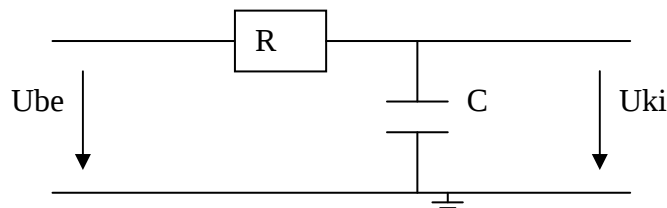


A folytonos rendszereknél láttuk, hogy a Laplace transzformáció hasznos, mert a differenciál egyenletek helyett algebrai egyenletekkel tudjuk jellemezni a vizsgált rendszert.

5.1) Adott egy első fokú alul áteresztő szűrő (sima RC áramkör) Adja meg a kimenő feszültség átviteli függvényét!

Ábrázolja az átviteli függvény amplitúdó karakteristikáját a komplex sík felett, ha $R=220\text{ k}\Omega$, $C=8\text{ }\mu\text{F}$

Jelölje a komplex sík felett a jel amplitúdó spektrumát.



Megoldás

Tudjuk, hogy $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$, $Z_R(s) = R$, $Z_L(s) = sL$ és

$$U_{ki}(s) = Z_C(s) \cdot I_C(s) \text{ (Ohm összefüggés)}$$

mivel $I_C(s) = \frac{U_{be}(s)}{Z_R(s) + Z_C(s)}$, mert az áram sorban végigfolyik az ellenálláson és a kondenzátoron. (Kirchoff csomóponti törvény)

$$\text{Ezért } U_{ki}(s) = Z_C(s) \cdot \frac{U_{be}(s)}{Z_R(s) + Z_C(s)}$$

A kimenet és a bemenet közti arány Laplace tartományban:

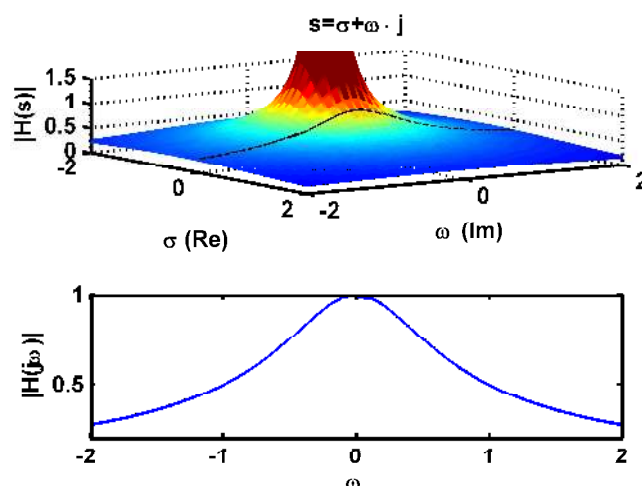
$$\frac{U_{ki}(s)}{U_{be}(s)} = \frac{Z_C(s)}{Z_R(s) + Z_C(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC}$$

A rendszer átviteli függvénye az adott paraméterek mellett tehát:

$$R = 220 \cdot 10^3, \quad C = 8 \cdot 10^{-6}$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{ki}(s)}{U_{be}(s)} &= \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + s \frac{44}{25}} \\ &= \frac{25/44}{25/44 + s} \end{aligned}$$

A Fourier transzformáció és a Laplace transzformáció között a kapcsolatot a $s = j\omega$ teremti meg, ezért az imaginárius tengely menti metszet a Fourier transzformált.



5.2) Adja meg a $H(s) = \frac{s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 3s + 3}{s^2 + 2s + 4}$ racionális törtfüggvényt

$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{A(s)}$ alakban. Használja a polinom hosszú osztás algoritmusát

Megoldás

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{A(s)}, \quad H(s) = \frac{s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 3s + 3}{s^2 + 2s + 4}$$

$$(s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 3s + 3) : (s^2 + 2s + 4) =$$

először elosztjuk a legnagyobb foksámú tagot az osztó legnagyobb foksámú tagjával, hogy megkapjuk az első tagját hányadosnak

$$s^5 / s^2 = s^3$$

visszaszorozzuk az osztót az eredménnyel hogy megkapjuk, milyen hibát vétettünk

$$s^3 \cdot (s^2 + 2s + 4) = s^5 + 2s^4 + 4s^3$$

kivonjuk a hibát az osztandóból, hogy egyel kisebb fokú polinómot kapjunk.

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 3s + 3 - (s^5 + 2s^4 + 4s^3) =$$

$$-(s^5 + 2s^4 + 4s^3) =$$

$$= 2s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 3s + 3$$

Ezt az eljárást ismételve addig csökkentjük az osztandó foksámát, amíg az nem kisebb, mint az osztó foksáma

$$2s^4 + 4s^3 + 9s^2 + 3s + 3 - (2s^4 + 4s^3 + 8s^2) =$$

$$-(2s^4 + 4s^3 + 8s^2) =$$

$$= s^2 + 3s + 3 - (s^2 + 2s + 4) =$$

$$-(s^2 + 2s + 4) =$$

$$= s - 1 = R(s)$$

$$Q(s) = s^3 + 2s^2 + 1$$

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{A(s)},$$

$$H(s) = \frac{s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 9s^2 + 3s + 3}{s^2 + 2s + 4} = (s^3 + 2s^2 + 1) + \frac{s - 1}{s^2 + 2s + 4}$$

5.3) Adja meg a $H(s) = \frac{36 - 31s^2 - 9s^3 + 3s^4 + s^5}{-16 + s^2}$ racionális törtfüggvényt

$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{A(s)}$ alakban. Használja a polinom hosszú osztás

algoritmusát

Megoldás (csak eredmény)

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{A(s)},$$

$$H(s) = \frac{36 - 31s^2 - 9s^3 + 3s^4 + s^5}{-16 + s^2} = 17 + 7s + 3s^2 + s^3 + \frac{308 + 112s}{-16 + s^2}$$

5.4) Adott a következő racionális törtfüggvény: $\frac{R(s)}{A(s)} = \frac{s^3 - s - 1}{(s-1)(s+2)(s+3)^2}$

Bontsa parciális résztörtekre!

Megoldás

Adott két polinom $A(s), R(s)$ amik fokszámai: $\deg(A(s)) > \deg(R(s))$

Parciális résztörtekre bontás alkalmazható, ha feltételezzük, hogy

$$\frac{R(s)}{A(s)} = \frac{c_1}{s-p_1} + \frac{c_2}{s-p_2} + \frac{c_3}{s-p_3} + \dots + \frac{c_N}{s-p_N}, c_i, p_i \in \mathbb{C}, \text{ ahol } p_i\text{-k gyökei } A(s)\text{-nek}$$

ha egy p_i -nek r szeres multiplicitása van, akkor a hozzá tartozó tényezőknek minden multiplicitással szerepelnie kell a résztörtben.

$$\frac{R(z)}{A(z)} = \frac{R(s)}{(s-p_i)^r \tilde{A}(s)} = \frac{c_1}{s-p_i} + \frac{c_2}{(s-p_i)^2} + \frac{c_3}{(s-p_i)^3} + \dots + \frac{c_r}{(s-p_i)^r} + \frac{c_{r+1}}{s-p_{i+1}} + \dots + \frac{c_N}{s-p_N}$$

A koefficiensek kiszámolhatóak, ha visszaszorzunk a törtet, hogy $A(z)$ közös nevezőre hozzuk és a számlálóba visszahelyettesítjük egyesével az összes $z = p_i$ -t, ami egy egyenletrendszerhez vezet.

$$\frac{R(s)}{A(s)} = \frac{s^3 - s - 1}{(s-1)(s+2)(s+3)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{(s+3)^2}$$

közös nevezőre hozzuk

$$\frac{s^3 - s - 1}{(s-1)(s+2)(s+3)^2} = \frac{A(s+2)(s+3)^2 + B(s-1)(s+3)^2 + C(s-1)(s+2)(s+3) + D(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+3)^2}$$

egyenlővé tesszük az eredeti számlálót a paraméteres számlálással, és összegyűjtjük a különböző fokokat.

$$s^3 - s - 1 = A(s+2)(s+3)^2 + B(s-1)(s+3)^2 + C(s-1)(s+2)(s+3) + D(s-1)(s+2)$$

$$1s^3 - 0s^2 - 1s^1 - 1s^0 = (A+B+C)s^3 + (8A+5B+4C+D)s^2 + (21A+3B+C+D)s^1 + (18A-9B-6C-2D)s^0$$

Megoldjuk az egyenletrendszert

$$\left. \begin{aligned} 1s^3 &= (A+B+C)s^3 \\ 0s^2 &= (8A+5B+4C+D)s^2 \\ -1s^1 &= (21A+3B+C+D)s \\ -1s^0 &= (18A-9B-6C-2D)s^0 \end{aligned} \right\} A \rightarrow -\frac{1}{48}, B \rightarrow \frac{7}{3}, C \rightarrow -\frac{21}{16}, D \rightarrow -\frac{25}{4}$$

$$\frac{R(z)}{A(z)} = \frac{s^3 - s - 1}{(s-1)(s+2)(s+3)^2} = -\frac{1}{48(s-1)} + \frac{7}{3(s+2)} - \frac{21}{16(s+3)} - \frac{25}{4(s+3)^2}$$

5.5) Adott a következő racionális törtfüggvény (az 5.1 maradéka): $\frac{R(s)}{A(s)} = \frac{s-1}{s^2+2s+4}$

Bontsa parciális résztörtekre!

Megoldás (csak a végeredmény)

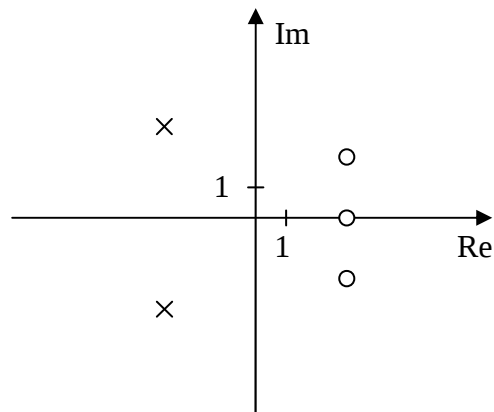
$$\frac{R(s)}{A(s)} = \frac{s-1}{s^2+2s+4} = \frac{s-1}{[s-(-1+\sqrt{3}j)][s-(-1-\sqrt{3}j)]} = \frac{A}{s-(-1+\sqrt{3}j)} + \frac{B}{s-(-1-\sqrt{3}j)}$$

$$A \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{j}{\sqrt{3}}, B \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{j}{\sqrt{3}}$$

5.6) Egy folytonos rendszer átviteli függvényének (impulzus válasz Laplace transzformáltja) a pólus-zérus elrendezése látható az alábbi ábrán. Adja meg, a rendszer átviteli függvényét

pólus: x

zérus: o



Megoldás

A pólus-zérus ábrából az átviteli függvény közvetlenül felírható:

$$H(s) = \frac{(s-3)(s-(3+2j))(s-(3-2j))}{(s-(-3+3j))(s-(-3-3j))},$$