

Megoldott feladatok

12.1) Az $x(t) = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t)$ analóg jelet $T_s = 0.025 \text{ sec}$ mintavételi idővel mintavételezzük. Adja meg az $x(n)$ mintavételezett jelet $n = 0, 1, 2, 3$ esetén! Adja meg: (i) az analóg jel $|X(\omega)|$ amplitúdó karakterisztikáját; (ii) a mintavételezett jel $|X_n(\omega)|$ amplitúdó karakterisztikáját; (iii) valamint az $x(n)$ 4 mintájából számított $N=4$ pontos DFT spektrumot!

Megoldás

A $T_s = 0.025 \text{ sec}$ mintavételi idő alapján a $f_s = 40 \text{ Hz}$ mintavételi frekvencia nagyobb, mint a jel sávszélességének ($B = 10 \text{ Hz}$) kétszerese, vagyis a mintavételi tételt ezzel a mintavételi gyakorisággal betartjuk. A mintavett jel a következőképpen kapható meg:

$$x(nT_s) = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot n \cdot 0.025),$$

ahol $n = 0, 1, 2, 3$ behelyettesítés után esetén a mintavett jel az $\mathbf{x} = [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T$ vektoros alakban adható meg.

Az egyes jelek spektrumképei a következők:

$$(i) \quad |X(\omega)| = \frac{1}{2} [\delta(\omega - 2\pi \cdot 10) + \delta(\omega + 2\pi \cdot 10)] \quad (\text{az } x(t) = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t) \text{ analóg jel Fourier transzformáltja})$$

$$(ii) \quad |X_n(\omega)| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left| X\left(\omega - \frac{2\pi}{T_s} i\right) \right| \quad (\text{az analóg jel spektrumának periodikus kiterjesztettje, } f_s = 40 \text{ Hz esetén})$$

A $N=4$ pontos DFT a következő mátrix-vektor szorzásból kapható meg:

$$w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}, \quad W_N(i, j) = w_N^{i \cdot j}, \quad i, j = 0 \dots N-1$$

$$w_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}}, \quad i \cdot j \quad \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline W_N(i, j) & 1 & -j & -1 & j \end{array}$$

$$A_{i,j} = i \cdot j \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

$$(iii) \quad \mathbf{X} = \mathbf{W}_4 \mathbf{x} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

12.2) Az $x(n) = [-5 \ x(1) \ 3 \ x(3)]$ jel 4 pontos DFT-je $X(k) = [3 \ -8+9j \ X(2) \ X(3)]$. Határozza meg az ismeretlen értékeket!

Megoldás

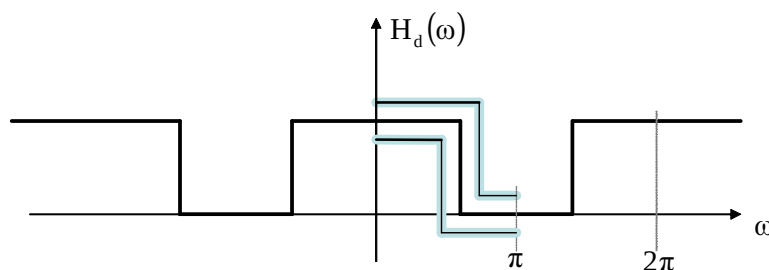
A DFT $\mathbf{X} = \mathbf{W}_4 \mathbf{x}$ vektoros alakja alapján felírható egyenletrendszerből megkaphatóak a keresett értékek:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -8+9j \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ x(1) \\ 3 \\ x(3) \end{bmatrix},$$

amiből $x(1) = -2$, $x(3) = 7$, $X(2) = -7$, $X(3) = -8-9j$

12.3) Egy M fókuszú FIR szűrőt tervezünk ablakolással. A toleranciasémába illő

$$H_d(\omega) \text{ kívánt átviteli karakterisztika sorfejtéséből } h_d(n) = \begin{cases} 0.5^n & \text{ha } n \geq 0 \\ 0.5^{-n} & \text{ha } n < 0 \end{cases}.$$



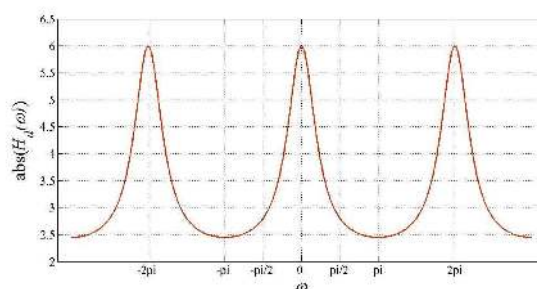
- Rajzolja le a $H_d(\omega)$ kívánt átviteli karakterisztikát!
- Adja meg egy $M=7$ fókuszú FIR szűrő együtthatóit, ha az alkalmazott ablak rectangular és Hamming ablak! Rajzolja le a szűrő architektúráját!
- Rajzolja le a $H(\omega)$ kívánt átviteli karakterisztikát rectangular és Hamming ablakolás esetén!

Megoldás

A szűrő átviteli karakterisztikája az átviteli függvény diszkrét idejű Fourier transzformáltja:

$$\begin{aligned} H_d(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 0.5^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n e^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (0.5e^{j\omega})^n - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (0.5e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1-0.5e^{j\omega}} - 1 + \frac{1}{1-0.5e^{-j\omega}} = \frac{0.75}{1.25 - \cos \omega}. \end{aligned}$$

Az átviteli karakterisztika abszolút értéke az alábbi ábrán látható.



A kívánt karakterisztika impulzusválaszából kiablakolással kapjuk a FIR szűrő együtthatóit, ahol a rectangular és Hamming ablakfüggvények a következők:

$$w_{\text{rectangular}}(k) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq k \leq 6 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}, \text{ és}$$

$$w_{\text{Hamming}}(k) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(2\pi \frac{k}{6}\right) & \text{ha } 0 \leq k \leq 6 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

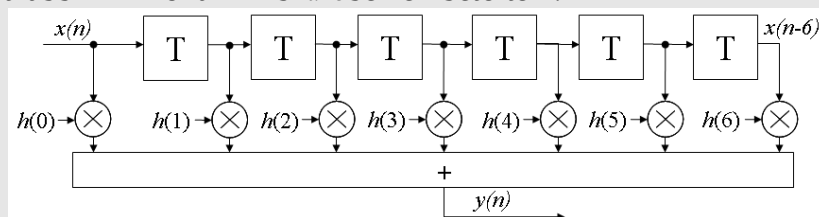
$$w_{\text{Hamming}} = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.031 & 0.77 & 1 & 0.77 & 0.031 & 0.08 \end{bmatrix}$$

és ez alapján a szűrőegyütthatók a következők:

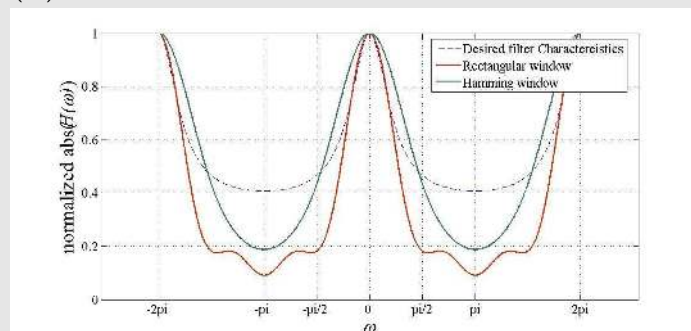
$$\mathbf{h}_{\text{rect}} = \begin{bmatrix} 0.125 & 0.25 & 0.5 & 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 \end{bmatrix}, \text{ és}$$

$$\mathbf{h}_{\text{Hamming}} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.0775 & 0.385 & 1 & 0.385 & 0.0775 & 0.01 \end{bmatrix}$$

amelyeket az alábbi $N=7$ fokú FIR szűrőbe kell betölteni.



A megvalósított $H(\omega)$ karakterisztikák az alábbi ábrán láthatóak.

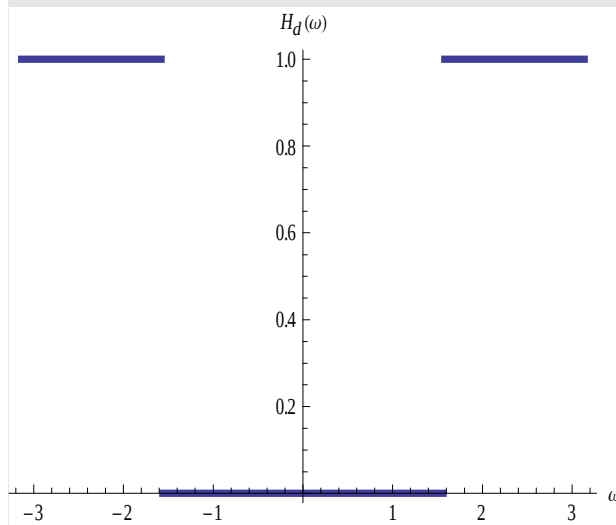


Rectangular ablak esetén megfigyelhető a Gibbs oszcilláció (a jelenség nagyobb foksám esetén még markánsabban jelentkezik).

12.4) Adja meg a $[\pi/2, \pi]$ relatív frekvenciatartományon ideális felüláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvényével vett közelítésének a $h(n)$ impulzusválasz függvényét $J=3$ esetén! Adja meg és rajzolja le a szűrő $H(f)$ amplitúdó karakterisztikáját a relatív frekvenciatartományon!

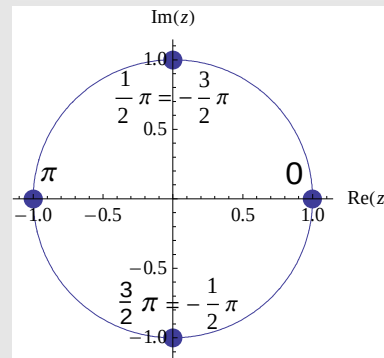
Megoldás

1. Először megtervezzük a szűrő ideális átviteli karakterisztikáját:



$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & \pi/2 \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}, \omega \in [-\pi, \pi]$$

$J=3$ (szűrő fokszáma)
ismétlésnek:



2. Felhasználva a Fourier sorfejtés

tulajdonságait:

$$H_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) \cdot e^{-j\omega n}, \quad h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

Kiszámoljuk $h_d(n)$ -et, $n = -3, \dots, 3$ -ra:

$$\begin{aligned} h_d(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) \cdot e^{j\omega 0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 1 e^{j\omega 0} d\omega + \int_{\pi/2}^{\pi} 1 e^{j\omega 0} d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\underbrace{\omega}_{\pi/2} \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \underbrace{\omega}_{\pi/2} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Megjegyzés:

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)},$$

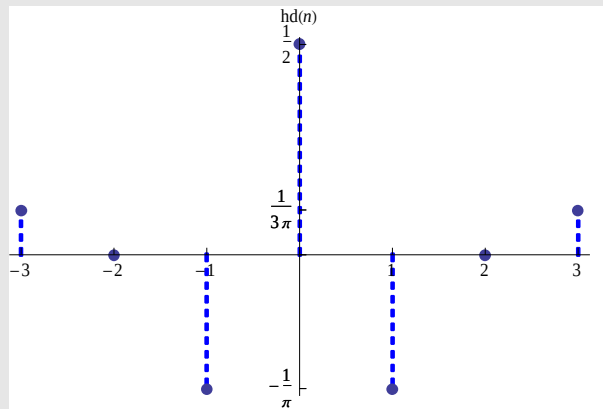
$$\int e^{j\omega} d\omega = \int (e^j)^\omega d\omega = \frac{e^{j\omega}}{\ln(e^j)} = \frac{e^{j\omega}}{j} = -je^{j\omega}$$

$h_d(k)$ páros függvény ($h_d(k) = h_d(-k)$), mert $H_d(\omega)$ valós függvény.

$$\begin{aligned} h_d(1) &= h_d(-1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) \cdot e^{j\omega 1} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} e^{j\omega 1} d\omega + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{j\omega 1} d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\underbrace{(-je^{j\omega})}_{-1-j} \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \underbrace{(-je^{j\omega})}_{+j-1} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$h_d(2) = h_d(-2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) \cdot e^{j\omega 2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\underbrace{\left(-\frac{j}{2} e^{j2\omega}\right)}_{+\frac{j}{2} + \frac{j}{2}} \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \underbrace{\left(-\frac{j}{2} e^{j2\omega}\right)}_{-\frac{j}{2} - \frac{j}{2}} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = 0$$

$$h_d(3) = h_d(-3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) \cdot e^{j\omega 3} d\omega = -\frac{1}{2\pi} \frac{j}{3} \left[\underbrace{(e^{j3\omega})}_{+j-1} \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} + \underbrace{(e^{j3\omega})}_{-1+j} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] = \frac{1}{3\pi}$$



3. Ablakot illesztünk az elméleti, eredeti impulzusválasz függvényre, hogy véges tartójú legyen, hiszen $h_d(n)$ végtelen tartójú mindkét irányban:

Az ablak, ami véges tartójú, most derékszögű ablakfüggvény ($\mathbf{w}$):

$$\mathbf{h}_d = \left[\dots, \frac{1}{3\pi}, 0, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{3\pi}, \dots \right]$$

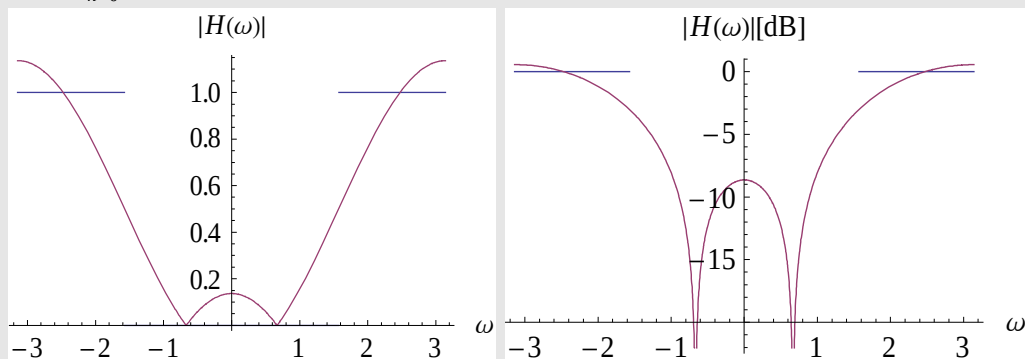
$$\mathbf{w} = \left[\dots, 0, 0, 1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 0, 0, \dots \right]$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{h}_d \otimes \mathbf{w} = \left[\dots, 0, 0, -\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi}, 0, 0, \dots \right], \text{ ahol } \otimes \text{ az elemenkénti szorzás jele}$$

4. Eltoljuk az ablakolt most már véges tartójú impulzus válasz függvényt, hogy kauzális rendszert kapjunk:

$$h(n) = g(n-R) = g(n-1) \Rightarrow \mathbf{h} = \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi} \right]$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{J-1} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} - \frac{1}{\pi} e^{-j2\omega}$$



Feladatok a gyakorlatra

12.5) Adott az $x(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ diszkrét jelsorozat.
 $\uparrow$
 $n=0$

- Diszkrét idejű Fourier transzformáció (DTFT) segítségével adja meg a jelsorozat $X(\omega)$ spektrumát (zárt alakban), és az $X\left(\omega = \frac{2\pi}{N}k\right) \equiv X(k)$ mintavett spektrumot, ahol $k = 0, 1, 2, 3$ (tehát $N=4$)! Ábrázolja közös diagramban az $|X(\omega)|$ amplitúdó spektrumot és annak mintavett értékeit!
- Számítsa ki diszkrét Fourier transzformációval (DFT) az $x(n)$ diszkrét jelsorozat $X(k)$ mintavett spektrumát! Ellenőrizze, hogy megegyezik-e az a) pontban számított mintavett spektrummal!
- Rajzolja fel a négypontos FFT kiszámításához szükséges „lepke” ábrát! Adja meg a köztes értékeket a csomópontokban! Ellenőrizze, hogy az eredmény megegyezik-e az a) és b) pontban számított mintavett spektrummal! Számolja össze, a szorzási és összeadási nyereségünket! **(EZ NEM KELL)**

Megoldás:

$$a) X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^3 x(n) \cdot e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2} + e^{-j\omega 3}$$

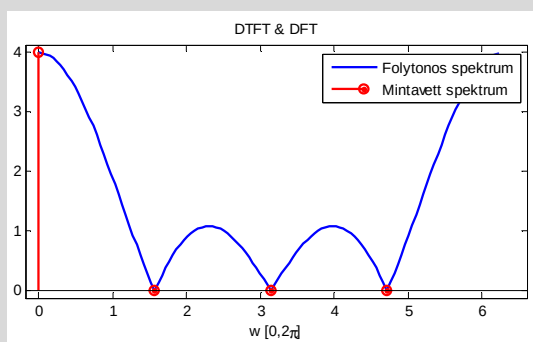
$$X\left(\omega = \frac{2\pi}{N}k\right) \equiv X(k) = 1 + e^{-j\pi k/2} + e^{-j\pi k} + e^{-j3\pi k/2}, \text{ és ez alapján } k = 0, 1, 2, 3 \text{-ra:}$$

$$X(0) = 1 + e^{-j\pi 0/2} + e^{-j\pi 0} + e^{-j3\pi 0/2} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$X(1) = 1 + e^{-j\pi 1/2} + e^{-j\pi 1} + e^{-j3\pi 1/2} = 1 - j - 1 + j = 0$$

$$X(2) = 1 + e^{-j\pi 2/2} + e^{-j\pi 2} + e^{-j3\pi 2/2} = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$$X(3) = 1 + e^{-j\pi 3/2} + e^{-j\pi 3} + e^{-j3\pi 3/2} = 1 + j - 1 - j = 0$$

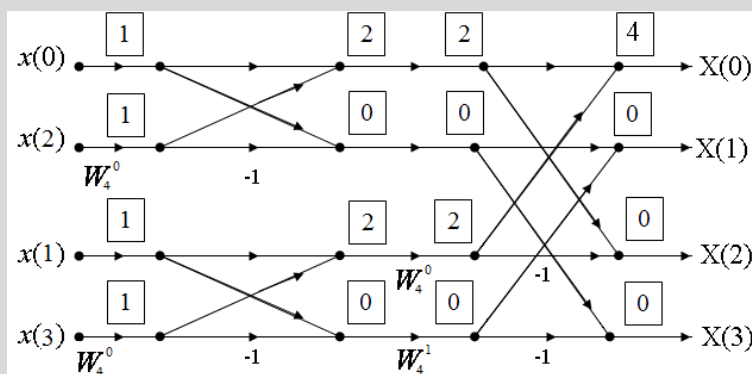


- Ehhez ki kell számolni $N=4$ -hez tartozó W transzformációs mátrixot, ahol a komplex egység: $W_4 = e^{-j2\pi/N} = e^{-j\pi/2}$

$$\overline{\overline{W}} = \begin{bmatrix} W_4^{0,0} & W_4^{0,1} & W_4^{0,2} & W_4^{0,3} \\ W_4^{1,0} & W_4^{1,1} & W_4^{1,2} & W_4^{1,3} \\ W_4^{2,0} & W_4^{2,1} & W_4^{2,2} & W_4^{2,3} \\ W_4^{3,0} & W_4^{3,1} & W_4^{3,2} & W_4^{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}, \text{ vagyis}$$

$$\overline{X} = \overline{\overline{W}} \cdot \overline{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ és ez megegyezik az a)-ban számolt értékekkel.}$$

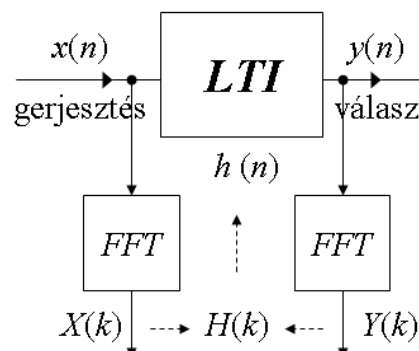
c) Egy 4 pontos DFT-t 2 db 2 pontos és 1 db 4 pontos lepkével tudunk kiszámolni az alábbi módon:



Ez megegyezik az a)-ban és a b)-ben számolt értékekkel.

	DFT	FFT	→ Nyeresség
Összeadás	4*3=12	2*2+1*4=8	→ 4 (30%)
Szorzás	4*4=16	2*1+1*2=4 (a negálást nem tekintetem szorzásnak)	→ 12 (75%)

12.6) Egy lineáris időinvariáns, kauzális szűrő bemenetén az $x(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$ sorozat és a kimeneten $y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ sorozat figyelhető meg.

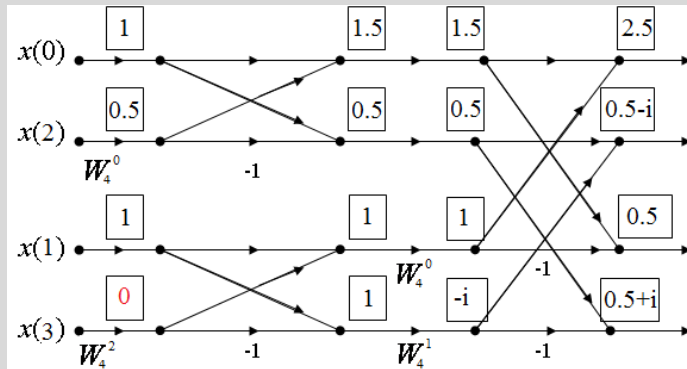


a) A bemeneti és a kimeneti sorozat $N=4$ pontos FFT-je alapján adja meg a szűrő átviteli függvényének $H(k)$ DFT-jét, és az alapján IDFT-vel a $h(n)$

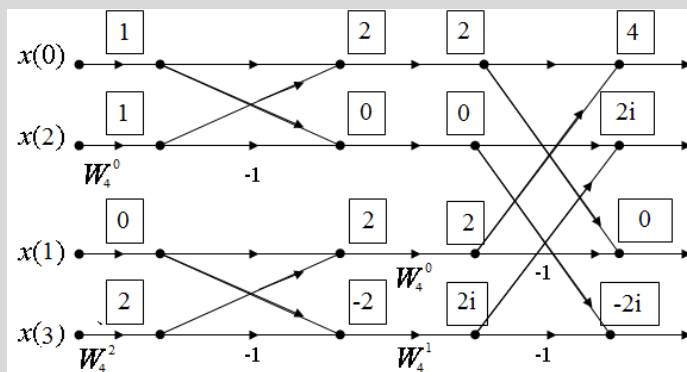
impulzusválaszt! (Megj: elég a DFT ill. számoljanak Matlabon FFT-vel)

b) Ellenőrizze az eredményt diszkrét konvolúcióval!

Megoldás: Az $x(n)$ vektorból zero padding után (Kiegészítjük egy 0-val ahhoz, hogy négy hosszú legyen.) $x(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$ lesz, és a bináris tükrözés után (hogy a lepkébe a megfelelő sorrendben menjen be) $[1 \ 0.5 \ 1 \ 0]$ lesz.



Ugyanígy az $y(n)$ -el. $y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$



A $H(k)$ meghatározásához az $Y(k)/X(k)$ osztást kell elvégezni. A fentiek alapján:

$$H(k) = [1.6 \quad -1.6+0.8i \quad 0 \quad -1.6-0.8i]$$

Ezt iDFT-zve az alábbi művelet végrehajtása szükséges:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{4} \mathbf{W}_4^* \mathbf{H} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 \\ -1.6+0.8i \\ 0 \\ -1.6-0.8i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 1.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Tehát ezzel megkapjuk a $h(n)$ függvényt.

A konvolúcióhoz az $x(n)$ és $h(n)$ konvolúcióját számoljuk ki és ellenőrizzük, hogy megkapjuk-e az $y(n)$ -et.

A konvolúció eredménye: $[-0.4 \quad -0.4 \quad 1 \quad 2 \quad 1.4 \quad 0.4]$

Ez nem az $y(n)$. Miért? Mert h valójában végtelen tartójú, de lecseng, így 15-16 pontos DFT-je már pontosabb eredményt ad...

12.7) Szűrőtervezés MATLABon az fdatool segítségével!

A megtervezett szűrőket hangjeleken fogjuk alkalmazni, hogy „hallható” legyen az elvégzett szűrés eredménye.

A hangtechnikában az egyik általánosan használt (CD minőségű) mintavételi frekvenciát tételezzük fel a feladat során: $f_s = 44.1 \text{ kHz}$

1. Adott egy hármashangzat (C-E-G C-dúr) hangjel:

$$f_1 = 2 \cdot 262 = 524, \quad f_2 = 2 \cdot 330 = 660 \quad f_3 = 2 \cdot 392 = 784$$

$$x(t) = 0.1(\cos(2\pi \cdot f_1 t) + \cos(2\pi \cdot f_2 t) + \cos(2\pi \cdot f_3 t))$$

generáljon le a megadott mintavételi frekvenciával mintavételezett 2 s időtartamú jelsorozatot.

A szűrőket a következő ablakokra vizsgálja meg: négyszög, háromszög, blackman7-harris

1.1. Tervezzon szűrőt, ami az G hangot (784 Hz) kiszűri a hármashangzathoz.

1.2. Tervezzon szűrőt, ami az C hangot (534 Hz) kiszűri a hármashangzathoz.

1.3. Tervezzon szűrőt, ami az E hangot (660 Hz) kiszűri a hármashangzathoz.

1.4. A tervezett szűrőkkel szűrje meg az előállított jelet és rajzolja ki a szűrés előtt és utáni frekvenciatartománybeli képet. (ha lehetősége van, hallgassa meg a különbséget)

2. Adott egy zene fájl, amin egy viszonylag tiszta fuvola hang hallatszik. (flute.wav) töltsd be a Matlabba és tervezz olyan szűrőt, ami a fuvola alaphangjait szűri ki, a többi hangot pedig csillapítja 80 dB-el. A fuvola alaphangjai a 600-1500Hz-es frekvenciatartományban szólnak a felvételen. Szűrje meg a jelet a tervezett szűrővel, majd nézze meg a frekvenciatartománybeli változást.

Megoldás:

az alábbi matlab script elvégzi a feladatot (a szűrőtervezésen kívül.)

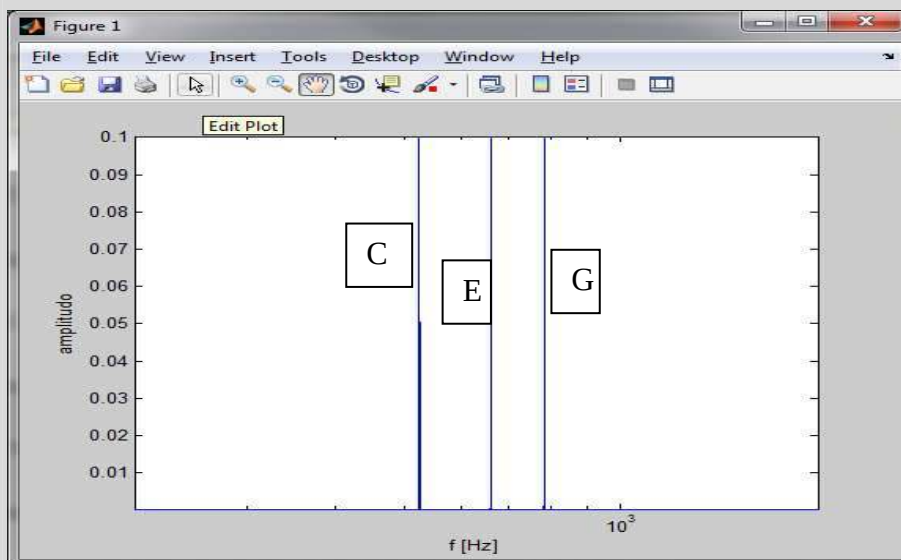
```
fs=44.1e3; T=1/fs;
%% 1
%előállítjuk a jelet
t=0:T/2;
f1=262*2; %Hz C hang
f2=330*2; %Hz E hang
f3=392*2; %Hz G hang
x=0.1*(cos(f1*2*pi*t)+cos(f2*2*pi*t)+cos(f3*2*pi*t));
% megtervezzük az fdatool-ban a kívánt szűrőket, és kiexportáljuk őket
% Hd1, Hd2 és Hd3 néven.

%megszűrjük a jelet a szűrőkkel
y1=filter(Hd1,x);
y2=filter(Hd2,x);
y3=filter(Hd3,x);

%sound(x, fs)
%sound(y1, fs)
%sound(y2, fs)
%sound(y3, fs)
```

```
N=length(x);  
f=linspace(0,fs,N);  
X=abs(fft(x))/(N/2);  
Y1=abs(fft(y1))/(N/2);  
Y2=abs(fft(y2))/(N/2);  
Y3=abs(fft(y3))/(N/2);  
figure;  
subplot(4,1,1)  
plot(f(1:end/2),X(1:end/2))  
set(gca,'XScale','log'); xlabel('f [Hz]') ylabel('amplitudo')  
subplot(4,1,2)  
plot(f(1:end/2),Y1(1:end/2))  
set(gca,'XScale','log'); xlabel('f [Hz]') ylabel('amplitudo')  
subplot(4,1,3)  
plot(f(1:end/2),Y2(1:end/2))  
set(gca,'XScale','log'); xlabel('f [Hz]') ylabel('amplitudo')  
subplot(4,1,4)  
plot(f(1:end/2),Y3(1:end/2))  
set(gca,'XScale','log'); xlabel('f [Hz]') ylabel('amplitudo')
```

A generált jel frekvenciatartománybeli képe:

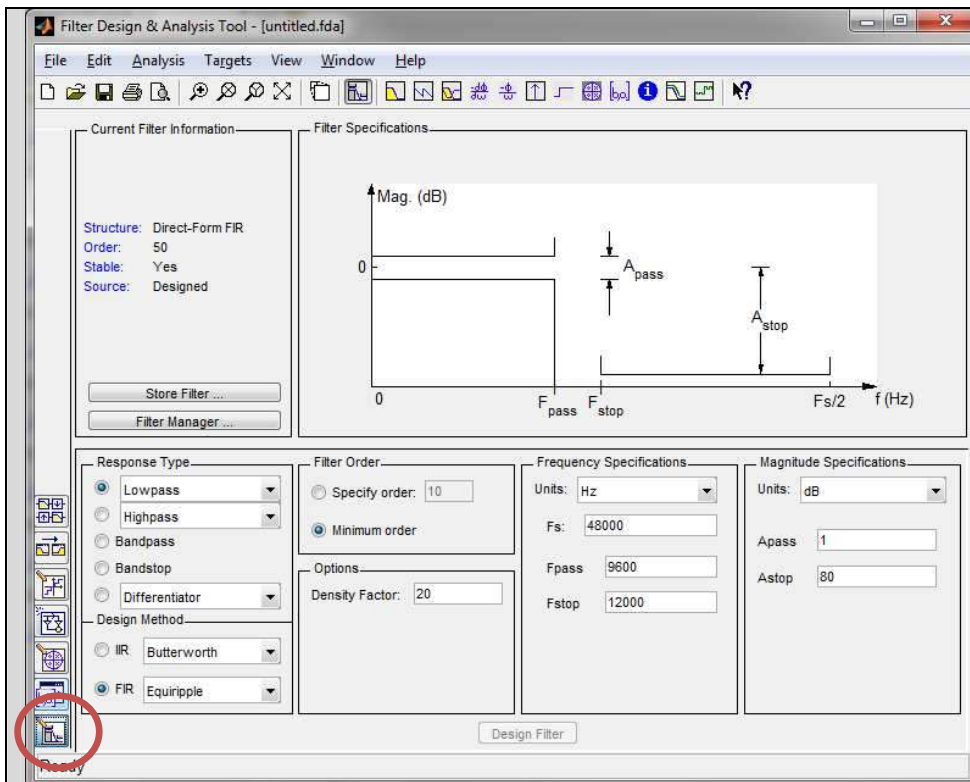


A szűrőtervezéshez tegyük a következőt:

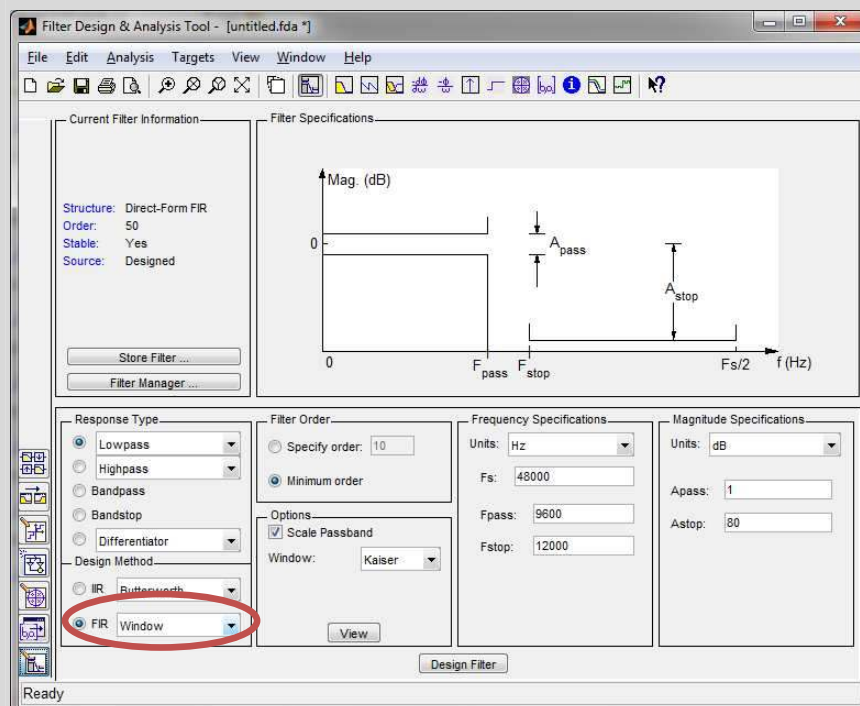
indítsuk el a MATLAB szűrőtervező programját:

fdatool

Menjünk a szintézis panelek közül a paraméteres szűrő tervező ablakra (ha nem onnan indul a program)



Állítsuk át a szűrőtervezés módját hogy FIR szűrőt szeretnénk tervezni ablakolással:



1.1: a G hang, ami 784 Hz-en van egy aluláteresztő szűrővel kiszűrhető a másik két hang közül. A szűrő válasz típusát állítsuk aluláteresztő típusra.

A mintavételi frekvenciát állítsuk 44.1 kHz-re

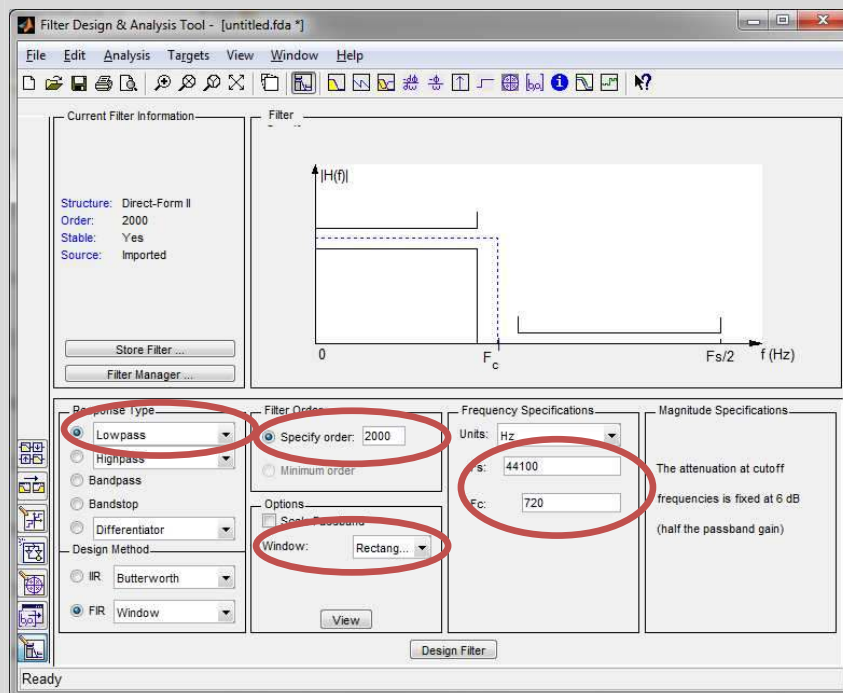
Az ablakolást változtassuk a feladatnak megfelelően először négyszögablakra.

A szűrő vágási frekvenciáját tegyük a G és a E hang közé, pl 720 Hz-re.

A szűrő levágási meredeksége az ablakolási technikánál a szűrő fokszámától függ.

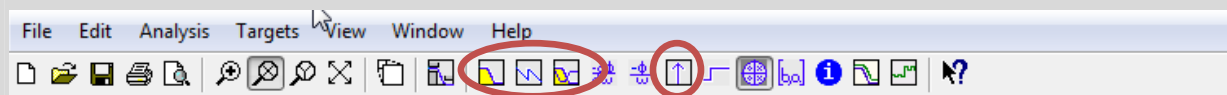
A szűrő fokszámát állítsa 2000-re (később próbálja ki, hogy hogyan viselkedik a szűrő, ha kevesebb pl 1000, 200 vagy 10 fokú szűrőt választ.)

Az ablakolással tervezésnél a program az F_c frekvenciára mindig 6dB csökkenést állít be



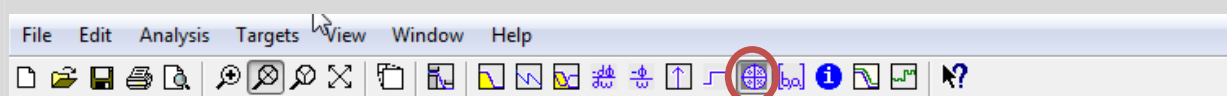
Tervezzük meg a szűrőt a Design Filter gombra kattintva.

Vizsgáljuk meg az impulzusválszt, az amplitúdú és fáziskarakterisztikát.



figyelem 20-30 nál nagyobb fokú szűrőnél ne nézzük meg a pólus-zérus képet, mert a program nem fogja tudni csak nagyon lassan megjeleníteni.

Vizsgáljuk meg a szűrő pólus-zérus képét (30 fokú szűrő esetén)



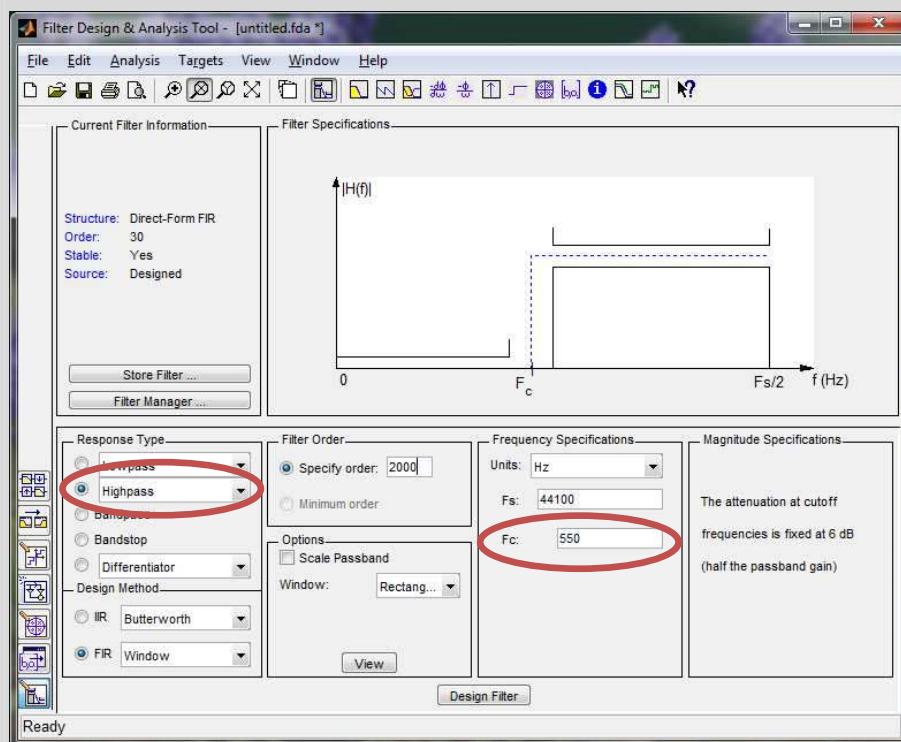
Exportálja ki a szűrőt objektumként Hd1 néven a matlab workspace-be a file menü->export (Ctrl+E) menüjével.



1.2

A C hangot ki tudjuk szűrni például egy felüláteresztő szűrővel.

A szűrő tervezésének módja azonos az előzőleg leírttal, csak a típust változtassuk felüláteresztő típusra és a levágási frekvenciát tegyük a C és az E hang közé, pl 550 Hz-re

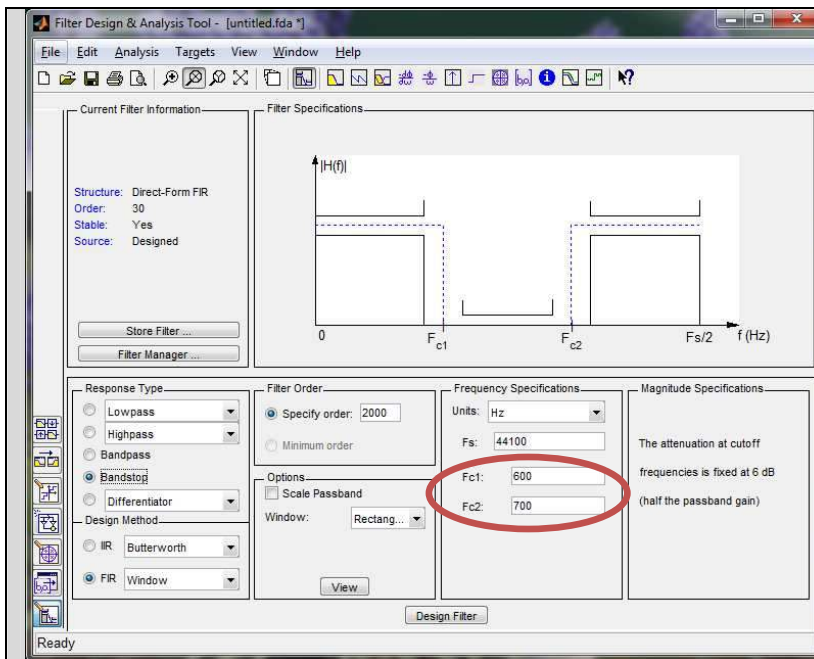


Vizsgáljuk meg a szűrőt, majd exportáljuk ki Hd2 néven.

1.3

A E hangot ki tudjuk szűrni egy sávzáró szűrővel.

A szűrő tervezésének módja azonos az előzőleg leírttal, csak a típust változtassuk sávzáró típusra és a kezdő és a vég levágási frekvenciákat tegyük a C-E és az E-G hang közé, pl 600, 700 Hz-re



majd exportáljuk ki a szűrőt Hd3 néven.

Futtassuk le a fent írt scriptet.

2.

Töltsük be a matlabba egy változóba a flute.wav-ot a

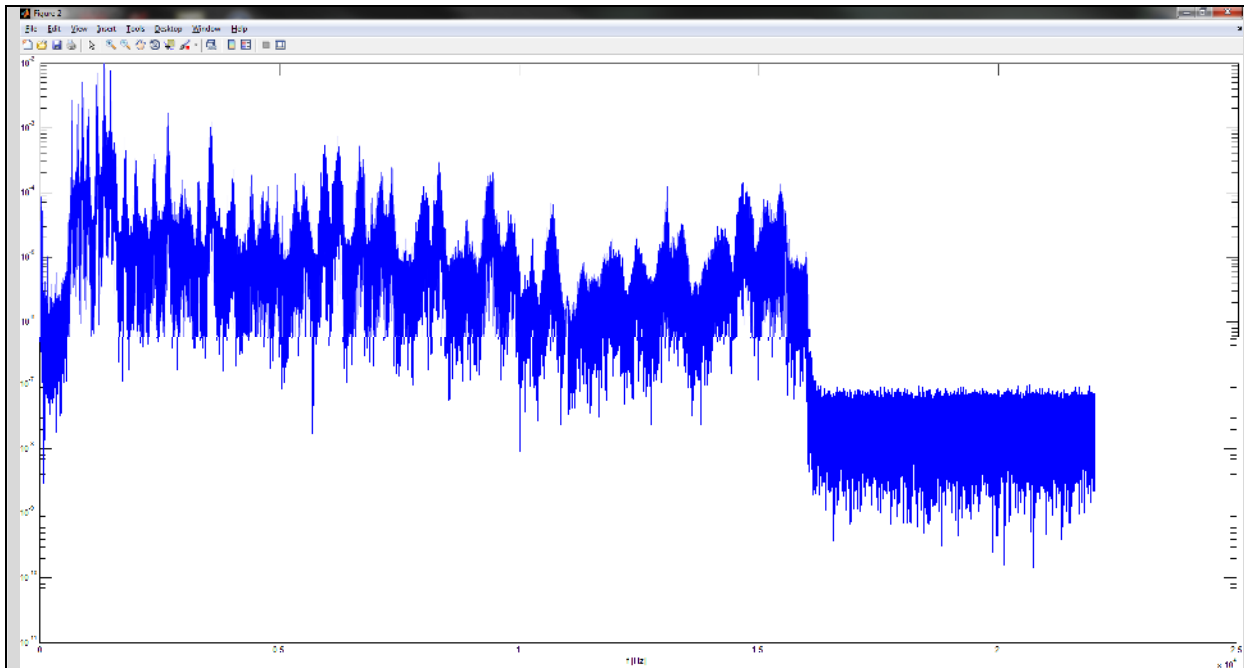
```
x=wavread('flute.wav');  
paranccsal
```

ha meg akarjuk nézni az időbeli képet, ezt megtehetjük a következő paranccsokkal:

```
fs=44.1e3; T=1/fs;  
t=0:T:T*(length(x)-1);  
plot(t,x); xtitle('t [s]');
```

vizsgáljuk meg a teljes jelet a frekvencia tartományban:

```
N=length(x);  
X=abs(fft(x,N))/(N/2);  
f=linspace(0,fs,N);  
figure;  
plot(f(1:end/2),X(1:end/2));  
set(gca,'YScale','log')  
xlabel('f [Hz]')
```



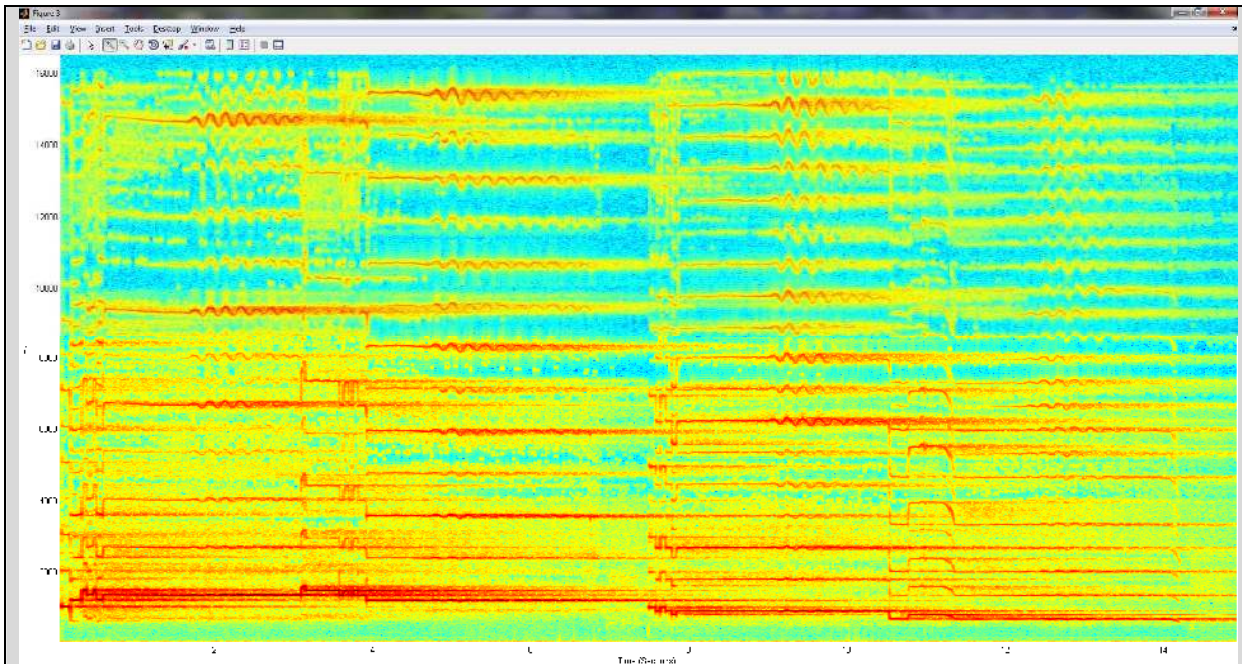
Amit látunk a képen az az összes előforduló frekvencia komponens a hang elejétől a végéig.

Ha meg szeretnénk vizsgálni a jelet az idő-frekvencia tartományban, hogy kicsit jobb képet kapjunk az időbeli változásáról a zenének, akkor megnézzük az úgynevezett spektrogramot (a kurzus kereteibe nem fér bele a spektrogrammal való megismerkedés, ezért csak a parancsot ismeretjük, és azt hogy mit kell meglátni az ábrából)

```
N=4096;
%[S,F,T,P]=spectrogram(x>window,noverlap,nfft,fs)
[S,F,T,P] = spectrogram(x,blackmanharris(N),round(N*1/2),N,fs);
figure;
surf(T,F,10*log10(P),'edgecolor','none'); axis tight;
view(0,90);
xlabel('Time (Seconds)'); ylabel('f [Hz]');
```

a kép a következő beállításokkal készült (a láthatóságért)

```
N=4096;
[S,F,T,P] = spectrogram(x,blackmanharris(N),round(N*4/5),2*N,fs);
```

A képen egy idő frekvencia kép látható (x tengely az idő, az y tengely a frekvencia) és színnel van kódolva a frekvenciakomponensek amplitúdója. Amikor szól a fuvola, az alaphangoknál és a felharmonikusainál piros színt látunk. Az alaphangok az alsó frekvenciákon helyezkednek el.

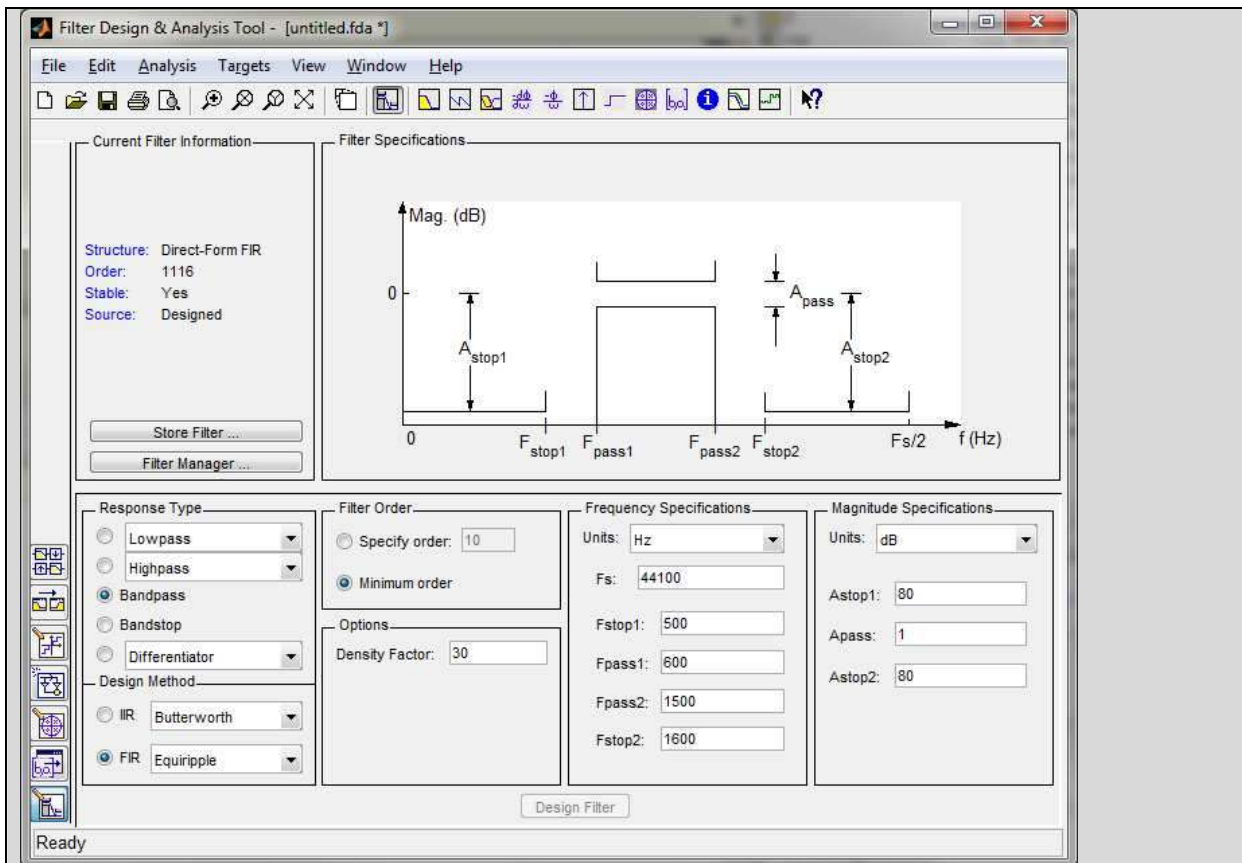
A szűrési feladatot egy sáváteresztő szűrővel tudjuk elvégezni a következő beállításokkal:

Legyen a szűrő FIR és sáváteresztő válasz típusú (Bandpass)

Használjuk a tervezési mdszerek közül az „Equiripple” módszert, ezzel biztosítani tudunk egy meghatározott ingadozást az áteresztő tartománynak és egy felső korlátot a záró tartományoknak.

Az áteresztési tartomány 600-1500 Hz között helyezkedjen el, és az első záró tartomány 500-nál végződjön, a második záró tartomány pedig kezdődjön 1600 Hz-től.

Állítsuk be a csillapítás mértékét 80 dB-re és az áteresztő tartomány ingadozását 1 dB-re, majd tervezzük meg a szűrőt.



A megtervezett szűrőt exportáljuk ki Hd néven a matlab workspace-be és futtassuk le a következő scriptet:

```
fs=44.1e3; T=1/fs;
```

```
%% 2
```

```
x=wavread('flute.wav');
t=0:T:T*(length(x)-1);
plot(t,x); xlabel('t [s]');
```

```
N=length(x);
X=abs(fft(x,N))/(N/2);
f=linspace(0,fs,N);
figure;
plot(f(1:end/2),X(1:end/2));
set(gca,'YScale','log')
xlabel('f [Hz]')
```

```
N=4096;
%[S,F,T,P]=spectrogram(x>window,noverlap,nfft,fs)
[S,F,T,P] = spectrogram(x,blackmanharris(N),round(N*1/2),N,fs);
figure;
surf(T,F,10*log10(P),'edgecolor','none'); axis tight;
view(0,90);
xlabel('Time (Seconds)'); ylabel('Hz');
%set(gca,'YScale','log')
```

```
%megtervezzük a szűrőt az fdatoolal és kiexportáljuk Hd néven
y=filter(Hd,x);
```

```
N=length(x);
Y=abs(fft(y,N))/(N/2);
figure;
hold on;
plot(f(1:end/2),X(1:end/2));
```

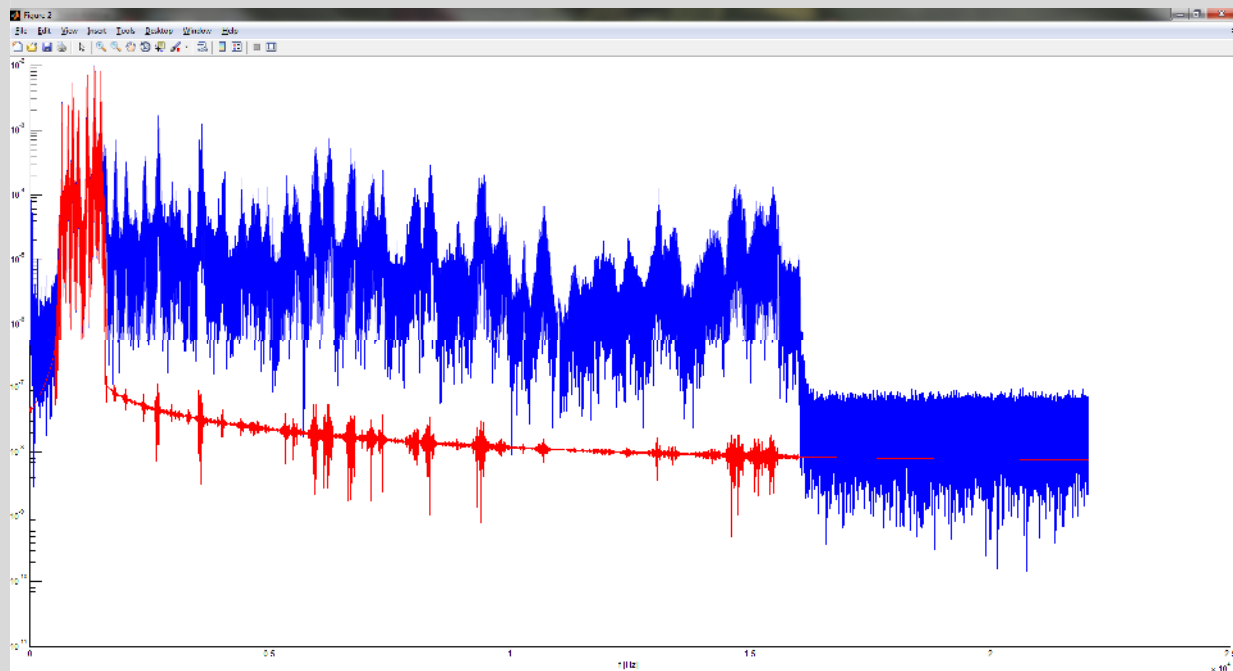
```

plot(f(1:end/2),Y(1:end/2), 'r');
set(gca, 'YScale', 'log')
xlabel('f [Hz]')

N=4096;
[S,F,T,P] = spectrogram(y,blackmanharris(N),round(N*1/2),N,fs);
figure;
surf(T,F,10*log10(P), 'edgecolor','none'); axis tight;
view(0,90);
xlabel('Time (Seconds)'); ylabel('Hz');

```

Ahol a kék az eredeti jel amplitúdó karakterisztikája, a piros a szűrt jelé.

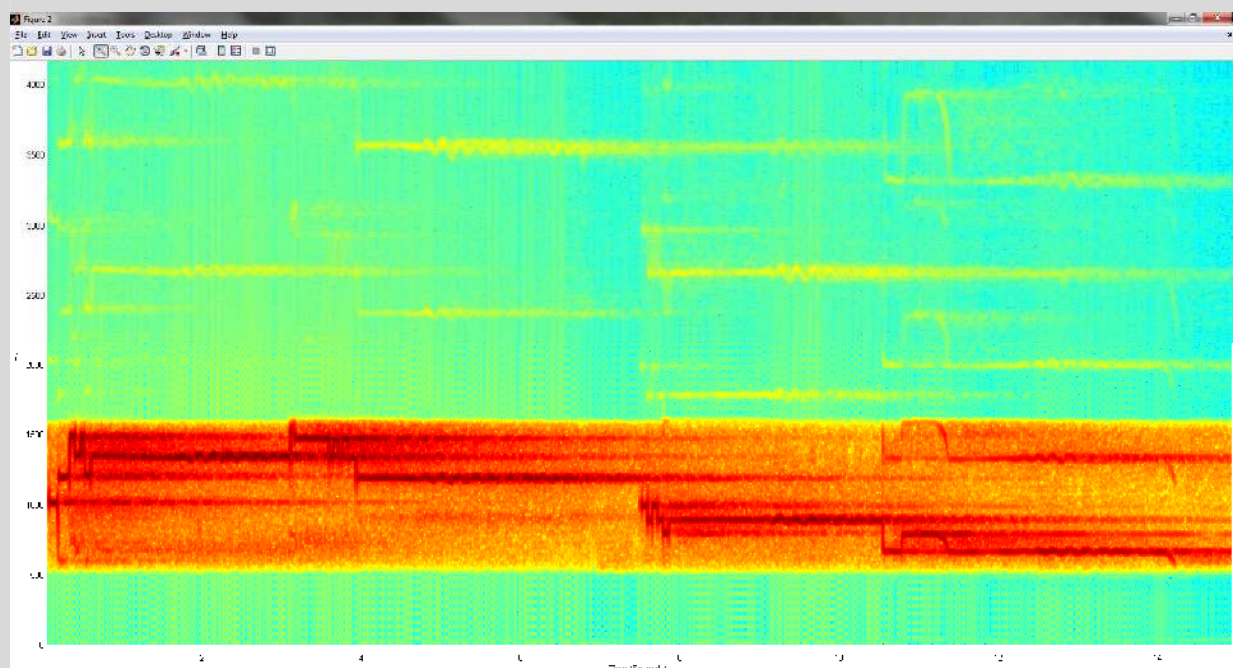


A kép a következő beállításokkal készült:

```

N=4096; [S,F,T,P] = spectrogram(y,blackmanharris(N),round(N*4/5),2*N,fs);

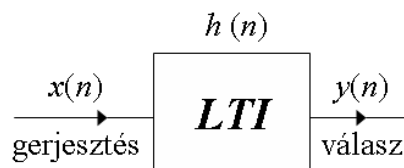
```



Feladatok otthoni kidolgozásra

12.8) Egy diszkrét, kauzális, $h(n) = (1 \ -1)$ impulzusválaszú szűrő bemenetén az $x(n) = \delta(n) + \delta(n-3)$ gerjesztés jelenik meg. Adja meg a szűrő válaszát: i) diszkrét konvolúcióval, ill. ii) DFT felhasználásával (Segítség: $h(n) \xrightarrow{DFT} H(k)$ és $x(n) \xrightarrow{DFT} X(k)$ után $Y(k) = H(k) \otimes X(k) \xrightarrow{IDFT} y(n)$)! A két számítás ugyanarra az eredményre vezet? Magyarázza a tapasztaltakat!

12.9) Egy lineáris, időinvariáns rendszer az $x(n) = [\underset{\uparrow}{2} \ 1 \ -1 \ 1]$ gerjesztésre adott válasza $y(n) = [\underset{\uparrow}{2} \ 1 \ 1 \ 4 \ 0 \ 0 \ 1]$.



- Adja meg a szűrő $h(n)$ impulzusválaszát!
- Az impulzusválasz alapján milyen típusú a szűrő!

12.10) Adja meg az $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ diszkrét jel 4 pontos és 6 pontos DFT-jét! Ábrázolja az eredményt közös grafikonon! Magyarázza a tapasztaltakat!

12.11) Egy $x(t) = 2 \sin(2\pi f_0 \cdot t)$ jel spektrumanalízise során f_s frekvenciájú mintavételezés és 4 bites lineáris kvantálás (teljesen kivezérelt) után egy 8 pontos FFT-vel állítjuk elő a diszkrét spektrumot.

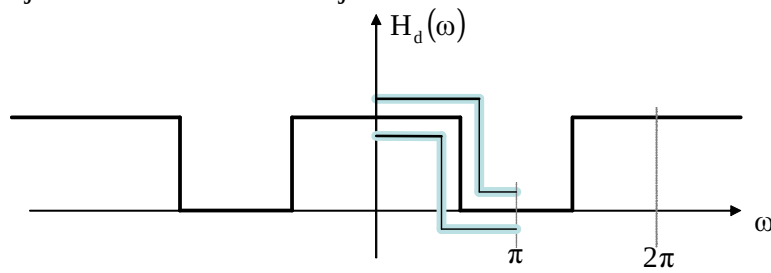
- Adja meg, és értelmezze** az FFT kimenetét, ha $f_0/f_s = 1/4$!
- Rajzolja le a számítás lepke ábráját!

12.12) Egy M foksámú FIR szűrőt tervezünk ablakolással. A toleranciasémába illő

$$H_d(\omega) \text{ kívánt átviteli karakterisztika sorfejtéséből } h_d(n) = \begin{cases} 0.3^n & \text{ha } n \geq 0 \\ 0.3^{-n} & \text{ha } n < 0 \end{cases}.$$

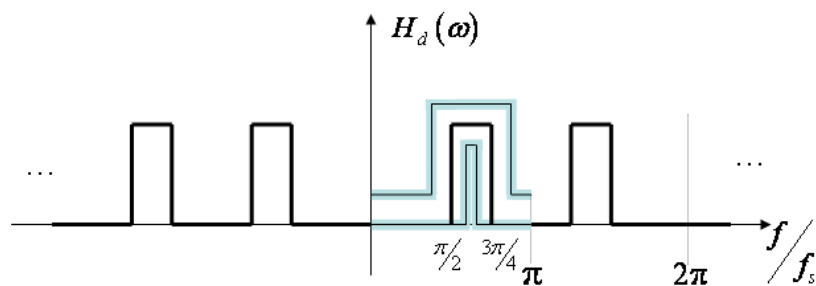
- Rajzolja le a $H_d(\omega)$ kívánt átviteli karakterisztikát!
- Adja meg egy $M=7$ foksámú FIR szűrő együtthatóit, ha az alkalmazott ablak egy rectangular és Hamming ablak!

c) Rajzolja le a szűrő architektúráját!



12.13) Adja meg a $[0, \pi/2]$ relatív frekvenciatartományon ideális aluláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének az impulzusválasz függvényét $J=5$ esetén! Adja meg az impulzus választ Bartlet ablak esetén is! Rajzolja le a szűrőt!

12.14) Adja meg a $[\pi/2, 3\pi/4]$ relatív frekvenciatartományon ideális sáváteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének a $h(n)$ impulzusválasz függvényét $J=7$ esetén! Adja meg, és rajzolja le a megvalósított szűrő $|H(f)|$ amplitúdó karakterisztikáját!



12.15) Adja meg a $[0, \pi/4]$ relatív frekvenciatartományon ideális aluláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének az impulzusválasz függvényét $J=7$ esetén! Rajzolja le a szűrőt!!