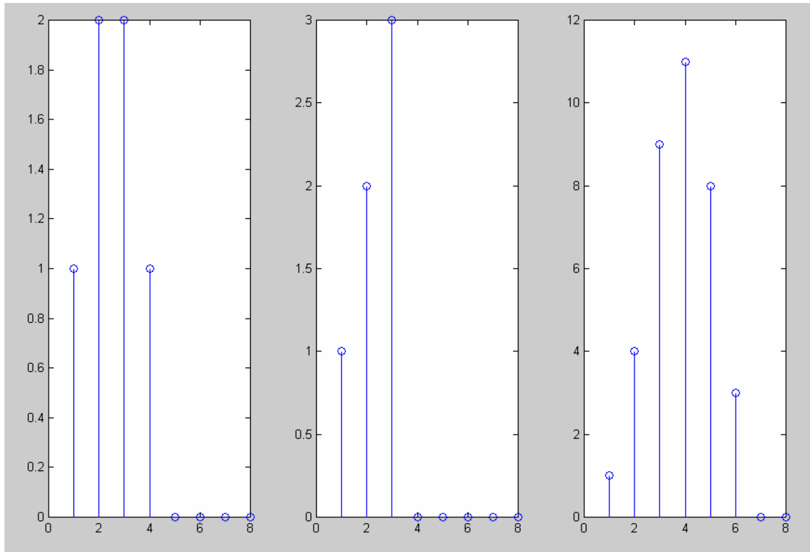
$$\overline{X}_4 = \overline{\overline{W}}_4 \overline{x}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{bmatrix}$$

Példa IV.

DFT és IDFT felhasználásával számítsa ki annak a FIR szűrőnek a válaszát, amelynek impulzusválasza: $h(n) = [1,2,3]$, és a bemeneti sorozat: $x(n) = [1,2,2,1]$

Megoldás IV.

```
clear
N=8
h=[1 2 3 ];
H=fft(h,N);
x=[1 2 2 1];
X=fft(x,N);
Y=H.*X;
y=ifft(Y)
subplot(131)
stem([x,zeros(1,N-length(x))])
subplot(132)
stem([h,zeros(1,N-length(h))])
subplot(133)
stem(abs(y))
```



A radix-2 FFT algoritmus

Végezzünk el egy $N = 2^{\nu}$ pontos DFT-t az előadáson megismert „oszd meg és uralkodj" elv alapján. Legyen $M = N/2$ és $L = 2$. Ezen választás alapján az N pontos jelsorozatot két $N/2$ pontos jelsorozatra bontható:

$f_1(n) = x(2n)$ a páros indexű elemek sorozat és

$f_2(n) = x(2n+1)$ a páratlan indexű elemek sorozata, ahol

$$n = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

Az N pontos DFT átírható:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{páros\_n} x(n) W_N^{kn} + \sum_{páratlan\_n} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_N^{2km} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_N^{k(2m+1)} \end{aligned},$$

ami, mivel $W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$ átírható:

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m) W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{N/2-1} x(2m+1) W_{N/2}^{km} = F_1(k) + W_N^k F_2(k),$$

ahol $k = 0,1,...N-1$, és az $F_1(k)$-ban ill. a $F_2(k)$-ban az $f_1(m)$ ill. $f_2(m)$ jelsorozat $N/2$ pontos DFT-je ismerhető fel. Belátható, hogy $F_1(k)$ és $F_2(k)$ $N/2$ szerint periodikus, azaz $F_1(k+N/2) = F_1(k)$ és $F_2(k+N/2) = F_2(k)$, és még az is, hogy $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$. Mindezekkel továbbírható az $X(k)$ kifejezése:

$$\boxed{\begin{aligned} X(k) &= F_1(k) + W_N^k \cdot F_2(k), \qquad && \text{ha } k = 0,1,...,\frac{N}{2}-1 \\ X(k+\frac{N}{2}) &= F_1(k) - W_N^k \cdot F_2(k), \qquad && \text{ha } k = 0,1,...,\frac{N}{2}-1 \end{aligned}}$$

Látható, hogy a szorzások száma: $2\left(N/2\right)^2 + N/2 = N^2/2 + N/2$, ami fele az N pontos direkt DFT-hez szükséges szorzásszámnak. A felbontást elvégezhető mind az $f_1(m)$, mind $f_2(m)$ jelsorozat esetén, majd a felbontottak is tovább bonthatóak, és így tovább, egészen addig, amíg a legalsó jelsorozatok csupán 2 elemből állnak (ez a ν-edik lépésben következik be). A szorzásspóroló nyereségünket a táblázat foglalja össze:

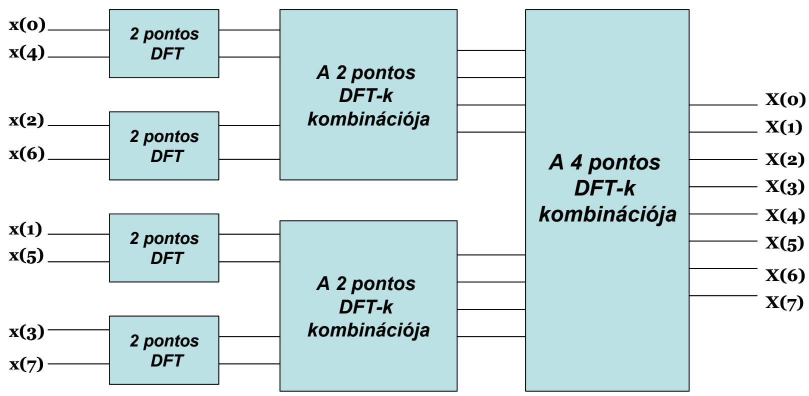
A pontok száma N	***Komplex szorzás direkt számítás esetén N^2***	***Komplex szorzás FFT esetén $(N/2)\log_2 N$***	***A sebességnekedési faktor***
4	16	4	4
8	64	12	5.3
16	256	62	8.0
32	1024	80	12.8
64	4096	192	21.3
128	16384	448	36.6
256	65536	1024	64
512	264144	2304	113.8
1024	1048576	5120	204.8

Példa V.

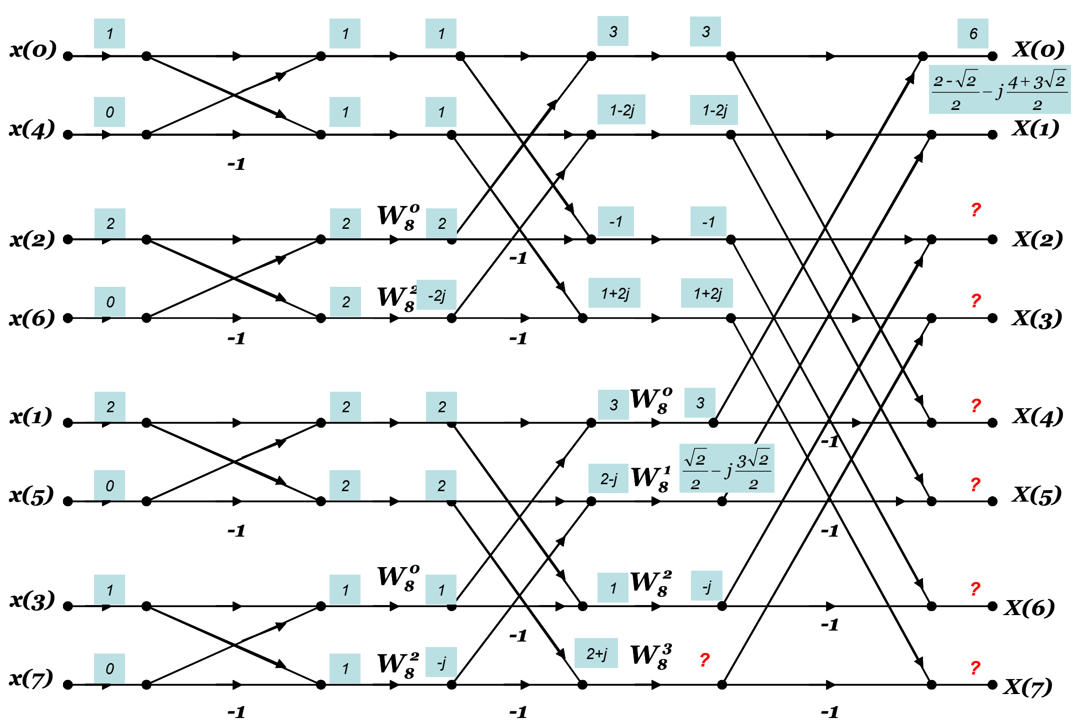
Számítsa ki az $x(n) = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$ 8 pontos DFT-jét, radix-2 FFT algoritmussal.

Megoldás V.

A megoldást segíti a következő ábra.



A fenti ábrát feldolgozva:



Az ilyen típusú „időben tizedelő” FFT megvalósítás „lepke” számítása látható az alábbi ábrán.