

Megoldott feladatok

7.1) Adott egy lineáris, időinvaráns rendszer a következő differencia egyenlettel:

$$y(n) - 0.7y(n-1) + 0.1y(n-2) = 2x(n) - 0.4x(n-1) + 0.3x(n-2).$$

a) Adja meg a rendszer impulzusválasztát időtartománybeli megoldással

($x(n) = \delta(n)$, $y(-1) = y(-2) = 0$)! Eredményét ellenőrizze!

b) Adja meg a rendszer választ az $x(n) = u(n) \cdot 5 \cdot 0.5^n$ gerjesztés és $y(-1) = 30$, $y(-2) = 10$ kezdeti feltételek esetén az összetevőkre bontás módszerrel! Eredményét ellenőrizze!

c) Adja meg a rendszer átviteli függvényét! Milyen típusú a rendszer?

d) Rajzolja le a rendszer direkt és kanonikus blokkdiagramját! Jellemezze őket komplexitás szempontjából!

Megoldás

a)

A differencia egyenlet $\lambda^2 - 0.7\lambda + 0.1 = 0$ sajátérték egyenletéből kapjuk a $\lambda_1 = 0.2$ és $\lambda_2 = 0.5$ sajátértékeket, és ezzel a homogén megoldás a $y_h(n) = C_1 0.5^n + C_2 0.2^n$ alakú, ahol a C_1 és C_2 együtthatókat a behelyettesítésből kapott $y(1) = 1$ és $y(2) = 0.8$ alapján ($y(M-N+1)$ és $y(M-N+2)$) a következő egyenletekből számítjuk:

$$y(1) = 1 = C_1 0.5 + C_2 0.2 \text{ és}$$

$$y(2) = 0.8 = C_1 0.5^2 + C_2 0.2^2,$$

amiből $C_1 = 4$ és $C_2 = -5$, és ezt behelyettesítve a homogén megoldás kifejezésébe kapjuk az $h(n) = 2\delta(n) + u(n-1)[4 \cdot 0.5^n - 5 \cdot 0.2^n]$ impulzusválasz függvényt. Az $n=3$ formulába helyettesítés esetén a $y(3) = 5 \cdot 0.5^3 - 4 \cdot 0.2^3 = 0.46$ érték és a differencia egyenletből behelyettesítéssel kapott $y(3) = 0.46$ érték összevetéséből látható, hogy helyes a megoldás.

b)

A homogén megoldás az előző alfeladat alapján $y_h(n) = C_1 0.5^n + C_2 0.2^n$, ahol a C_1 és C_2 együtthatókat a teljes válasz ismeretében kell majd kiszámítani. A partikuláris megoldást a gerjesztés alapján a $y_p(n) = K \cdot n \cdot 0.5^n$ alakban keressük ($n \geq M$), mivel az

$x(n) = u(n) \cdot 5 \cdot (0.5)^n$ gerjesztés rezonál a rendszer $\lambda_2 = 0.5$ sajátértékével. A K együtthatót a differencia egyenletből behelyettesítéssel kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} K \cdot n \cdot 0.5^n - 0.7K \cdot (n-1)0.5^{n-1} + 0.1K \cdot (n-2)0.5^{n-2} = \\ = 2 \cdot 5 \cdot 0.5^n - 0.4 \cdot 5 \cdot 0.5^{n-1} + 0.3 \cdot 5 \cdot 0.5^{n-2}, \end{aligned}$$

amiből a bal és jobboldali polinomok egyeztetése után $K = 20$, és a partikuláris válasz $y_p(n) = 20 \cdot n \cdot 0.5^n$ alakú $n \geq M$, azaz $n \geq 2$ esetén. A differencia egyenlet megoldását a két megoldás összegeként $y_{\text{ált}}(n) = C_1 0.5^n + C_2 0.2^n + 20 \cdot n \cdot 0.5^n$ alakban adható meg, ahol C_1 és C_2 együtthatókat a behelyettesítésből kapott $y(1) = 21$ és $y(2) = 14.7$ alapján ($y(M-N+1)$

és $y(M - N + 2)$) a következő egyenletekből számítjuk:

$$y(1) = 21 = C_1 0.5^1 + C_2 0.2^1 + 20 \cdot 1 \cdot 0.5^1 \text{ és}$$

$$y(2) = 14.7 = C_1 0.5^2 + C_2 0.2^2 + 20 \cdot 2 \cdot 0.5^2$$

amiből $C_1 = \frac{50}{3}$ és $C_2 = \frac{40}{3}$. A differencia egyenlet megoldása a C_1 és C_2 együtthatók értékének behelyettesítése után:

$$y_{\text{ált}}(n) = 30\delta(n) + u(n-1) \left[\frac{50}{3} 0.5^n + \frac{40}{3} \cdot 0.2^n + 20 \cdot n \cdot 0.5^n \right].$$

Az $n=3$ formulába helyettesítés esetén a $y(3) = \frac{50}{3} 0.5^3 + \frac{40}{3} 0.2^3 + 20 \cdot 3 \cdot 0.5^3$ érték és a differencia egyenletből behelyettesítéssel kapott $y(3) = 9.69$ érték összevetéséből látható, hogy a megoldás helyes.

c)

Az átviteli függvényt megkaphatjuk az impulzusválaszból Z transzformáció alkalmazásával:

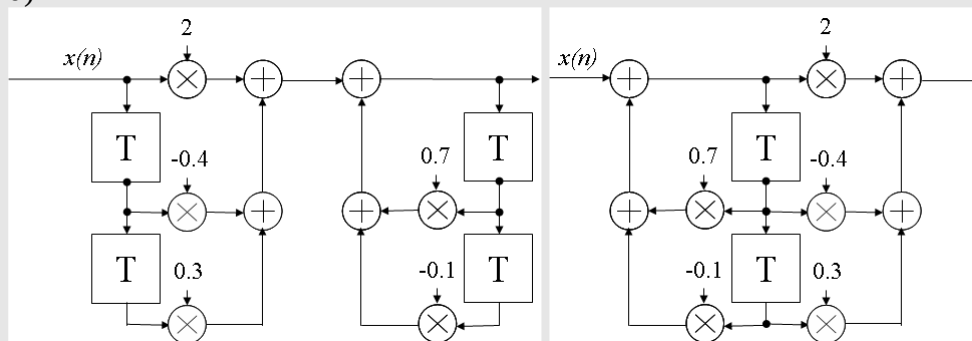
$$H(z) = Z \left\{ 2\delta(n) + u(n-1) \left[4 \cdot 0.5 \cdot 0.5^{n-1} - 5 \cdot 0.2 \cdot 0.2^{n-1} \right] \right\} = 2 + z^{-1} \frac{2z}{z-0.5} - z^{-1} \frac{z}{z-0.2},$$

ami közös nevezőre hozás és az összevonások után az $H(z) = \frac{2z^2 - 0.4z + 0.3}{(z-0.5)(z-0.2)}$ alakot ölti,

ahol a RoC $|z| > 0.5$.

Ugyanerre az eredményre jutunk a differencia egyenlet Z transzformációjának rendezéséből.

d)



7.2) Adott egy lineáris, idő invariáns rendszer a következő differencia egyenlettel:

$$y(n) - y(n-1) + 0.5y(n-2) = 2x(n) - x(n-1).$$

- Adja meg a rendszer válaszát az $x(n) = u(n)2n^2$ gerjesztés és $y(-1) = y(-2) = 0$ kezdeti feltételek esetén! Eredményét ellenőrizze!
- Adja meg a rendszer átviteli függvényét! Milyen típusú a rendszer?
- Rajzolja le a rendszer direkt (Direkt I) és kanonikus (Direkt II transposed) blokkdiagramját! Jellemezze őket komplexitás szempontjából!

Megoldás

a)

A differencia egyenlet $\lambda^2 - \lambda + 0.5 = 0$ sajátérték egyenletéből kapjuk a $\lambda_1 = 0.5 + 0.5j$ és $\lambda_2 = 0.5 - 0.5j$ sajátértékeket, és ezzel a homogén megoldás a következő alakú:

$$y_h(n) = C_1(0.5 - 0.5j)^n + C_2(0.5 + 0.5j)^n.$$

A partikuláris megoldást a gerjesztés alapján a $y_p(n) = A + Bn + Cn^2$ alakban keressük ($n \geq M$), ahol A, B, C együtthatókat a differencia egyenletből behelyettesítéssel kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} A + Bn + Cn^2 - A + B(n-1) + C(n-1)^2 + 0.5[A + B(n-2) + C(n-2)^2] = \\ = 2 \cdot 2n^2 - 2(n-1)^2, \end{aligned}$$

amiből a bal és jobboldali polinomok egyeztetése után $A = -12$, $B = 8$ és $C = 4$, és így a partikuláris válasz $y_p(n) = -12 + 8n + 4n^2$ alakú $n \geq 1$ esetén. A teljes megoldás a homogén és partikuláris megoldások összege:

$$y_{\text{ált}}(n) = C_1(0.5 - 0.5j)^n + C_2(0.5 + 0.5j)^n - 12 + 8n + 4n^2, \quad (n \geq 1 \text{ esetén})$$

ahol C_1 és C_2 együtthatókat a következő egyenletekből számítjuk:

$$y(-1) = 0 = C_1(0.5 - 0.5j)^{-1} + C_2(0.5 + 0.5j)^{-1} - 12 - 8 + 4$$

$$y(0) = 0 = C_1 + C_2 - 12,$$

amiből $C_1 = 6 - 2j$ és $C_2 = 6 + 2j$. A differencia egyenlet megoldása a C_1 és C_2 együtthatók értékének behelyettesítése és a koszinuszos átalakítás után:

$$y_{\text{ált}}(n) = u(n) \left[12.6492 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cos \left(n \frac{\pi}{4} + 18.43^\circ \right) - 12 + 8n + 4n^2 \right].$$

Az ellenőrzéshez felhasználjuk a behelyettesítésből nyert $y(1) = 4$, az általános megoldás az

$$n=2 \text{ helyen } y_{\text{ált}}(n) = 12.6492 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + 18.43^\circ \right) - 12 + 8 + 4 = 4, \text{ ami igazolja a formula}$$

helyességét.

b)

Az átviteli függvényhez szükségünk van a differencia egyenlet mindkét oldalának Z transzformációjára:

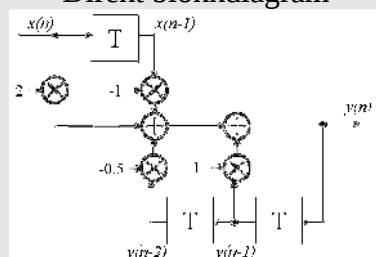
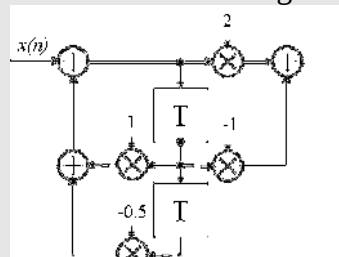
$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + 0.5z^{-2}Y(z) = 2X(z) - z^{-1}X(z),$$

amiből rendezés után kapjuk a szűrő átviteli függvényét:

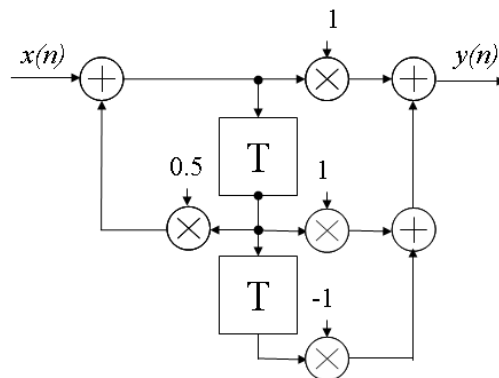
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}.$$

A rendszer egy rekurzív IIR szűrő.

c)

Direkt blokkdiagram**3 késleltető****Kanonikus blokkdiagram****2 késleltető**

7.3) Egy lineáris, időinvariáns rendszer adott az alábbi blokkdiagrammal:



- Adja meg az impulzusválaszt a rendszerhez tartozó differenciaegyenlet időtartománybeli megoldásával!
- Adja meg a rendszer válaszát az $x(n) = u(n)[0.5^n + 1]$ gerjesztésre relaxált rendszer esetén!

Megoldás

a)

A rendszert leíró differenciaegyenlet a kanonikus blokkdiagramból közvetlenül kiolvasható:
 $y(n) - 0.5y(n-1) = x(n) + x(n-1) - x(n-2)$.

A $h(n)$ impulzusválasz függvény a differenciaegyenlet $y_h(n) = C \cdot 0.5^n$ homogén megoldásából kapható meg, ahol a C együtthatót a behelyettesítésből kapott $y(2)$ értékből számolhatjuk, mivel $M - N + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$:

$$y(2) = -0.25 = C \cdot 0.5^2,$$

amiből $C = -1$ adódik, és ezzel az impulzusválasz a következő lesz:

$$h(n) = \delta(n) + 1.5 \cdot \delta(n-1) - u(n-2) \cdot 0.5^n.$$

A kapott eredmény helyes, mivel az $n=3$ helyettesítés esetén $h(3) = -0.125$ megegyezik a differenciaegyenletből kapott $y(3) = -0.125$ értékkel.

b)

Az $x(n) = u(n)[0.5^n + 1]$ gerjesztés és a rendszer $y_h(n) = C \cdot 0.5^n$ homogén válasza között rezonancia lép fel, amit a próbafüggvény megválasztása során figyelembe kell venni:

$$y_{pr}(n) = K_1 \cdot n \cdot 0.5^n + K_2,$$

ahol a K_1 , K_2 együtthatókat a differenciaegyenletbe helyettesítés után kapjuk meg:

$$K_1 \cdot n \cdot 0.5^n + K_2 - 0.5 \cdot K_1 \cdot (n-1) \cdot 0.5^{n-1} - 0.5 \cdot K_2 = 0.5^n + 1 + 0.5^{n+1} + 1 - 0.5^{n-2} - 1,$$

amiből a zárójel felbontása és egyszerűsítések után

$$K_2 - K_1 \cdot 0.5^n - 0.5 \cdot K_2 = -0.5^n + 1$$

adódik, és ebből végül a $K_1 = 1$ és $K_2 = 2$ együtthatókat behelyettesítve a homogén és partikuláris összetevőkből kapjuk a teljes megoldást:

$$y_{\text{ált}}(n) = C \cdot 0.5^n + n \cdot 0.5^n + 2,$$

ahol a C együtthatót a fokozatos behelyettesítésből kapott $y(1) = 4.5$ alapján ($y(M-N)$) a következő egyenletből kapjuk meg:

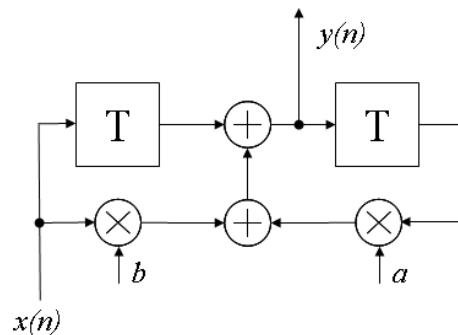
$$y_{\text{ált}}(n=1) = C \cdot 0.5^1 + 1 \cdot 0.5^1 + 2 = 4.5,$$

amiből $C = 4$, és a keresett válasz alakja:

$$y_{\text{ált}}(n) = 2\delta(n) + u(n-1) \left[4 \cdot 0.5^n + n \cdot 0.5^n + 2 \right],$$

aminek helyességét igazolja, hogy $n=2$ formulába helyettesítés esetén kapott $y_{\text{ált}}(2) = 3.5$ megegyezik a fokozatos behelyettesítéssel kapott $y(2) = 3.5$ értékkel.

7.4) Adott az alábbi lineáris idővariáns rendszer! Adja meg a rendszer válaszát az $x(n) = u(n)a^n$ gerjesztés és relaxált rendszer esetén! Milyen a és b koefficiens esetén BIBO stabil a rendszer?



Megoldás

A blokkdiagram alapján felírható a rendszert leíró alábbi, elsőfokú differenciaegyenlet:

$$y(n) - a \cdot y(n-1) = b \cdot x(n) + x(n-1).$$

A differenciaegyenlet megoldását összetevőkre bontással végezzük, a homogén megoldást az $y_h(n) = C \cdot a^n$ alakban keressük, ahol a C együtthatót a kezdeti feltételek alapján fogjuk meghatározni. A partikuláris választ próbafüggvény módszerrel számítjuk, mivel az $x(n) = u(n)a^n$ gerjesztés és a homogén megoldás között rezonancia lép fel, a választott próbafüggvény a $y_{pr}(n) = u(n) \cdot K \cdot n \cdot a^n$ lesz, ahol a K együtthatót a differenciaegyenletbe történő behelyettesítés után az alábbi egyenletből kapjuk:

$$K \cdot n \cdot a^n - a \cdot K \cdot (n-1) \cdot a^{n-1} = b \cdot a^n + a^{n-1},$$

amiből $K = b + \frac{1}{a}$. A differenciaegyenlet általános megoldása a homogén és a partikuláris válasz összegeként adódik:

$$y_{\text{ált}}(n) = C \cdot a^n + \left(b + \frac{1}{a} \right) \cdot n \cdot a^n,$$

ahol a C együttható a differenciaegyenletből fokozatos behelyettesítéssel kapott $y(0) = b$ válasz alapján (mivel $M - N = 1 - 1 = 0$) kapható meg:

$$y_{\text{ált}}(n=0) = C = b,$$

és ezzel a válasz végső alakja a következő:

$$y_{\text{ált}}(n) = u(n) \left[b \cdot a^n + \left(b + \frac{1}{a} \right) \cdot n \cdot a^n \right],$$

aminek helyességét az $y_{\text{ált}}(n=1) = 2ab + 1$ és a fokozatos behelyettesítéssel kapott $y(1) = 2ab + 1$ egyenlősége igazol.

Feladatok a gyakorlatra**7.5)** Adott lineáris, időinvariáns rendszer az alábbi rendszeregyenlettel:

$$y(n) - y(n-1) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$$

- a) Adja meg a rendszer impulzusválaszát!
- b) Az $x(n) = u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^n$ gerjesztés esetén adja meg a rendszer válaszát a rendszert leíró differencia egyenlet időbeli megoldásával, relaxált rendszer esetén !
- c) Az $x(n) = u(n)$ gerjesztés esetén adja meg a rendszer válaszát a rendszert leíró differencia egyenlet időbeli megoldásával, relaxált rendszer esetén !

Megoldás:A rendszer fokai: $N = 1, \quad M = 2$ A rendszeregyenlet alapján a karakterisztikus polinom: $\lambda - 1 = 0$ A karakterisztikus egyenlet gyöke: $\lambda_1 = 1,$ amely alapján a homogén válasz: $y_h(n) = C_1 \cdot 1^n = C_1,$ ahol C_1 együttható a kezdeti feltételekből számítandó majd a későbbiekben.

- a) A rendszer impulzusválaszát megkaphatjuk, ha a gerjesztést $x(n) = \delta(n)$ -nek és a kezdeti állapotot relaxálnak ($y(n) \equiv 0, \forall n < 0$) vesszük. Így az impulzusválasz megkapható a homogén megoldásból ha a C_1 együtthatót megoldjuk a kezdeti feltételekből azután az időpont után, ahol a rendszerre a gerjesztés utoljára hat közvetlenül:

$$y_h(n) = C_1 \cdot 1^n \quad n = M - N + 1 = 2$$

amihez ismernünk kell a rendszer állapotát az $n = 2$ időpontban. Ezt rendszeregyenlet a rekurzív megoldásával tudhatjuk meg:

$$y(n) = y(n-1) + \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$y(-1) = 0$$

$$y(0) = y(-1) + \delta(0) + \delta(-1) + \delta(-2) = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$$

$$y(1) = y(0) + \delta(1) + \delta(0) + \delta(-1) = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$$

$$y(2) = y(1) + \delta(2) + \delta(1) + \delta(0) = 2 + 0 + 0 + 1 = 3$$

$$y_h(2) = C_1 \cdot 1^2 = 3$$

$$C_1 \rightarrow 3$$

így a rendszer impulzus válasza: $h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 31^n \cdot u(n-2)$

b) A gerjesztés $x(n) = u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^n$. A vizsgálójelek módszerével megállapítjuk, hogy

erre a típusú gerjesztésre a rendszer általános partikuláris megoldása a következő

$$\text{alakú lesz: } y_{pGeneral}(n) = K_1 \cdot u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Megkeressük az együtthatót úgy hogy visszahelyettesítünk a rendszeregyenletbe a gerjesztéssel és az általános partikuláris megoldással:

$$x(n) \leftarrow u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^n, y(n) \leftarrow K_1 \cdot u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y(n) - y(n-1) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$$

$$K_1 \cdot u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^n - K_1 \cdot u(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^n + u(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + u(n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

Mivel azt szeretnénk, hogy az egyenlet minden tagja hozzájáruljon a megoldáshoz, ezért $n \geq 2$ kell legyen.

$$K_1 \cdot u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^n - K_1 \cdot u(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^n + u(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + u(n-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, n \geq 2$$

$$K_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - K_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \Big/ \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 2$$

$$K_1 - K_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$K_1 - 2K_1 = 1 + 2 + 4$$

$$K_1 = -7$$

Ez a megoldásrész azonban csak $n \geq M + 1$ esetén írja le teljesen a partikuláris megoldást, az $n < M + 1$ időkre a végén korrigálással térünk vissza.

$$\text{A partikuláris megoldásunk tehát } y_p(n) = -7 \cdot u(n) \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \geq M + 1$$

A homogén megoldás N együtthatóját megkaphatjuk a rendszeregyenlet rekurzív megoldásának és kapott eredmények összevetésével az $M - N + 1 \leq n \leq M$ (N db egyenlet, N db ismeretlen)

$$\begin{aligned}
 y_{\text{recursion}}(M-N+1) &= \sum_{l=1}^N C_l \lambda_l^{M-N+1} + y_p(M-N+1) \\
 y_{\text{recursion}}(M-N+2) &= \sum_{l=1}^N C_l \lambda_l^{M-N+2} + y_p(M-N+2) \\
 &\vdots \\
 y_{\text{recursion}}(M) &= \sum_{l=1}^N C_l \lambda_l^M + y_p(M)
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow y_{\text{recursion}}(2) = C_1 - 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y(-1) = 0$$

$$y(0) = y(-1) + u(0) \left(\frac{1}{2}\right)^0 + u(-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + u(-2) \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$$

$$y(1) = y(0) + u(1) \left(\frac{1}{2}\right)^1 + u(0) \left(\frac{1}{2}\right)^0 + u(-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{2} + 1 + 0 = \frac{5}{2}$$

$$y(2) = y(1) + u(2) \left(\frac{1}{2}\right)^2 + u(1) \left(\frac{1}{2}\right)^1 + u(0) \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{17}{4}$$

$$\frac{17}{4} = C_1 - \frac{7}{4} \Rightarrow C_1 = \frac{24}{4} = 6$$

A megoldás tehát

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = u(n-2) \left(6 \cdot 1^n - 7 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right), n \geq M-N+1 = 2, \text{ ezért még a}$$

maradék tagokat $w_i \delta(n-i)$ -el ki kell igazítanunk, azaz a rekurzív megoldás megfelelő tagjai lesznek a súlyok, így a teljes megoldás:

$$y(n) = \delta(n) + \frac{5}{2} \delta(n-1) + \underbrace{u(n-2) \left(6 \cdot 1^n - 7 \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)}_{g(n)}$$

A megoldás ellenőrzése:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$y_{\text{recursive}}(n)$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{41}{8}$	$\frac{89}{16}$	$\frac{185}{32}$	$\frac{377}{64}$	$\frac{761}{128}$	$\frac{1529}{256}$	$\frac{3065}{512}$	$\frac{6137}{1024}$	$\frac{12281}{2048}$
$g(n)$	0	0	$\frac{17}{4}$	$\frac{41}{8}$	$\frac{89}{16}$	$\frac{185}{32}$	$\frac{377}{64}$	$\frac{761}{128}$	$\frac{1529}{256}$	$\frac{3065}{512}$	$\frac{6137}{1024}$	$\frac{12281}{2048}$
w_i	1	$\frac{5}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y_{\text{analytic}}(n)$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{41}{8}$	$\frac{89}{16}$	$\frac{185}{32}$	$\frac{377}{64}$	$\frac{761}{128}$	$\frac{1529}{256}$	$\frac{3065}{512}$	$\frac{6137}{1024}$	$\frac{12281}{2048}$

- c) A gerjesztés $x(n) = u(n)$. A vizsgálójelek módszerével megállapítjuk, hogy erre a típusú gerjesztésre a rendszer általános partikuláris megoldása a következő alakú

lesz: $y_{pGeneral}(n) = K_1 \cdot n \cdot u(n) 1^n$, mert a gerjesztés rezonál a homogén megoldással.

Megkeressük az együtthatót úgy hogy visszahelyettesítünk a rendszeregyenletbe a gerjesztéssel és az általános partikuláris megoldással:

$$x(n) \leftarrow u(n), y(n) \leftarrow K_1 \cdot n \cdot u(n)$$

$$y(n) - y(n-1) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$$

$$K_1 \cdot n \cdot u(n) - K_1 \cdot (n-1) \cdot u(n-1) = u(n) + u(n-1) + u(n-2)$$

Mivel azt szeretnénk, hogy az egyenlet minden tagja hozzájáruljon a megoldáshoz, ezért $n \geq \max(N, M) = 2$ kell legyen.

$$K_1 \cdot n \cdot u(n) - K_1 \cdot (n-1) \cdot u(n-1) = u(n) + u(n-1) + u(n-2), n \geq 2$$

$$K_1 \cdot n - K_1 \cdot (n-1) = 1 + 1 + 1, n \geq 2$$

Ez a megoldásrész

$$K_1 = 3$$

azonban csak $n \geq M + 1$ esetén írja le teljesen a partikuláris megoldást, az $n < M + 1$ időkre a végén korrigálással térünk vissza.

A partikuláris megoldásunk tehát $y_p(n) = 3u(n), n \geq M + 1$

A homogén megoldás N együtthatóját megkaphatjuk a rendszeregyenlet rekurzív megoldásának és kapott eredmények összevetésével az $M - N + 1 \leq n \leq M$ (N db egyenlet, N db ismeretlen) időkre:

$$y_{\text{recursion}}(M - N + 1) = \sum_{l=1}^N C_l \lambda_l^{M-N+1} + y_p(M - N + 1)$$

$$y_{\text{recursion}}(M - N + 2) = \sum_{l=1}^N C_l \lambda_l^{M-N+2} + y_p(M - N + 2) \Leftrightarrow y_{\text{recursion}}(2) = C_1 + 3n u(n)$$

$\vdots$

$$y_{\text{recursion}}(M) = \sum_{l=1}^N C_l \lambda_l^M + y_p(M)$$

$$y(-1) = 0$$

$$y(0) = y(-1) + u(0) + u(-1) + u(-2) = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$$

$$y(1) = y(0) + u(+1) + u(0) + u(-1) = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$$

$$y(2) = y(+1) + u(+2) + u(+1) + u(0) = 3 + 1 + 1 + 1 = 6$$

$$6 = C_1 + 3 \cdot 2$$

$$C_1 \leftarrow 0$$

A megoldás tehát

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = u(n-2)(0 \cdot 1^n + 3n), n \geq M - N + 1 = 2, \text{ ezért még a maradék}$$

tagokat $w_i \delta(n-i)$ -el ki kell igazítanunk, azaz a rekurzív megoldás megfelelő tagjai

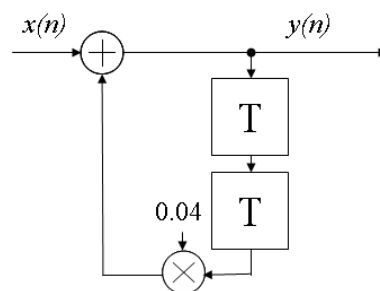
lesznek a súlyok, így a teljes megoldás:

$$y(n) = \delta(n) + 3\delta(n-1) + \underbrace{u(n-2)(3n)}_{g(n)}$$

A megoldás ellenőrzése:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$y_{recursive}(n)$	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
$g(n)$	0	0	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
w_i	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y_{analytic}(n)$	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33

7.6) Adott az alábbi lineáris időinvariáns rendszer az alábbi blokkdiagrammal:



- Adja meg a szűrő válaszát az $x(n) = u(n)$ gerjesztésre! Mi lesz a kimenet állandósult állapota?
- Adja meg a rendszer impulzusválaszát!

Megoldás

A blokkdiagram alapján az alábbi egyenlet írható fel: $y(n) - 0.04y(n-2) = x(n)$

A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{0.04} = \pm 0.2$,

amely alapján a homogén válasz: $y_h(n) = C_1 \cdot 0.2^n + C_2 \cdot (-0.2)^n$,

ahol $C_{1,2}$ együtthatók a kezdeti feltételekből számítandóak majd a későbbiekben.

a) A rendszer partikuláris válaszát a $x(n) = u(n)$ gerjesztés alapján a $y_{pr}(n) = K$ alakban keressük, ahol a K együtthatót a differencia egyenletbe történő behelyettesítés után a következő egyenletből kapjuk:

$K - 0.04 \cdot K = 1$, amiből $K = 1 / 0.96 = 1.041667$, és ezzel a rendszer válasza a következő alakú:

$$y_{alt}(n) = C_1 \cdot 0.2^n + C_2 \cdot (-0.2)^n + 100/96, \text{ ha } n \geq M - N = 0 - 2 = -2.$$

A $C_{1,2}$ együtthatót az $y(-2) = y(-1) = 0$ kezdeti feltételek alapján a következő egyenletekből számítjuk (lehetne $y(-2)$ alapján is számolni, de egyszerűbb $y(-1), y(0)$ -t használni):

$$y(-1) = 0 = C_1 \cdot 0.2^{-1} + C_2 \cdot (-0.2)^{-1} + 100/96 \rightarrow C_1 - C_2 = (-100/96) \cdot 0.2 = -5/24$$

$$y(0) = 0.04y(-2) + x(0) = 1 = C_1 \cdot 0.2^0 + C_2 \cdot (-0.2)^0 + 100/96 \rightarrow C_1 + C_2 = -4/96 = -1/24,$$

↓

$$C_1 = C_2 - 5/24 \text{ és ezt behelyettesítve a másodikba: } C_2 - 5/24 + C_2 = -1/24 \rightarrow$$

$$C_2 = 2/24 \text{ és } C_1 = -3/24$$

Tehát a keresett válasz általános megoldása

$$y_{\text{ált}}(n) = u(n+2) \left[-3/24 \cdot 0.2^n + 2/24 \cdot (-0.2)^n + 100/96 \right] \text{ alakú lesz.}$$

A formula helyességét az is igazolja, hogy a behelyettesítéssel kapott $y(-2) = 0$

meg egyezik a formulából kapott $y_{\text{ált}}(-2) = -3/24 \cdot 0.2^{-2} + -3/24 \cdot (-0.2)^{-2} + 100/96 = 0$ értékkel.

b) A rendszer impulzusválaszát a homogén válaszból kapjuk:

$$h(n) = y_h(n) = C_1 \cdot 0.2^n + C_2 \cdot (-0.2)^n, \text{ ha } n \geq M - N + 1 = 0 - 2 + 1 = -1$$

A $C_{1,2}$ együtthatót az $y(-1) = 0, y(0) = 1$ kezdeti feltételek alapján a következő egyenletekből számítjuk:

$$y(-1) = 0 = C_1 \cdot 0.2^{-1} + C_2 \cdot (-0.2)^{-1} \rightarrow C_1 - C_2 = 0$$

$$y(0) = 1 = C_1 \cdot 0.2^0 + C_2 \cdot (-0.2)^0 \rightarrow C_1 + C_2 = 1$$

↓

$$C_1 = C_2 = 0.5$$

Tehát a rendszer impulzusválasza a következő formában áll elő:

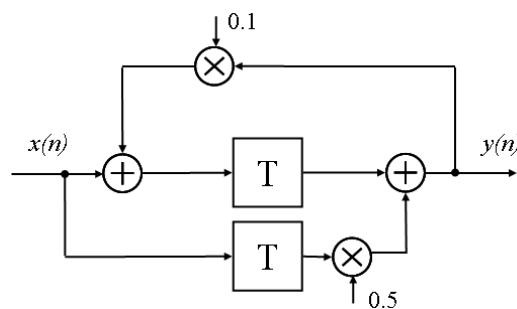
$$h(n) = u(n+1) \cdot \left[0.5 \cdot 0.2^n + 0.5 \cdot (-0.2)^n \right]$$

A formula helyességét az is igazolja, hogy a behelyettesítéssel kapott $y(1) = 0$

meg egyezik a formulából kapott $y_{\text{ált}}(1) = 0.5 \cdot 0.2^1 + 0.5 \cdot (-0.2)^1 = 0$ értékkel (illetve

$y_{\text{ált}}(2) = 0.5 \cdot 0.2^2 + 0.5 \cdot (-0.2)^2 = 0.04$ is helyes eredményre vezet)

7.7) Adott az alábbi lineáris időinvariáns rendszer! Töltse ki a táblázatot! A rendszer a gerjesztések rákapcsolása előtt minden esetben relaxált állapotú!



Gerjesztés	Válasz
$x_1(n) = u(n)0.1^n$	
$x_2(n) = u(n-1)0.1^{n-1}$	
$x_3(n) = u(n)0.5^n$	$y(n) = u(n) \left[-\frac{15}{4} \cdot 0.1^n - \frac{15}{4} \cdot 0.5^n \right]$
$x_4(n) = u(n) \left[0.1^n + 0.5^n \right]$	

Megoldás

A blokkdiagram alapján az alábbi két egyenlet írható fel:

$$u(n) = x(n) + 0.1y(n) \text{ (a felső tároló állapotváltozójára vonatkozó), és}$$

$$y(n) = u(n-1) + 0.5x(n-1) \text{ (kimeneti egyenlet),}$$

Amely két egyenletből behelyettesítés után kifejezhető a $y(n) - 0.1y(n-1) = 1.5x(n-1)$

rendszer egyenlet. A rendszer válasza az $x_1(n) = u(n)0.1^n$ gerjesztésre időtartománybeli analízisből, összetevőkre bontással számolható. A rendszer homogén válaszát megkapjuk a karakterisztikus egyenlet gyöke(i) alapján:

$$y_h(n) = C \cdot 0.1^n,$$

ahol C együttható a kezdeti feltételekből számítandó. A rendszer partikuláris válaszát a gerjesztés alapján a $y_{pr}(n) = K \cdot n \cdot 0.1^n$ alakban keressük, ahol a K együtthatót a differencia egyenletbe történő behelyettesítés után a következő egyenletből kapjuk:

$$K \cdot n \cdot 0.1^n - 0.1 \cdot K \cdot (n-1) \cdot 0.1^{n-1} = 1.5 \cdot 0.1^{n-1},$$

amiből $K = 15$, és ezzel a rendszer válasza a következő alakú:

$$y_{\text{alt}}(n) = C \cdot 0.1^n + 15 \cdot n \cdot 0.1^n, \text{ ha } n \geq 0.$$

A C együtthatót az $y(-1) = 0$ kezdeti feltétel alapján a következő egyenletből számítjuk:

$$y(0) = 0 = C,$$

tehát a keresett válasz általános megoldása $y_{\text{alt}}(n) = u(n) \left[15 \cdot n \cdot 0.1^n \right]$ alakú lesz. A formula

helyességét az is igazolja, hogy a behelyettesítéssel kapott $y(1) = 1.5$ megegyezik a

formulából kapott $y_{\text{alt}}(n) = 15$ értékkel. A táblázat a következőképpen töltendő ki:

Gerjesztés	Válasz	Megjegyzés
$x_1(n) = u(n)0.1^n$	$y_1(n) = u(n) \left[15 \cdot n \cdot 0.1^n \right]$	A fenti számítás alapján.
$x_2(n) = u(n-1)0.1^{n-1}$	$y_2(n) = u(n-1) \left[15 \cdot (n-1) \cdot 0.1^{n-1} \right]$	Időinvariancia miatt.
$x_3(n) = u(n)0.5^n$	$y_3(n) = u(n) \left[-\frac{15}{4} \cdot 0.1^n - +\frac{15}{4} \cdot 0.5^n \right]$	
$x_4(n) = u(n) \left[0.1^n + 0.5^n \right]$	$y_4(n) = u(n) \left[15 \cdot n \cdot 0.1^n - \frac{15}{4} \cdot 0.1^n - +\frac{15}{4} \cdot 0.5^n \right]$	Linearitás miatt.

Feladatok otthoni kidolgozásra

7.8) Összetevőkre (homogén és parciális) bontással oldja meg az alábbi differencia egyenleteket:

a) $y(n) - 0.25y(n-1) = 2x(n) - x(n-1)$

- $x(n) = u(n)0.8^n$ és $y(-1) = 0$

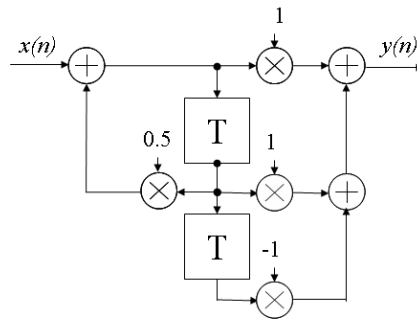
- $x(n) = u(n)0.5^n$ és $y(-1) = 0$

- $x(n) = u(n)10 \cos(n\pi/10)$ és $y(-1) = 0$

b) $y(n) + 0.16y(n-2) = 2x(n-1) + 0.32x(n-2)$

- $x(n) = u(n)$ (átviteli függvény) és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)0.5^n$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = \delta(n)$ (impulzusválasz) és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
- c) $y(n) - 0.5y(n-1) = x(n) + x(n-1) - x(n-2)$
- $x(n) = u(n)$ és $y(-1) = 0.5$
 - $x(n) = u(n)0.5^n$ és $y(-1) = 0.5$
 - $x(n) = u(n)n$ és $y(-1) = 0.5$
- d) $y(n) - 0.6y(n-1) + 0.05y(n-2) = x(n) - 1.1x(n-1)$
- $x(n) = u(n)$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)0.2^n$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)0.5^n$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
- e) $y(n) + 0.1y(n-1) - 0.06y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$
- $x(n) = u(n)\cos(0.5n)$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)\sin(0.5n)$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)n^2$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
- f) $y(n) - 0.4y(n-1) + 0.04y(n-2) = x(n) + x(n-2)$
- $x(n) = u(n)$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)0.2^n$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
 - $x(n) = u(n)\cos(0.5n)$ és $y(-1) = 0, y(-2) = 0$
- g) $y(n) - 0.5y(n-1) = x(n) - 5x(n-1) + 6x(n-2)$
- $x(n) = u(n)$ és $y(-1) = 0$
 - $x(n) = u(n)0.5^n$ és $y(-1) = 0$
 - $x(n) = u(n)n$ és $y(-1) = 0$

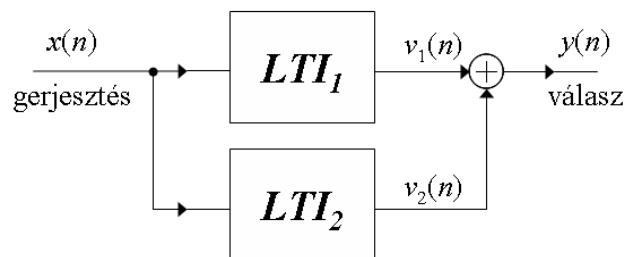
7.9) Egy lineáris, időinvariáns rendszer adott az alábbi blokkdiagrammal. Adja meg az impulzusválaszt a rendszerhez tartozó differenciaegyenlet időtartománybeli megoldásával!



7.10) Két lineáris időinvariáns rendszer párhuzamos kapcsolásából alakítható ki egy eredő szűrő, ahol LTI1 és LTI2 szűrő az alábbi differenciaegyenletekkel adott:

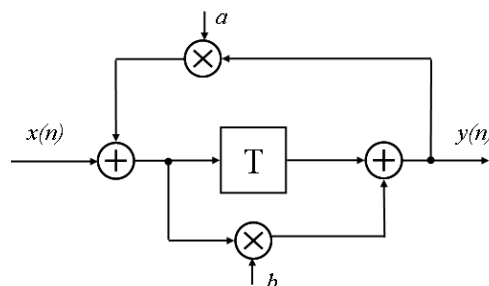
$$\text{LTI1: } y(n) - y(n-1) = x(n) + x(n-1);$$

$$\text{LTI2: } y(n) - 0.5y(n-1) = 0.5x(n).$$



- Adja meg az eredő rendszer impulzusválaszát!
- Adja meg a rendszer $x(n) = u(n)0.5^n$ gerjesztésre adott válaszát differenciaegyenlet időtartománybeli megoldásával, ha rendszer relaxált állapotban volt!

7.11) Adott az alábbi lineáris szűrő. Milyen a és b paraméter esetén BIBO stabil a rendszer? Rajzolja fel a BIBO stabilitás tartományát az $a - b$ paramétersíkon! Adja meg a szűrő impulzusválaszát!



7.12) Milyen a oefficiens esetén BIBO stabil az alábbi szűrő?

