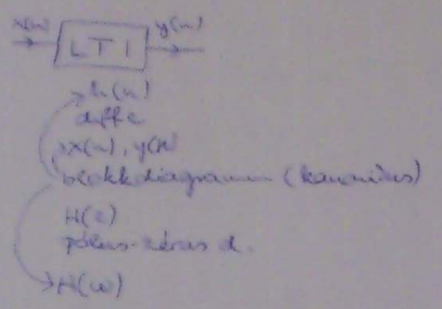
4. AD C → kw → kv (SAR) (kvantálás feladat valódi!)

2. LTI: ellenőrzés 2 úton

3. DFT / FFT "kalandozás" jegy emelt előjáron

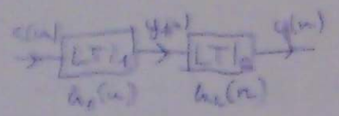


V 8. 6
Digitál kan... nagyfrekv. eset

← ideada lépésben kódol? ..
(ilyen nincs benn lesz) - DE előtanulmányban az!

kanonikus: összeg / konvolúció
II: átlagadókhoz

FELADAT



LTI_1: $y(n) - y(n-1) = x(n) - 0{,}5x(n-1)$

LTI_2: $h_2(n) = \delta(n) + u(n-1)\,0{,}5^{n-1}$

a., LTI_1 $h(-) = ?$ (rekurzív)

$x(n) = \delta(n)$

$M = 1 \quad N = 1$

$y(-1) = 0$ c

DE homogén is 0. → $h(n)$

$\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow h(n) = c \cdot 1^n = c$

$n \geq M+1$-től érvényes (mert előtte 0 a jobboldal) $= 2$

$n \geq M+1-N = 1$-re kiterjesztjük:

$y(-1) = 0$

$y(0) = y(0) - y(-1) = x(0) - 0{,}5x(-1)$

$y(0) = 1$

$y(1)$ behelyettesítés:

$y(1) - y(0) = \delta(1) - 0{,}5\delta(0)$

$y(1) = -0{,}5 + 1 - 0{,}5 = c$

$y(2)$: $y(2) - y(1) = \delta(2) - 0{,}5\delta(1) \rightarrow y(2) = 0{,}5$

$\left(Z\{u(n)\cdot a^{n-3}\} = a^{-3}\cdot\frac{z}{z-1} \right)$

$\Rightarrow h(n) = \delta(n) + u(n-1)\cdot 0{,}5$

$y(0) = 1$ ↑ $n \geq 1$-től

Ezután (nullától érvényes lenne amit számolunk δ-ra ...)

$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$

$H_1(z) = Z\{h_1(n)\} = Z\{\delta(n) + u(n-1)\cdot 0{,}5\} = 1 + z^{-1}\frac{z}{z-1}0{,}5 = \frac{z-1+0{,}5}{z-1} = \frac{z-0{,}5}{z-1}$

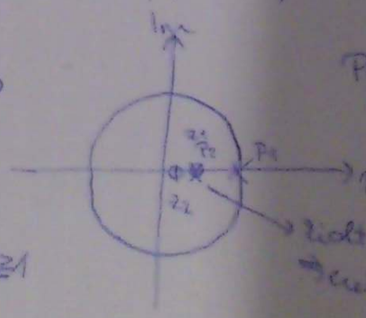
$H_2(z) = Z\{h_2(n)\} = Z\{\delta(n) + u(n-1)\,0{,}5^{n-1}\} = 1 + z^{-1}\frac{z}{z-0{,}5} =$

$= \frac{1z-2+1}{z-0{,}5} = \frac{1z-1}{z-0{,}5}$ RoC: $\{|z| > 0{,}5\}$

$H(z) = \frac{z-0{,}5}{z-1}\cdot 1\,\frac{z-0{,}25}{z-0{,}5} = \rightarrow$

$= 1\cdot\frac{z-0{,}25}{z-1}$

RoC: $|z| > 1$



Pólus × zérus ○○

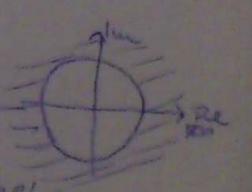
nem stabil, mert pólus ≥ 1

nem egyszerűsíthető egymás

→ csak egyszerűsítés után

K = 4 ← 4-es szorzó miatt

RoC
$|z| > 1$
pólus mert belépő jel

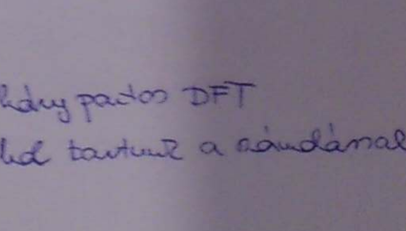


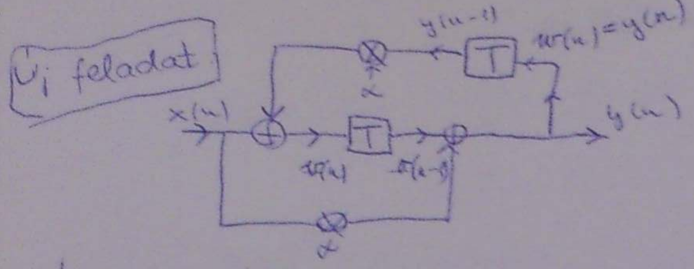
c, $H(z) \rightarrow$ a kanonikus blokkdiagramm

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 4 \cdot \frac{1 - 0{,}25 z^{-1}}{1 - z^{-1}} \rightarrow Y(z) - z^{-1} \cdot Y(z) = \left(X(z) - 0{,}25 z^{-1} X(z)\right) \cdot 4$$

$$y(n) - y(n-1) = 4x(n) - x(n-1)$$

↑ a törtben a z csak negatív kitevőn legyen





b, milyen α esetén BIBO stabil?

$a_0 = \alpha = 1 \quad h(n) = ?$

* kiválthatóság állapotváltozóval: ~~kell~~ (nem kötelező, csak ezzel egyszerűbb)

$$v(n) = x(n) + \alpha \cdot y(n-1)$$
$$y(n) = v(n-1) + \alpha \cdot x(n)$$
$$y(n) = x(n-1) + \alpha \cdot y(n-2) + \alpha \cdot x(n)$$
$$y(n) - \alpha \cdot y(n-2) = \alpha x(n) + x(n-1)$$

$\alpha = 1$: $y(n) - y(n-2) = x(n) + x(n-1)$

$x(n) = \delta(n)$ $N = 2, M = 1$

$y(-2) - y(-1) = 0$ (relaxált)

homogén m.o.:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \rightarrow y_h = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot (-1)^n$$

$n \geq M+1-N = 0$-tól érvényes a valós

$y(-2) = 0$
$y(-1) = 0$
$y(0) = 1 = c_1 + c_2 \rightarrow c_1 = 1 \rightarrow h(n) = u(n)$
$y(1) - 1 = c_1 - c_2 \quad c_2 = 0$
$y(2) = 1$

α = ?

$\lambda^2 - \alpha = 0$

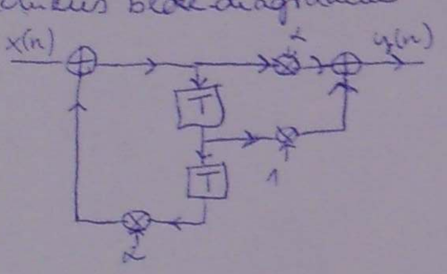
$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$

$|\lambda_{1,2}| > 0 \Leftrightarrow$ BIBO stabil

$\Updownarrow$

$|\sqrt{\alpha}| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1$

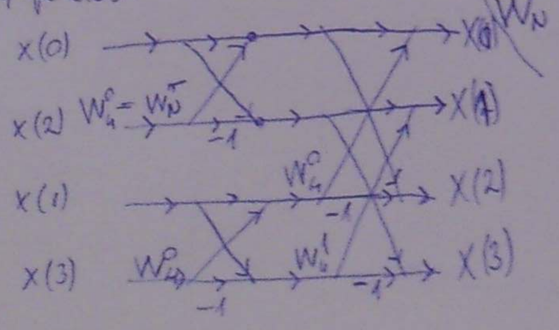
c, kanonikus blokkdiagramm



☒

FFT: DFT, csak kevesebb számolás

Pl: 4-pontos:



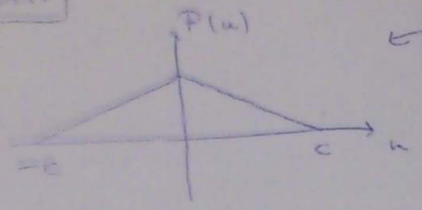
W_N^r : N: hány pontos DFT
r: hol tartunk a számolásnál?

(lépkedtünk ilyen!)

4 feladat

V.8.6.

a)



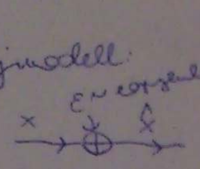
← sztochasztikus jel sűrűségfüggvénye

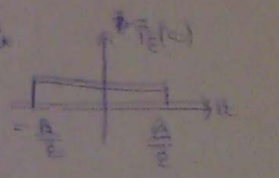
$n = 5$ bites

lineáris, illesztett kvantáló

SNR = ?

zajmodell:





akkor jó, ha a jel dinamikája $\in [-c, c]$

illesztett $\Rightarrow x_{max} = c$

$$SNR = \frac{P_{jel}}{P_{zaj}} =$$

$$\Delta = \frac{2c}{2^n} = \frac{2c}{2^5} = \frac{c}{16}$$

$$P_{zaj} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot p(u)\,du = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} u^2 \frac{1}{\Delta}\,du = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$P_{jel} = \int_{-\infty}^{-c} 0 \,du + \int_{-c}^{0} u^2\left(\frac{1}{c^2}\cdot u + \frac{1}{c}\right)du + \int_{0}^{c} u^2\left(-\frac{1}{c^2}\cdot u + \frac{1}{c}\right)du =$$

$$= \frac{c^2}{6}$$

$$SNR = \frac{c^2/6}{c^2/2^8/12} = \frac{2^8}{2} = 2^7 = 128$$

$$= 2^9 = 512$$

$$SNR^{[dB]} = 10 \lg SNR =$$

$$= 10 \cdot \lg 512 \cong 27\ dB$$

b) nincs nem lineáris

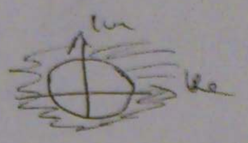
$$SNR^{[dB]} = 27 - 10 \lg \frac{x^2_{max}}{c^2}$$

+ Ez kvantálás
+ Lloyd-Max

Z - transzformáció:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

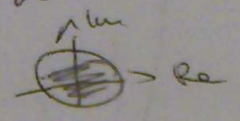
$$\mathcal{Z}\{u(n) \cdot \alpha^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{z}} = \frac{z}{z-\alpha}$$



RoC $|z| > |\alpha|$

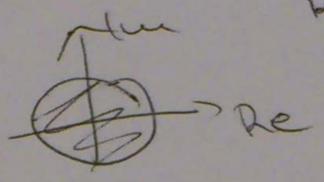
$$\mathcal{Z}\{u(-n) \cdot \alpha^n\} = \sum_{n=-\infty}^{0} \alpha^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{-n} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha - z}$$

RoC $|z| < |\alpha|$



$$\mathcal{Z}\{u(n-1)\alpha^n\} = \frac{z}{z-\alpha}$$

$|z| > |\alpha|$



DON'T FORGET:

- parciális törtekre bontás
- polinom osztás
- kifejtési tétel
- RoC meghatározása

$X(z) \rightarrow x(n)$

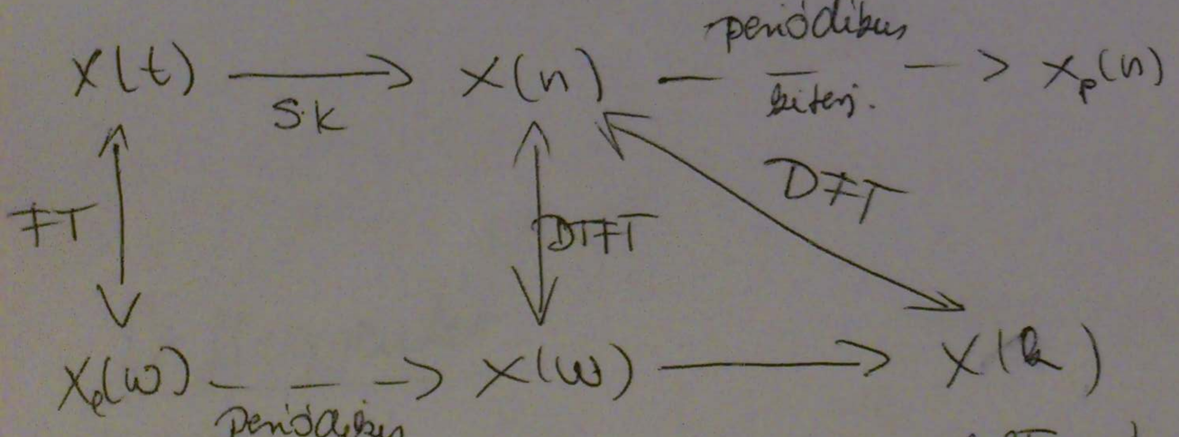
z^k eltolás $(n-k)$ $k = 0, 1, 2$

$1 \rightarrow \delta(n)$

$z^k \cdot (\ ) \rightarrow u(n-k)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$ ← pólus, ↖ zérus

DFT



$$P(\omega) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}$$

$$X\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k\right)$$

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\left(\omega - \frac{2\pi}{N} \cdot k\right) \cdot n}$$

$$\sum_{\xi=0}^{N-1} X(k) \cdot P\left(\omega - \frac{2\pi}{N} \cdot k\right)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} k \cdot n} \qquad k = 0, 1 \ldots N-1$$

$H(z)$ $h(n)$

↘ ↙ DTFT

$H(\omega) = H(z)$

FIR: csak ~~polusai~~ zérusai vannak

összes pólus az origóban

Hpontos ~~DFT~~

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

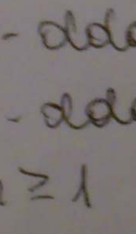
Logaritmikus kvantálló

$$\max_{\ell(x)} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\ell'^2(x)}\,dx} \cdot \frac{3N^2}{C^2}$$

Lloyd-Max dg.

$$\min_{\Delta_i, x_i} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Delta_i} (x - x_i)^2 p(x)\,dx$$

rekurzívan tart az optimumhoz



$$\Delta_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \ldots = 0$$

megállási kritérium kell

Diszkrét konvolúció.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k)$$ ($x(n)$-t megfordítjuk)

DTFT

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

$h(n) \xrightarrow{DTFT} H(\omega)$ ↓ $|H(\omega)|$ ↘ $\arg H(\omega)$

DTFT:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \cdot e^{j\omega n}\,d\omega$$

$h(n) = [1 \quad -1]$

$H(\omega) = 1 - e^{-j\omega}$

Diffegyenlet.

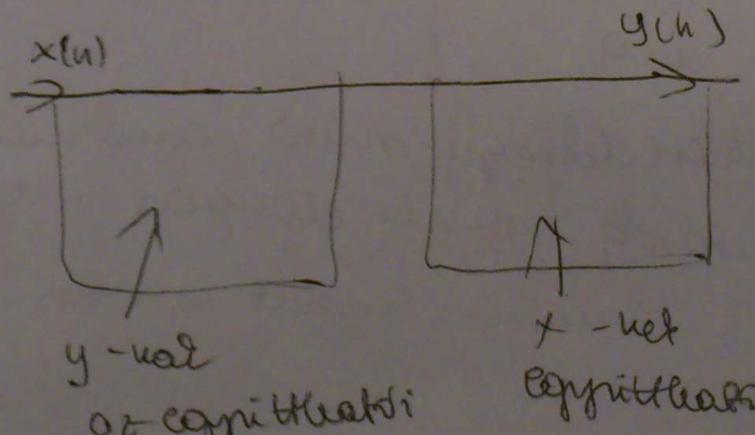
y-ddal M

x-ddal N

$n \geq 1$ y_p-nél

$n \geq M-N$ főrészes helyettesítéssel

Blokkdiagram.



minél kevesebb késleltető legyen benne!

~~Különös egyösz~~ $C_1 \cdot 0^n + C_2 \cdot 0^n \cdot n! \cdot (-1)$

rezonancia $x(n) = y_h(n)$

$y_p(n) = x(n) \cdot n \cdot k$

(M) $h(n)$ = impulzus válasz

$H(z)$ = átviteli fv.

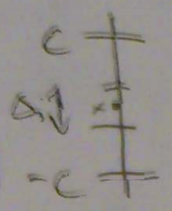
DIGJEL

Logaritmikus kvantálás:

- kvantálási karakteristika a relatív hibát tartja szintes
- nagy amplitúdó -> nagy hiba
  kis amplitúdó -> kis hiba

Ekvantálás:

- amplitúdóbeli ólomkvetés
  (végtelen sok érték ábrázolása véges sok értékkel)
  16 bites kvantálás 65536 amplitúdó értéket kül. meg



dinamikus kvantálás:

jel átlép egy küszöböt, akkor eltárolom a mintát
lassan változó -> keveset, gyorsan vált. -> sokat

SNR: jel-zaj viszony $\frac{P_{jel}}{P_{zaj}} = (*)$ $POW_{signal} = \frac{4C^2}{12}$

10-es alapú logaritmus $20\log_{10} 2^n \approx 6{,}02 \cdot n$ $N = \frac{2C}{\Delta} = 2^n$

Mintavételezés: $f_s \geq 2B$ a kétszeresével mintavételezünk, akkor a jelet veszteségmentesen visszakapjuk

Túlmintavételezés: $x(t) = \sin(\omega_1 \pi t) + \sin(\omega_2 \pi t)$
$B = (2)$ $f_s \geq 2\cdot 2 = 2B = \omega$

- alsó mintavételi határt használjuk, akkor a jelvisszaállítás ideális aluláteresztő szűrő kell -> gyakorlatban nem valósítható meg
- véges meredekségű szűrő, ami megvalósítható
- könnyebb miatt előnyös
- $f_s > 2B$ 2 minta között torzítás

$$(*)\ \frac{\frac{x^2_{max}}{2}}{\Delta^2/12} = \frac{\frac{x^2_{max}}{2}}{\left(\frac{2C}{2^n}\right)^2/12}$$

$$SNR^{[dB]} = 6n + \overset{\alpha +}{10}\lg \frac{x^2_{max}}{C^2}$$