

## Megoldott feladatok

- 1.1)** Az  $x_1(t) = u(t) \cdot e^{-t}$  és az  $x_2(t) = u(t) \cdot t \cdot e^{-t}$  jeleket mintavételezzük. Melyik jel sávszélessége nagyobb? Minimálisan milyen frekvenciával kell mintavételezni ezt a két analóg jelet hogy még visszaállíthatóak legyenek mintáikból? (A sávszélesség meghatározásakor  $\varepsilon = 0.01$ )

### Megoldás

A két jel spektrum a Fourier transzformáltjukból számítható:

$$X_1(\omega) = F\{u(t)e^{-t}\} = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \left[ \frac{e^{-(j\omega+1)t}}{-(j\omega+1)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega+1} \quad \text{és}$$

$$X_2(\omega) = F\{u(t)te^{-t}\} = \int_0^{\infty} te^{-t} e^{-j\omega t} dt = \left[ t \frac{e^{-(j\omega+1)t}}{-(j\omega+1)} \right]_0^{\infty} - \left[ \frac{e^{-(j\omega+1)t}}{(j\omega+1)^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{(j\omega+1)^2}$$

A spektrumok alapján határozható meg a jel sávszélessége:

$$B := \max_f \min_f \|X(f) - \varepsilon \max_f |X(f)|\|,$$

aminek megoldását a konkrét feladatban egy egyszerű egyenlet megoldással kaphatjuk

$$\text{meg: } \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} = \varepsilon H_{\max} = 0.01 \cdot 1, \text{ amiből } B_1 = \frac{\sqrt[3]{9999}}{2\pi} = 15.9 \text{ Hz, illetve}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega^4}} = \varepsilon H_{\max} = 0.01 \cdot 1, \text{ amiből } B_2 = \frac{\sqrt[4]{9999}}{2\pi} = 1.59 \text{ Hz.}$$

A mintavételi tétel alapján legalább a sávszélesség kétszeresével kell mintavételezni a jelet, ahhoz, hogy az a mintáiból visszaállítható legyen, azaz  $f_s = 31.8 \text{ Hz}$ .

- 1.2)** Egy hálózat átviteli karakterisztikája a következő alakban ismert:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot 1.59 \cdot 10^{-4}}.$$

Adja meg a rendszer sávszélességét  $\varepsilon = 0.1$  paraméter érték mellett! Mennyivel nő/csökken a sávszélesség  $\varepsilon = 0.01$  esetén? Milyen jellegű szűrőt valósít meg a rendszer?

### Megoldás

$$\text{A } |H(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega \cdot 1.59 \cdot 10^{-4})^2}} \text{ amplitúdó spektrumból az alábbi egyenlet:}$$

$$\sqrt{\frac{1}{1 + (\omega \cdot 1.59 \cdot 10^{-4})^2}} = \varepsilon$$

megoldása esetén közvetlenül a sávszélességet adja eredményül. Az  $\varepsilon = 0.1$  paraméter

esetén  $B_{\varepsilon=0.1} \cong 100\text{kHz}$  sávszélesség, az  $\varepsilon = 0.01$  paraméter esetén  $B_{\varepsilon=0.01} \cong 1\text{MHz}$  adódik, vagyis 10-szeresére növekszik.

**1.3)** Mit mond ki a mintavételi és visszaállítási tétel?

**Megoldás**

Ha egy sávkorlátozott ( $B$  sávszélességű)  $x(t)$  jelet  $f_s \geq 2B$  frekvenciával mintavételezünk, akkor a jel tökéletesen (vesztésgmentesen) rekonstruálható a mintáiból:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT), \text{ ahol}$$

$$h(t) = 2B \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$$

**1.4)** Egy analóg jel sávszélessége 52 kHz, adja meg a mintavételi frekvencia alsó határát! Milyen szempontok indokolják, hogy a jelet az elvileg lehetséges legkisebb mintavételi frekvencia felett mintavételezzük (legalább két szempontot ismertessen)?

**Megoldás**

Az  $f_s \geq 2B$  mintavételi tétel értelmében  $f_s = 104\text{kHz}$  a mintavételi frekvencia alsó határa. A túlmintavételezésnek két oka lehet:

- Ha az alsó mintavételi frekvenciát használjuk, akkor a jelvisszaállításához szükséges egy ideális aluláteresztő szűrő, amely a gyakorlatban nem valósítható meg. A túlmintavételezés esetén véges meredekségű lehet a szűrő, amely már megvalósítható.
- A tömöríthetőség miatt előnyös lehet a túlmintavételezés, mivel nagyobb mintaszámú, korreláltabb mintahalmaz esetén jobb hatásfokú tömörítés érhető el.

**1.5)** Adja meg a kvantálási SNR jel-zaj viszonyt véletlen (egyenletes eloszlású) jel és  $n$  bites egyenletes kvantálás esetén.

**Megoldás**

Előadáson elhangzott. Végeredmény:  $\text{SNR} = 6n$

Hasonlóan az előző példához, csak a jel teljesítményét máshogy kell kiszámolni, mert itt egyenletes eloszlású véletlen folyamatnak tételeztük fel.

Ezért a jel teljesítménye  $Pow_{\text{signal}} = \frac{4C^2}{12}$

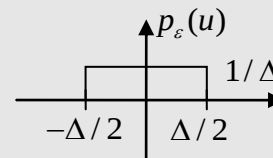
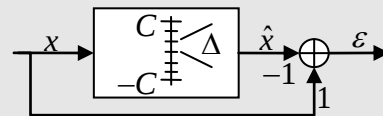
**1.6)** Adja meg a kvantálási SNR jel-zaj viszonyt teljesen kivezérelt szinuszos jel és  $n$  bites egyenletes kvantálás esetén.

**Végeredmény:**  $SNR=6n+1.8$

**definíciók amiket felhasználunk:**

- $n$ : kvantáló bitszáma
- $N$ : hány darab kvantálási szimbólumot definiálunk
- $C$ : a kvantáló dinamikatartományának maximum amplitúdó értéke
- $\Delta$ : egyenletes kvantálás esetén a kvantálási szimbólumokhoz tartozó amplitúdó értékek közti távolság
- $N = \frac{2C}{\Delta} = 2^n$
- $\varepsilon = x - \hat{x}$ , a kvantálási hiba
- feltételezzük, hogy a kvantálási zaj eloszlása egyenletes, azaz

$$p_{\varepsilon}(u) = \begin{cases} 1/\Delta, & |u| < \Delta/2 \\ 0 & \text{élt} \end{cases}$$



- $SNR = \frac{Pow_{signal}}{Pow_{noise}}$ ,  $SNR_{dB} = 10 \log_{10}(SNR)$
- $V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} (V(t))^2 dt}$
- $Pow_{electrical} = \frac{(V_{RMS})^2}{R}$ , ahol  $R$  az az ellenállás amire a  $V_{RMS}$  átlagfeszültség van kapcsolva, egységnyinek tekintjük, mert később úgyis eltűnne az SNR arányból.
- $\mu_x = \int x \cdot p_x(x) dx$ , a zaj teljesítményét ha 0 várható értékű a
- $\sigma_x^2 = \int (x - \mu_x)^2 p_x(x) dx$  szórásnégyzettel lehet leírni.

**Megoldás:**

A jel szinuszos, teljes kivezérlésű, ezért  $V(t) = C \sin(2\pi t)$

$$\text{A jel teljesítménye: } Pow_{signal} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} (V(t))^2 dt}^2 = \sqrt{\frac{1}{1-0} \int_0^1 (C \sin(2\pi t))^2 dt}^2 = \frac{C^2}{2}$$

$$\text{A zaj teljesítménye: } Pow_{noise} = \sigma_{\varepsilon}^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} u^2 \cdot \frac{1}{\Delta} du = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{C^2/2}{\Delta^2/12} \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{3}{2} N^2 \right) = 10 \log_{10} \left( \frac{3}{2} 2^{2n} \right) =$$

A jel-zaj viszony:

$$= 10 \log_{10} \left( \frac{3}{2} \right) + 2n 10 \log_{10}(2) = 1.760912591 + 6.020599913n$$

**1.7)** Mekkora lesz egy  $n=8$  bites szimmetrikus, egyenletes kvantáló jel-zaj viszonya (SNR) 10dB-es túlvezérlés esetén? (A bemenő jelet egyenletes eloszlásúnak tekintve.)

### Megoldás

Tudjuk, hogy  $10 \log_{10} \frac{s_x^2}{s_{x_{\max}}^2} = 10 \text{dB}$ ,

ahol  $s_{x_{\max}}^2$  az illesztett kvantálóhoz

tartozó jelteljesítmény rész, és  $s_x^2$  a

jel valódi teljesítménye. Mivel a jel amplitúdóját nem tudjuk, csak a teljes kivezérlés

nagyságát ( $2C$ ), ezért először ezt kell kiszámolnunk. Ehhez szükségünk van a jel

teljesítményére. Ezt az ismert amplitúdó nagyságával tudjuk kifejezni, ha tudjuk a teljes kivezérlés teljesítményét:  $s_{x_{\max}}^2 = \frac{4C^2}{12}$ ,  $s_x^2 = 10 \cdot s_{x_{\max}}^2 = 10 \frac{4C^2}{12}$ , ahol  $C$  a kvantáló dinamika tartománya.

A jel maximális amplitúdója tehát  $\xi C$ , ahol  $s_x^2 = \sigma_x^2 = \int_{-\xi C}^{\xi C} u^2 \cdot \frac{1}{2\xi C} du = 10 \frac{4C^2}{12}$ , így

$$\xi = \sqrt{10} \approx 3.162277, \quad x_{\max} = \sqrt{10}C$$

A zaj teljesítményt külön kell számolni, abban az esetben, amikor nincs túlvezérlés és abban, amikor van, majd az alábbiak szerint vegyük a két eredmény átlagát:

$s_{\varepsilon}^2 = P_{\text{norm}} \cdot s_{\varepsilon \text{ norm}}^2 + (1 - P_{\text{norm}}) \cdot s_{\varepsilon \text{ tulvez}}^2$ , ahol  $s_{\varepsilon \text{ tulvez}}^2$  a túlvezérléskor kapott kvantálási zaj szórása,  $s_{\varepsilon \text{ norm}}^2$  a normál működésnél mért zaj szórása,  $P_{\text{norm}}$  a normál működés valószínűsége.

–  $P_{\text{norm}} = ?$

Mivel egyenletes eloszlást tételeztünk föl, ezért

$$P_{\text{norm}} = \int_{-C}^C p_x(u) du = \int_{-C}^C \frac{1}{2x_{\max}} du = \frac{C}{x_{\max}},$$

amiből visszahelyettesítve kapjuk a valószínűséget

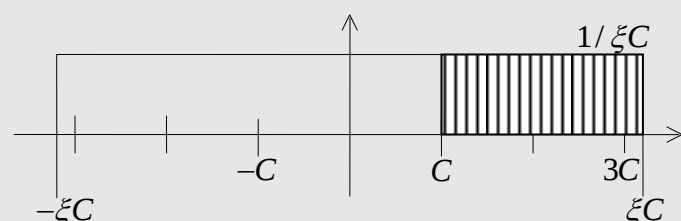
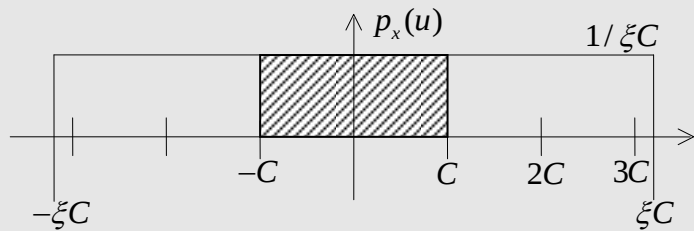
$$P_{\text{norm}} = \frac{C}{x_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

–  $s_{\varepsilon \text{ norm}}^2 = ?$

A normál működésre már ismert az összefüggés (ld. 2.2

$$\text{feladat): } s_{\varepsilon \text{ norm}}^2 = \frac{\Delta^2}{12} = C^2 \cdot \frac{2^{-2n}}{3} = \frac{C^2}{3 \cdot 2^{16}}.$$

–  $s_{\varepsilon \text{ tulvez}}^2 = ?$



A túlvezérelt működési tartományban

a kvantálási zaj szórása az alábbiak szerint számítható:

$$\begin{aligned}
 s_{\varepsilon \text{ tulvez}}^2 &= \int (X(u) - \mu_X)^2 p_X(u) du = \\
 &= 2 \int_C^{x_{\max}} (u - C)^2 \frac{1}{2(x_{\max} - C)} du = \\
 &= \int_C^{\sqrt{10}C} \frac{u^2 - 2uC + C^2}{C(\sqrt{10} - 1)} du = \\
 &= \frac{1}{C(\sqrt{10} - 1)} \left[ \frac{u^3}{3} - u^2C + uC^2 \right]_C^{\sqrt{10}C} \\
 &= C^2 \frac{13\sqrt{10} - 31}{3\sqrt{10} - 3} \approx C^2 \cdot 1,559
 \end{aligned}$$

A fentiek részeredmények alapján, mivel  $s_{\varepsilon \text{ norm}}^2 \ll s_{\varepsilon \text{ tulvez}}^2$ , ezért élhetünk a következő közelítéssel:

$$s_{\varepsilon}^2 \approx (1 - P_{\text{norm}}) \cdot s_{\varepsilon \text{ tulvez}}^2 = \frac{\sqrt{10} - 1}{\sqrt{10}} \cdot s_{\varepsilon \text{ tulvez}}^2 = C^2 \left( \frac{13\sqrt{10} - 31}{3\sqrt{10}} \right),$$

amiből a keresett kvantálási jel-zaj viszony a következő:

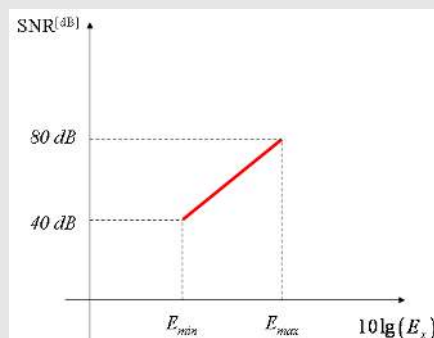
$$SNR = \frac{10 \frac{C^2}{3}}{s_{\varepsilon}^2} = \frac{10\sqrt{10}}{13\sqrt{10} - 31} \approx 3,128 \text{ (4,95dB)}$$

Látható, hogy a túlvezérlés megjelenésével meredeken csökken a jel-zaj viszony. (Megjegyzés: ennek vizualizációjára is fog készülni egy rajz.)

**1.8)** Hány bites lineáris kvantáló kell ahhoz, hogy legalább 40 dB-es jel-zaj viszonyt kapjunk 40 dB-es dinamikatartomány felett?

### Megoldás

A 40dB-es bemeneti dinamikatartomány azt jelenti, hogy a bemeneti jel legkisebb és legnagyobb teljesítményű (ill. energiájú) része között 40dB a különbség, azaz  $E_{\max}/E_{\min} = 10^4$ . Ha a legkisebb jelszintnél is 40dB-es jel-zaj viszonyt kell biztosítanunk, akkor a legnagyobb jelszintnél 80dB a jel-zaj viszony:

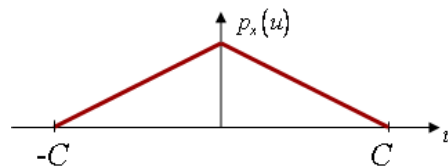


Tehát  $\text{SNR}_{\max} = 80\text{dB}$ , amiből  $n = \lceil 80/6 \rceil = 14$  (bit).

### Megjegyzés:

Ha olyan jelet adunk a bemenetre, amely a legjobban kihasználja a kvantáló dinamikatartományát, azaz a legnagyobb jel-zaj viszonyt biztosítja, illetékv kvantálónak nevezzük ( $x_{\max} = C$ , ld. korábbi feladatokat is). Ekkor a jelteljesítmény és a kvantálási zaj közötti összefügg általános bemeneti jelnél:  $s_e^2 = \lambda^2 \cdot s_x^2 \cdot 2^{-2n}$ , ahol  $\lambda$  a bemenő jel eloszlásától függő konstans. Egyenletes eloszlásnál:  $s_e^2 = \frac{q^2}{12} = C^2 \cdot \frac{2^{-2n}}{3}$ , ahol  $C^2 = x_{\max}^2 = 3s_x^2 \Rightarrow s_e^2 = s_x^2 \cdot 2^{-2n} \Rightarrow \lambda = 1$ .

- 1.9)** Adott egy véletlen jel az ábrán felrajzolt eloszlásfüggvénnyel. Mekkora a kvantálási jel-zaj viszony, ha  $n=5$  bites kvantálót normál tartományban használunk? (A kvantálót a  $C$  amplitúdóhoz illesztjük.) Mi történik túlvezérlés esetén, és hogyan jelentkezik ez a kvantálási jel-zaj viszonyban?



### Megoldás

- 1.10)** Lehet-e BIBO stabil a  $h(n) = u(n) \frac{1}{n+1}$  impulzusválasz függvénnyel rendelkező szűrő? Válaszát indokolja!

### Megoldás

A BIBO stabilitás elégséges feltétele, hogy az impulzusválasz függvény abszolút integrálható legyen, a konkrét esetben:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \rightarrow \infty$ , tehát a rendszer nem BIBO stabil.

- 1.11)** Mit jelent a kauzalitás? Kauzális-e az a rendszer, amelynek rendszeregyenlete az  $y(n-1) = x(n) - 2x(n-1)$ ?

### Megoldás

Egy rendszer kauzális, ha a pillanatnyi válaszát csak a jelen és múlt határozza meg, a jövőtől nem függ, azaz:

$$y(n) = \Psi(y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots).$$

A differenciaegyenlettel megadott rendszer nem kauzális.

**1.12)** Adott egy rendszer  $y(n) = x(2n) + 2x(n)$  rendszeregyenlete. Időinvariáns-e a rendszer? Válaszát indokolja!

**Megoldás**

Időinvariáns rendszer esetén  $y(n) = S^k \{T\{x(n)\}\} = T\{S^k\{x(n)\}\}$ , tehát az eltolás és rendszer operátor felcserélhető, vagy más szóval, a rendszer azonos gerjesztésre minden időpillanatban azonosan válaszol.

A fenti rendszeregyenlettel megadott szűrő nem időinvariáns, mivel

$$S^k \{T\{x(n)\}\} = x(2n-k) + 2x(n-k), \text{ de}$$

$$T\{S^k\{x(n)\}\} = x(2n-2k) + 2x(n-k).$$

**1.13)** Adja meg a lineáris rendszer definícióját! Az  $y(n) = x^2(n)$  rendszeregyenlettel adott rendszer lineáris? A definíció alapján indokolja választát!

**Megoldás**

Egy rendszer lineáris, ha teljesül az  $y(n) = T\left\{\sum_i a_i x_i(n)\right\} = \sum_i a_i T\{x_i(n)\}$  szuperpozíció elve.

A fenti rendszeregyenlettel megadott szűrő nem lineáris, mivel

$$T\{a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\} = a_1^2 x_1^2(n) + 2a_1 a_2 x_1(n) x_2(n) + a_2^2 x_2^2(n), \text{ de}$$

$$a_1 T\{x_1(n)\} + a_2 T\{x_2(n)\} = a_1 x_1^2(n) + a_2 x_2^2(n).$$

**1.14)** Adja meg a kauzalitás és a stabilitás definícióját! Adott egy rendszer  $h(n) = u(n-1)n^{-2}$  impulzusválasza. Stabil és kauzális ez a rendszer? Válaszát a definíciók alapján indokolja!

**Megoldás**

Kauzalitás: Egy rendszer kauzális, ha a pillanatnyi válaszát csak a jelen és múlt határozza meg, a jövőtől nem függ, azaz:

$$y(n) = \Psi(y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots).$$

Stabilitás: bármilyen input esetén a kimenet korlátos marad

BIBO stabilitás: korlátos input esetén az output is korlátos marad, vagyis:

$$\text{ha } |x(n)| \leq M_x \forall n \Rightarrow |y(n)| < M_y < \infty \text{ (ennek feltétele: } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \text{)}$$

$$\text{- Mivel } h(n) = u(n-1)n^{-2} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{ha } n > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}, \text{ ezért a definícióból következően kauzális.}$$

$$\text{- Mivel } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k^2} \right| < \infty, \text{ ezért definícióból következően BIBO stabil (de ezt meg is}$$

lehet magyarázni: ha az input nem egy exp. felrobbanó függvény, akkor az impulzusválasz exp. csökkenő súlyai „le fogják húzni” a bemenet értékeit, így a kimenet is véges lesz)

- 1.15)** Jelölje meg a helyes állításokat! Indokolja válaszát! (az állításonként 5 pont csak akkor kapható meg, ha a válasz a helyes indoklást is tartalmazza!)
- a.) Ha egy lineáris rendszer kauzális akkor  $h(n) = 0$  minden  $n < 0$ -ra.
  - b.) Egy lineáris rendszer BIBO stabilitásának a feltétele, hogy a  $h(n)$  abszolút értékben összegezhető legyen.
  - c.) Csak a lineáris időinvariáns rendszer írható le egyértelműen egy egyváltozós impulzusválasz függvény segítségével.
  - d.) A BIBO stabilitás azt jelenti, hogy tetszőleges bemeneti jel esetén a rendszer kimenetén mindig korlátos jel van.
  - e.) Az  $y(n) = x(-n) + x(2n)$  rendszeregyenlettel adott szűrő időinvariáns és kauzális.

### Megoldás

- a.) Igaz. Ez a kauzális rendszer definíciójában szerepel. Konvolúció esetén ez biztosítja, hogy a rendszer kimenete csak a múltbéli bemenettől függjön (rendszer csak a múltbéli jeleket használja fel a kimenet előállítására):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^0 h(n-k)x(k)$$

- b.) Igaz. A BIBO stabilitási tétel bizonyításából látható, hogy egy korlátos bemeneti jel esetén csak akkor kapunk korlátos kimeneti jelet, ha a rendszer impulzus válaszára teljesül, hogy:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

- c.) Igaz?? A linearitás és az időinvariancia alapvető követelménye az impulzusválasz alkalmazhatóságának. E két tulajdonság szükséges ahhoz, hogy belássuk, hogy egy függvénnyel (impulzusválasz) leírható egy LTI rendszer.
- d.) Hamis. Csak korlátos bemeneti jel esetén biztosított a korlátos kimeneti jel BIBO stabil rendszer esetén. A neve is tartalmazza ezeket a feltételeket: Bounded Input Bounded Output
- e.) Hamis. A fent megadott szűrő se nem időinvariáns, se nem kauzális.

Nem időinvariáns, mert a definíció ( $S\tau x(n) = \tau Sx(n)$ ) nem igaz rá:

$$y(n-1) = Sy(n) = S\tau x(n) = S\{x(-n) + x(2n)\} = \boxed{x(-n-1) + x(2n-1)}$$

$\neq$

$$y(n-1) = Sy(n) = S\tau x(n) = \tau Sx(n) = \tau x(n-1) = \boxed{x(-n+1) + x(2n-2)}$$

Nem kauzális, mert a pillanatnyi kimenet a jövőbeli bemenettől is függ:  $x(2n)$

- 1.16)** Egy lineáris időinvariáns rendszer impulzusválasza  $h(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Adja meg

a rendszer válaszát az  $x(n) = [2 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad -1 \quad 1]$  gerjesztés esetén!

### Megoldás

A rendszer válasza  $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{j=0}^3 h(j)x(n-j)$  diszkrét konvolúcióval határozható meg.

| $h(n) = [\underset{\uparrow}{1} \quad 0 \quad 1 \quad 1]$ | $y(n)$ |
|-----------------------------------------------------------|--------|
| $[1 \quad -1 \quad 1 \quad 2]$                            | 2      |
| $[1 \quad -1 \quad 1 \quad 2]$                            | 1 ←    |
| $[1 \quad -1 \quad 1 \quad 2]$                            | 1      |
| $[1 \quad -1 \quad 1 \quad 2]$                            | 4      |
| $[1 \quad -1 \quad 1 \quad 2]$                            | 0      |
| $[1 \quad -1 \quad 1 \quad 2]$                            | 0      |
| $[1 \quad -1 \quad 1 \quad 2]$                            | 1      |

**1.17)** Adott egy FIR szűrő a  $\mathbf{h} = [\underset{\uparrow}{1} \quad 1 \quad 0 \quad 1]$  impulzusválaszával. Adja meg a rendszer  $\mathbf{y}$

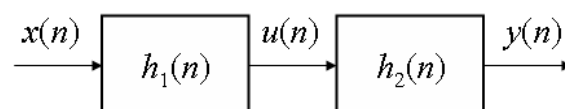
válaszát  $\mathbf{x} = [\underset{\uparrow}{1} \quad 0 \quad 1]$  gerjesztés esetén diszkrét konvolúcióval!

### Megoldás:

A rendszer válasza  $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{j=0}^3 h(j)x(n-j) = \sum_{j=0}^2 x(j)h(n-j)$  diszkrét konvolúcióval határozható meg

| $\mathbf{x} = [1, 0, 1]$ | $\mathbf{y}$ |
|--------------------------|--------------|
| $[1, 0, 1, 1]$           | ->1          |
| $[1, 0, 1, 1]$           | 1            |
| $[1, 0, 1, 1]$           | 1            |
| $[1, 0, 1, 1]$           | 2            |
| $[1, 0, 1, 1]$           | 0            |
| $[1, 0, 1, 1]$           | 1            |

**1.18)** Két sorosan kapcsolt LTI rendszer bemenetét az  $x(n) = [2 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad -1 \quad 1]$  diszkrét jellel gerjesztjük.

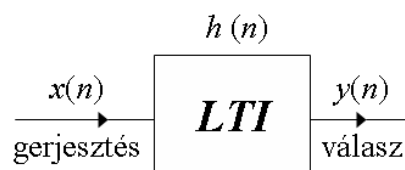


a.) Adja meg az  $y(n)$  választ  $h_1(n) = [\underset{\uparrow}{1} \quad 0 \quad 1]$  és  $h_2(n) = [\underset{\uparrow}{0} \quad 1 \quad 1]$  impulzusválaszok esetén!

b.) Rajzolja le a  $h_1(n)$  impulzusválaszú szűrő kanonikus blokkdiagramját!

### Megoldás

**1.19)** Egy lineáris, időinvariáns rendszer az  $x(n) = [\underset{\uparrow}{2} \ 1 \ -1 \ 1]$  gerjesztésre adott válasza  $y(n) = [\underset{\uparrow}{2} \ 1 \ 1 \ 4 \ 0 \ 0 \ 1]$ .



- a.) Adja meg a szűrő  $h(n)$  impulzusválaszát!  
b.) Az impulzusválasz alapján milyen típusú a szűrő!

**Megoldás:** Ez itt egyelőre egy becsapós feladat... ☺ A megoldáshoz de-konvolúcióra volna szükség, azonban azt nem tanuljuk, illetve nem használjuk most.

**Megjegyzés:** Egy rendszer vizsgálatához célszerű a szokásos vizsgálójeleket használni.  
**Hint:** DTFT-vel áttérhetünk frekvencia tartományba, ahol egy osztással majd iDTFT-vel elvégezhető a feladat megoldása.

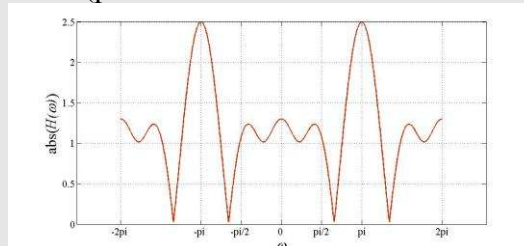
**1.20)** Rajzolja le a  $h(n) = [\underset{\uparrow}{1} \ 0 \ 0.5 \ -0.6 \ 0.4]$  impulzusválaszú szűrőhöz tartozó architektúrát! Milyen típusú ez a szűrő? Stabil-e a rendszer?

### Megoldás

A megadott impulzusválasz alapján ez egy FIR szűrő, ami miatt strukturálisan stabil. Az átviteli karakterisztikája a következő:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = 1 + 0.5 \cdot e^{-j2\omega} - 0.6 \cdot e^{-j3\omega} + 0.4 \cdot e^{-j4\omega},$$

ez alapján a szűrő felüláteresztő (pontosabban: sávszűrő+felülerősítő) típusú.



Normalizált frekvencia van az x tengelyen, vagyis  $2\pi$  = mintvételi frekvencia (fs). Értelmezhetően fs/2 = pi-ig van értelme értelmezni az átviteli spektrumot. Azt figyelhetjük

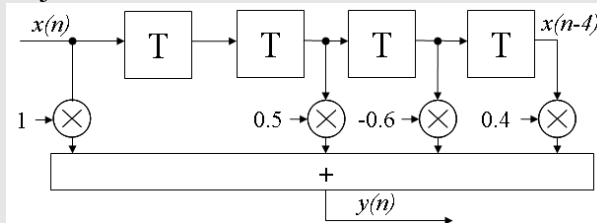
meg, hogy:

- $[0, \pi/2]$  tartományom fodorosan, de kb. 1(=0 dB) az amplitúdó, vagyis itt se nem erősít, se nem szűr

- $[\pi/2, 3\pi/4]$  tartományon egyértelműen vág

- $[3\pi/4, \pi]$  tartományon egyértelműen erősít.

A rendszer blokkdiagramja az alábbi:



**1.21)** Adott egy szűrő  $h(n) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix}$  impulzusválasza! Adja meg és rajzolja le az amplitúdó karakterisztikája  $\alpha = 0.5$ ,  $\alpha = -0.5$  és  $\alpha = 1$  esetén! Milyen típusúak ezek a szűrők? Stabil-e a rendszer?

### Megoldás

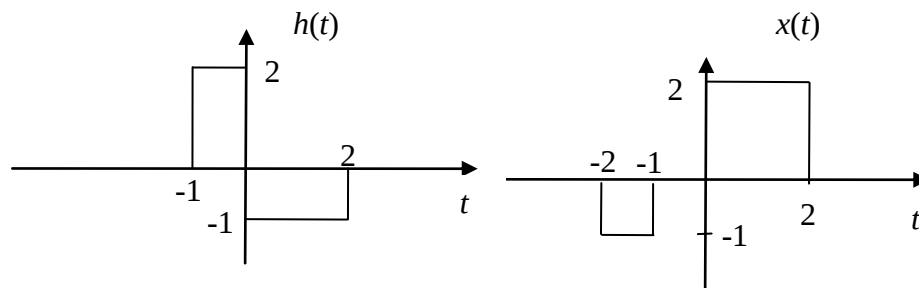
...

$$|H_{\alpha=0.5}(\omega)| = |1 + 0.5e^{-j\omega}| = \sqrt{(1 + 0.5\cos\omega)^2 + 0.25\sin^2\omega} = \sqrt{1.25 + \cos\omega}$$

...

## Feladatok otthoni kidolgozásra

**1.22)** Az ábrán látható  $h(t)$  impulzusválaszú rendszer bemenetén adott az  $x(t)$  gerjesztés. Adja meg az  $y(t)$  választ a konvolúciós integrál grafikus megoldása alapján!

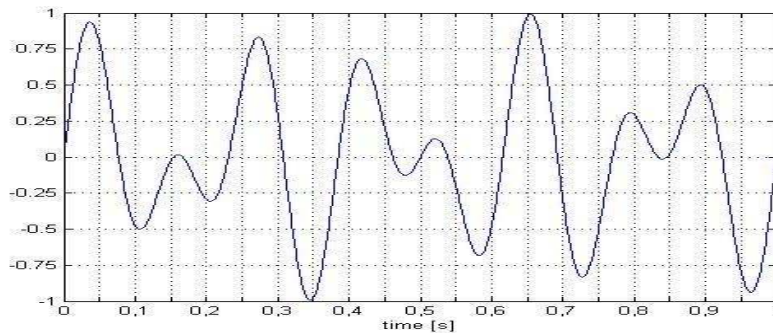


**1.23)** Egy lineáris, invariáns rendszer impulzusválasza

$$w(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & \text{ha } 0 \leq t \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol  $\alpha = 100\text{s}^{-1}$ . Határozza meg a rendszer átviteli karakterisztikájának  $\varepsilon = 0.1$  illetve  $\varepsilon = 0.01$  paraméterekhez tartozó, Hz-ben mért sávszélességét! Milyen jellegű szűrőt valósít meg a rendszer?

- 1.24)** Mintavételezze és kvantálja az alábbi  $x(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi 5t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi 8t)$  jelet, ha a mintavételi frekvencia  $f_s = 20\text{Hz}$ , egyenletes  $n=3$  bites kvantáló, valamint a jel teljesen kivezérelt! Rajzolja be az alábbi grafikonba a mintavételezett és kvantált jelet!



- 1.25)** Az  $x(t) = 5\sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 50t + \pi)$  jelet legalább hány bites egyenletes teljes kivezérlésű kvantálóval kell kvantálni, hogy  $\text{SNR} \geq 40\text{ dB}$  jel/zaj viszonyt biztosítson? Mennyivel kellene növelni a bitek számát ugyanezen feltétel teljesítéséhez, ha a kvantáló tízszer nagyobb amplitúdójú jel esetében lenne teljesen kivezérelve? Mekkora mindkét esetben a  $\Delta$  kvantálási lépésköz?

- 1.26)** Legalább mekkora mintavételezési frekvenciát és legalább hány bites egyenletes kvantálást kell alkalmazni az  $x(t) = 5\cos(2\pi \cdot 100 \cdot t^{[s]})$  jel digitalizálásakor, ha szeretnék elkerülni az átlapolódás jelenségét, és legalább 60dB-es kvantálási jel-zaj viszonyt szeretnének elérni? Adja meg a jel-zaj viszonyt azonos amplitúdójú és periódusidejű háromszög jel esetére!

- 1.27)** Az  $x(t) = 5\sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 50t + \pi)$  jelet legalább hány bites egyenletes

teljes kivezérlésű kvantálóval kell kvantálni, hogy  $\text{SNR} \geq 40 \text{ dB}$  jel/zaj viszonyt biztosítson? Mennyivel kellene növelni a bitek számát ugyanezen feltétel teljesítéséhez, ha a kvantáló tízszer nagyobb amplitúdójú jel esetében lenne teljesen kivezérelve? Mekkora mindkét esetben a  $\Delta$  kvantálási lépésköz?

**1.28)** Hány bites kvantálóra van szükség (egyenletes lépésközű kvantálás és teljesen kivezérelt szinuszos jel esetén), ha az elérni kívánt jel-zaj viszony  $50 \text{ dB}$ ?

**1.29)** Rajzolja le az egyenletes lépésközű kvantálás esetén a kerekítési hiba (zaj) sűrűségfüggvényét, ha kvantálási lépésköz  $0.01 \text{ V}$ !

**1.30)** Legalább mekkora mintavételezési frekvenciát és legalább hány bites egyenletes kvantálást kell alkalmazni az  $x(t) = 5 \cos(2\pi \cdot 100 \cdot t^{[s]})$  jel digitalizálásakor, ha elszeretnék kerülni az átlapolódás jelenségét és legalább  $60 \text{ dB}$ -es kvantálási jel-zajviszonyt szeretnének elérni?