

Megoldott feladatok

10.1) Hogyan tudjuk becsülni az $\mathbf{R}$ korrelációs mátrixot megfigyelések alapján? Mutasson egy példát $\mathbf{R}$ korrelációs mátrixra, ha a dimenziószáma legalább 4! A korrelációs mátrix alapján írja fel a Wiener szűrő optimális beállítására vonatkozó rekurzióját a leggyorsabb konvergenciát garantáló Δ paraméterrel!

Megoldás

Egy sztochasztikus folyamat korrelációs mátrixa definíció szerint $R_{ij} = E\{x_i x_j\}$, a megfigyelések alapján a korrelációs mátrix becsülhető az

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{1}{K - \max(i, j)} \sum_{m=0}^{K - \max(i, j)} x_{i+m} x_{j+m}$$
 statisztikával. Példa egy 4 dimenziós korrelációs mátrixra:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

A leggyorsabb konvergenciát garantáló Δ paramétert az $\mathbf{R}$ korrelációs mátrix sajátértékeiből határozhatjuk meg. Az $\mathbf{R}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 0.191$, $\lambda_2 = 0.691$, $\lambda_3 = 1.309$ és $\lambda_4 = 1.809$, amiből az optimális Δ paraméter a következő:

$$\Delta_{opt} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} = \frac{2}{0.191 + 1.809} = 1.$$

Feladatok a gyakorlatra

10.2) Egy véletlen folyamatot kívánunk egy másodfokú prediktorral tömöríteni. A véletlen folyamat korrelációs függvénye a következő:

$$R(0) = 1 \quad R(1) = 0.5 \quad R(2) = 0.2$$

- Írja fel a korrelációs mátrixot, és a korrelációs vektort!
- Adja meg a folyamat tömörítéséhez használt másodfokú prediktor optimális együtthatóit!

Megoldás

- Ha prediktorként akarjuk használni a modellünket, akkor

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(N-1) \\ R(1) & R(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R(1) \\ R(N-1) & \cdots & R(1) & R(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

- b) Az optimális együttthatókat kiszámolhatjuk a $\mathbf{R} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{r}$ egyenletből

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{0.75} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.75} \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5333 \\ -0.066 \end{bmatrix} =$$

10.3) Egy véletlen folyamatot kívánunk egy másodfokú prediktorral tömöríteni. A szűrőegyütthatók optimális beállítása esetén a négyzetes várhatóérték minimális (MMSE).

- Adja meg a $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ optimális szűrőegyüttható vektort, ha a korrelációs függvény becslésének értékei $R(0)=1, R(1)=0.2, R(2)=0.1$!
- Adja meg a Wiener szűrés rekurzív $\mathbf{w}(k)$ megoldását az iteráció $k=1,2$ lépéseire $\mathbf{w}(0)=[1 \ 0 \ 0]^T$ kezdeti súlyok esetén!
- Mutassa meg, hogy az $\text{MSE}(\mathbf{w}(k))$ lépésről lépésre közelebb kerül a minimális $\text{MMSE}=\text{MSE}(\mathbf{w}_{\text{opt}})$ értékhez! Rajzolja le az $\text{MSE}(\mathbf{w}(k))$ négyzetes várható hibát a k lépésszám függvényében (az ábrán vízszintes vonallal jelölje az optimális szűrőegyütthatóhoz tartozó MMSE értéket)!
- Adja meg a $\mathbf{w}'_{\text{opt}}$ optimális szűrőegyüttható vektort, ha az $y(k-1)$ és $y(k-2)$ minták megfigyeléséből az $y(k+1)$ értéket kívánjuk predikálni (az $y(k)$ helyett)!

Megoldás

a) Predikcióról lévén szó: $d(k) = y(k)$, vagyis $y(k-1)$ és $y(k-2)$ minták (2-fokú predikció) megfigyeléséből jósoljuk a következőt. Ebből kifolyólag:

$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}$. Ezeket behelyettesítve a normálegyenletbe kapjuk meg $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ -

$$\text{ot: } \mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} = \frac{1}{0.96} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.96} \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1875 \\ 0.0625 \end{bmatrix}$$

b) $\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \Delta \{\mathbf{R} \mathbf{w}(k) - \mathbf{r}\}$, ahol $\Delta = 1$ jó választás, mivel $\mathbf{R}$ mátrix sajátértékei: 0.8 és 1.2.

$$\text{Ez alapján: } \mathbf{w}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix} \text{ és}$$

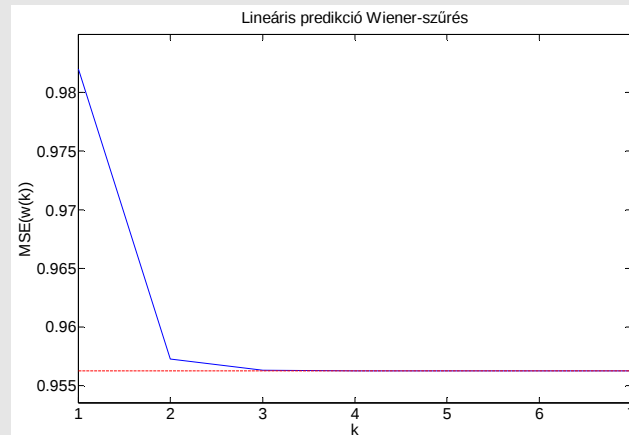
$$\mathbf{w}(2) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0.22 \\ 0.06 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } J(\mathbf{w}) = E \left[\left(d_k - \sum_{j=0}^J w_j x_{k-j} \right)^2 \right] = E[d_k^2] - 2\mathbf{w}^T \mathbf{r} + \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} \text{ alapján}$$

$$\text{MSE}(\mathbf{w}(0)) = E[d_k^2] - 2\mathbf{w}(0)^T \mathbf{r} + \mathbf{w}(0)^T \mathbf{R} \mathbf{w}(0) = R_{1,1} + 0.6 = 1 + 0.6 = 1.6$$

$$\text{MSE}(\mathbf{w}(1)) = 1 - 0.018 = 0.982, \text{ MSE}(\mathbf{w}(2)) = 1 - 0.0427 = 0.9573 \text{ és}$$

$$\text{MMSE} = \text{MSE}(\mathbf{w}_{\text{opt}}) = 1 - 0.04375 = 0.95625$$



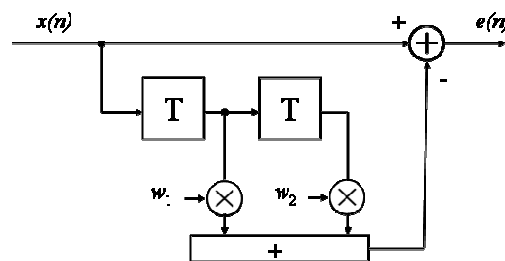
d) Ebben az esetben: $d(k) = y(k+1)$, és $y(k-1)$ és $y(k-2)$ minták (2-fokú predikció) megfigyeléséből jósoljuk a következő utánt. Ebből kifolyólag:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (csak a keresztkorrelációs vektor módosul). Ezeket}$$

behelyettesítve a normálegyenletbe kapjuk meg $\mathbf{w}'_{\text{opt}}$ -ot:

$$\mathbf{w}'_{\text{opt}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} = \frac{1}{0.96} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.96} \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10417 \\ -0.02083 \end{bmatrix}$$

10.4) Adott egy másodfokú prediktor az alábbi blokkdiagram szerint:



- a) Határozza meg a $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ optimális szűrőparamétereket és az $\text{MSE}(\mathbf{w}_{\text{opt}})$ négyzetes hibát, ha a bemeneti jel az alábbi:

$$x(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + v(n),$$

ahol $v(n)$ 0 várhatóértékű Gaussi fehér zaj $\sigma_v^2 = 0.1$ varianciával!

- b) Generáljon egy $n=1, \dots, 1000$ mintasorozatot, és használja a Wiener szűrés rekurzív alakját az optimális paraméterek meghatározásához ($\Delta=1$)! Ábrázolja a rekurzió során az $\text{MSE}(\mathbf{w}(k))$ hibát!
- c) Oldja meg az előző alfeladatot Δ_{opt} esetén!

Feladatok otthoni kidolgozásra

10.5) Egy véletlen folyamatot kívánunk egy harmadfokú prediktorral tömöríteni. A szűrőegyütthetők optimális beállítása esetén a négyzetes várhatóérték minimális (MMSE).

- a) Adja meg az $\mathbf{R}$ korrelációs mátrixot, ha a korrelációs vektor $\mathbf{r} = [0.5 \ 0 \ 0.2]^T$?
- b) Lehet-e $\mathbf{w}_{\text{opt}} = [0.85 \ -0.7 \ 0.55]^T$ az optimális szűrőegyütthető vektor?
- c) Az $\mathbf{R}$ korrelációs mátrix sajátértékei ismeretében ($\lambda_1 = 0.2929$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = 1.7071$) milyen Δ tanulási paraméter esetén lesz a leggyorsabb az LMS algoritmus konvergenciája? Igazolja, hogy a megadott megoldás az optimális!

10.6) Egy véletlen folyamatot kívánunk egy másodfokú prediktorral tömöríteni. A szűrőegyütthetők optimális beállítása esetén a négyzetes várhatóérték minimális (MMSE).

- a) Adja meg a $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ optimális szűrőegyütthető vektort, ha a korrelációs függvény becslésének értékei $R(0) = 1, R(1) = 0.5, R(2) = 0$!
- b) Tegyük fel, hogy a korrelációs függvény $R(1)$ értékét csak δ hibával tudjuk becsülni (azaz $R(0) = 1, R(1) = 0.5 \pm \delta, R(2) = 0$). Adja meg és rajzolja fel a négyzetes várhatóértéket (MSE) a δ hiba függvényében, ha a $\mathbf{w}_{\text{opt}}$ optimális szűrőegyütthetők az előző feladatban kiszámoltak!