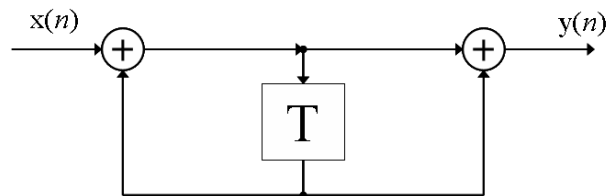


Megoldott feladatok

- 11.1)** Adja meg az alábbi rendszer impulzusválasz-függvényét Z-transzformáció segítségével!



Megoldás

A tároló bemenetén felvett $v(n)$ állapotváltozó segítségével az alábbi állapotváltozós két egyenlet írható fel:

$$v(n) = v(n-1) + x(n) \quad (\text{az állapotváltozó egyenlete}), \text{ és}$$

$$y(n) = v(n) + v(n-1) \quad (\text{a kimeneti egyenlet}),$$

amiből összevonás után felírható az $y(n) - y(n-1) = x(n) + x(n-1)$ rendszeregyenlet. A differencia egyenlet bal és jobb oldalának Z-transzformációja és rendezés után megkapjuk

$$\text{a } H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{z+1}{z-1} \text{ átviteli függvényt, aminek inverz Z-transzformáltja a keresett}$$

impulzusválasz függvény:

$$h(n) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} + z^{-1} \frac{z}{z-1} \right\} = u(n) + u(n-1).$$

- 11.2)** Adott egy szűrő $h(n) = u(n) [0.5^n - 3 \cdot 0.9^n]$ impulzusválasz függvénye. Rajzolja le a rendszer kanonikus blokkdiagramját!

Megoldás

Az impulzusválasz függvényből Z-transzformációval kapjuk meg az $H(z)$ átviteli

$$\text{függvényt: } H(z) = \frac{z}{z-0.5} - 3 \frac{z}{z-0.9} = \frac{-2z^2 + 0.6z}{(z-0.5)(z-0.9)} = \frac{-2 + 0.6z^{-1}}{1 - 1.4z^{-1} + 0.45z^{-2}}. \text{ Mivel az}$$

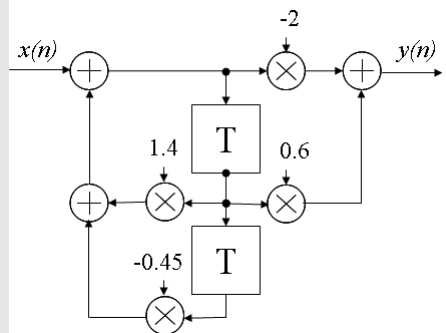
átviteli függvény a $Y(z)$ kimeneti és a $X(z)$ bemeneti Z transzformált hányadosa, ezért az

$$(1 - 1.4z^{-1} + 0.45z^{-2})Y(z) = (-2 + 0.6z^{-1})X(z) \text{ egyenlet írható fel, amiből inverz Z}$$

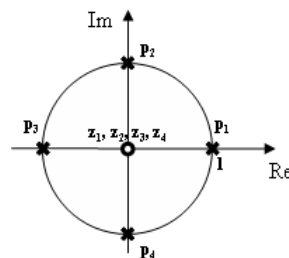
transzformáció után kapjuk a rendszeregyenletet:

$$y(n) - 1.4y(n-1) + 0.45y(n-2) = -2x(n) + 0.6x(n-1),$$

amiből a kanonikus alak már egyszerűen felrajzolható.



- 11.3)** Adott egy lineáris, időinvariáns rendszer pólus-zérus diagramja ($K=1$ erősítéssel). Adja meg a rendszer átviteli függvényét (a RoC konvergencia régióval együtt), a rendszert leíró differenciaegyenletet! Rajzolja le a rendszer kanonikus blokkdiagramját!

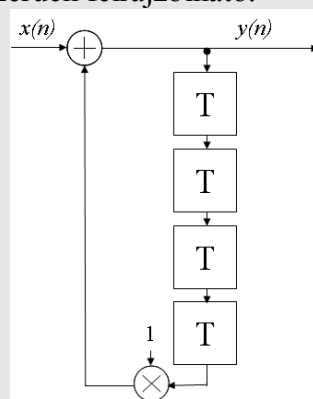


Megoldás

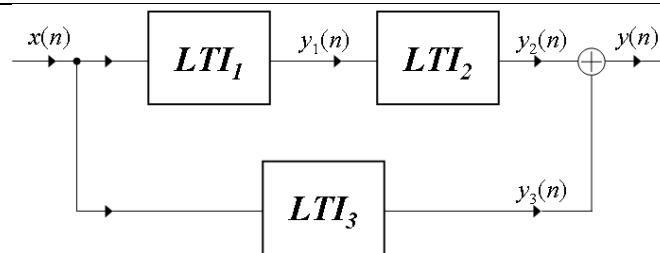
A pólus-zérus diagram alapján közvetlenül felírható a rendszer átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{z^4}{(z-j)(z+j)(z-1)(z+1)} = \frac{z^4}{z^4-1} = \frac{1}{1-z^{-4}}, \text{ és RoC: } |z| > 1. \text{ Az átviteli}$$

függvényből átszorzás és rendezés után kapjuk a $y(n) - y(n-4) = x(n)$ rendszeregyenlet, amiből a blokkdiagram már egyszerűen felrajzolható.



- 11.4)** Az ábrán látható módon az LTI_1 és LTI_2 rendszer kaszkád, és ezek eredőjével az LTI_3 rendszer paralel kapcsolódik.



Az egyes rendszerek adottak a következő módon:

$$LTI_1: y_1(n) + 0.1 \cdot y_1(n-1) = 1.1 \cdot x(n)$$

$$LTI_2: h_2(n) = u(n-1) \cdot 0.2^{n-1}$$

$$LTI_3: H_3(z) = -\frac{1.1}{z + 0.5}$$

- a) Adja meg az eredő átviteli függvényt (konvergencia régióval együtt)! Rajzolja le a rendszer pólus-zérus elrendezését! Stabil-e a rendszer?

Megoldás

b)

Az eredő átviteli függvény a részrendszerek átviteli függvényéből kapható meg:

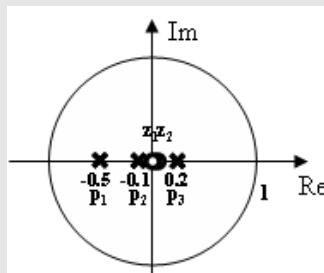
$$H(z) = H_1(z)H_2(z) + H_3(z),$$

ahol $H_1(z) = 1.1 \frac{1}{1 + 0.1z^{-1}}$ a differenciaegyenlet z-transzformációjából rendezés után

kapható meg, és $H_2(z) = Z\{h_2(n)\} = \frac{z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}}$ az impulzusválasz z-transzformáltja, ezzel az eredő átviteli függvény konkrét alakja a következő lesz:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1.1}{1 + 0.1z^{-1}} \frac{z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}} - \frac{1.1z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} = \frac{1.1z^{-1}(1 + 0.5z^{-1}) - 1.1z^{-1}(1 + 0.1z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})}{(1 + 0.1z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})} = \\ &= 1.1z^{-1} \frac{0.6z^{-1} + 0.02z^{-2}}{(1 + 0.1z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})} = 0.66z^{-1} \frac{z(z + 0.033)}{(z + 0.1)(z - 0.2)(z + 0.5)}. \end{aligned}$$

Az eredő rendszer stabil, mivel mindhárom pólusa az egységkörön belül helyezkedik el, a pólus-zérus kép az alábbi:



- 11.5)** Egy lineáris, időinvariáns rendszer az $x(n) = u(n) \cdot 2 \cdot 0.3^n$ gerjesztésre adott válasza:

$$y(n) = u(n) \cdot \left[-\frac{25}{3} \cdot 0.5^n - \frac{32}{3} \cdot 0.2^n + 21 \cdot 0.3^n \right]$$

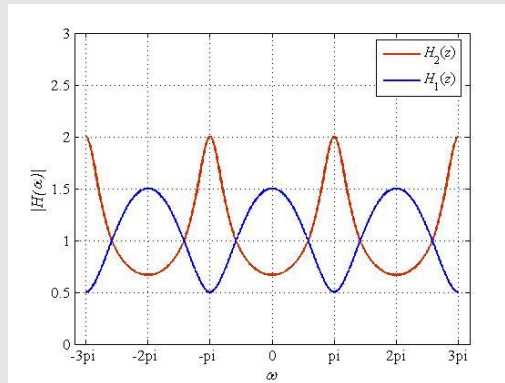
- a) Adja meg a rendszer átviteli függvényét (konvergencia régióval együtt)!

Az architektúra alapján az első rendszer FIR szűrő, a második rendszer IIR szűrő. Az átviteli függvényekből az átviteli karakterisztikák a $z=e^{j\omega}$ helyettesítéssel kapható meg:

$$|H_1(\omega)| = |1 + 0.5e^{-j\omega}| = \sqrt{(1 + 0.5\cos\omega)^2 + 0.25\sin^2\omega} = \sqrt{1.25 + \cos\omega},$$

illetve

$$|H_2(\omega)| = \frac{1}{|1 + 0.5e^{-j\omega}|} = \frac{1}{\sqrt{1.25 + \cos\omega}}.$$



A karakterisztikák alapján látható, hogy az első rendszer aluláteresztő, a második rendszer feluláteresztő jellegű szűrőt valósít meg.