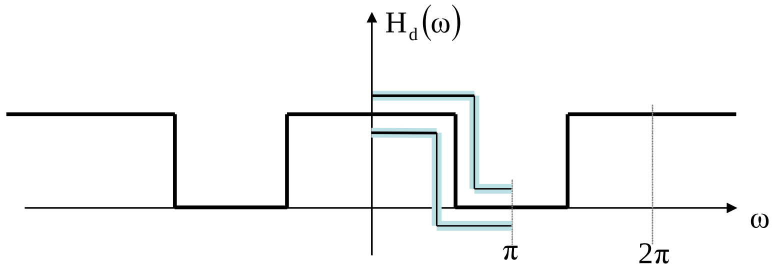
Megoldott feladatok

6.1) Egy M fokszámú FIR szűrőt tervezünk ablakolással. A toleranciasémába illő $H_d(\omega)$ kívánt átviteli karakterisztika sorfejtéséből $h_d(n)=\begin{cases}0.5^n & ha \quad n\geq 0\\ 0.5^{-n} & ha \quad n<0\end{cases}$.



a) Rajzolja le a $H_d(\omega)$ kívánt átviteli karakterisztikát!

b) Adja meg egy M=7 fokszámú FIR szűrő együtthatóit, ha az alkalmazott ablak rectangular és Hamming ablak! Rajzolja le a szűrő architektúráját!

c) Rajzolja le a $H(\omega)$ kívánt átviteli karakterisztikát rectangular és Hamming ablakolás estén!

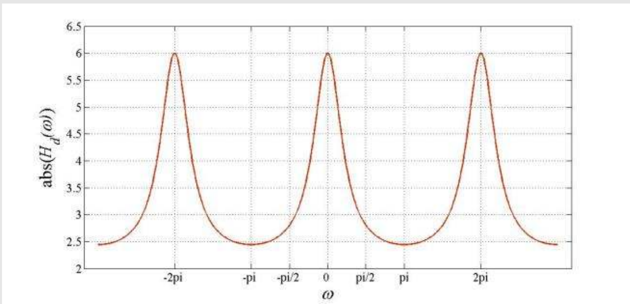
Megoldás

A szűrő átviteli karakterisztikája az átviteli függvény diszkrét idejű Fourier transzformáltja:

$$H_d(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}0.5^n e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}0.5^n e^{-j\omega n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(0.5e^{j\omega}\right)^n-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(0.5e^{-j\omega}\right)^n=\frac{1}{1-0.5e^{j\omega}}-1+\frac{1}{1-0.5e^{-j\omega}}=\frac{0.75}{1.25-\cos\omega}.$$

Az átviteli karakterisztika abszolút értéke az alábbi ábrán látható.



A kívánt karakterisztika impulzusválaszából kiablakolással kapjuk a FIR szűrő együtthatóit, ahol a rectangular és Hamming ablakfüggvények a következők:

$$w_{\text{rectangular}}(k)=\begin{cases}1 & \text{ha} \quad 0\leq k\leq 6\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases},\ \text{és}$$

$$w_{\text{Hamming}}(k)=\begin{cases}0.54-0.46\cos\left(2\pi\dfrac{k}{6}\right) & \text{ha} \quad 0\leq k\leq 6\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$$

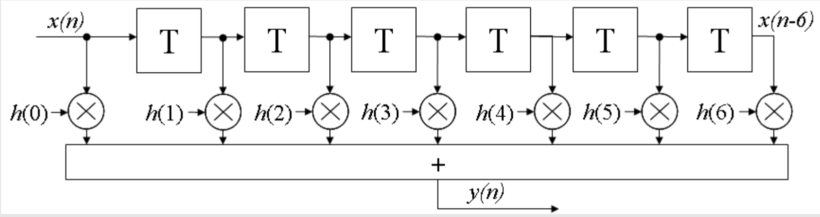
$$w_{\text{Hamming}}=\begin{bmatrix}0.08 & 0.031 & 0.77 & \underset{\uparrow}{1} & 0.77 & 0.031 & 0.08\end{bmatrix}$$

és ez alapján a szűrőegyütthatók a következők:

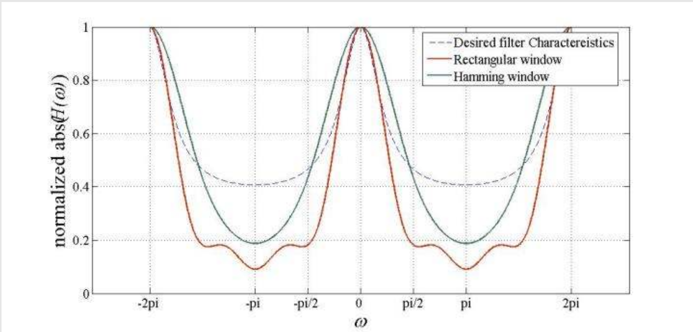
$$\mathbf{h}_{\text{rect}} = \left[\underset{\uparrow}{0.125} \quad 0.25 \quad 0.5 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.25 \quad 0.125\right], \text{ és}$$

$$\mathbf{h}_{\text{Hamming}} = \left[\underset{\uparrow}{0.01} \quad 0.0775 \quad 0.385 \quad 1 \quad 0.385 \quad 0.0775 \quad 0.01\right]$$

amelyeket az alábbi N=7 fokú FIR szűrőbe kell betölteni.



A megvalósított $H(\omega)$ karakterisztikák az alábbi ábrán láthatóak.

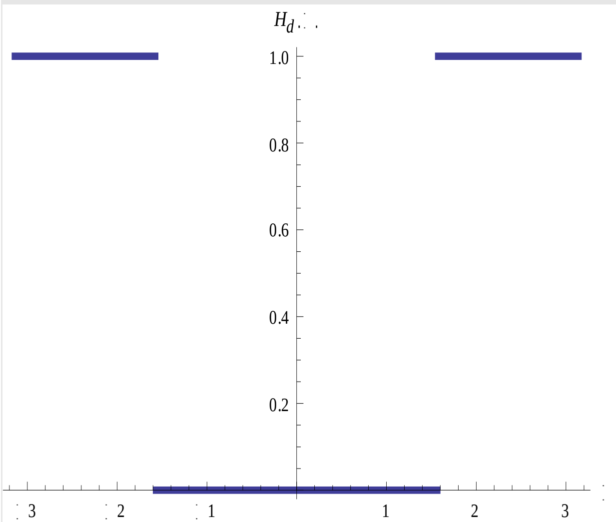


Rectangular ablak esetén megfigyelhető a Gibbs oszcillácó (a jelenség nagyobb fokszám esetén még markánsabban jelentkezik).

6.2) Adja meg a $[\pi/2, \pi]$ relatív frekvenciatartományon ideális felüláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének a $h(n)$ impulzusválasz függvényét J=3 esetén! Adja meg és rajzolja le a szűrő $H(f)$ amplitúdó karakterisztikáját a relatív frekvenciatartományon!

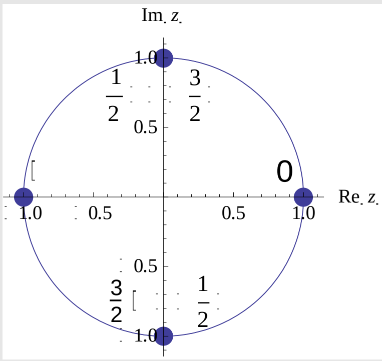
Megoldás

1. Először megtervezzük a szűrő ideális átviteli karakterisztikáját:



$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, \pi/2 \le |\omega| \le \pi \\ 0, \text{ egyébként} \end{cases}, \omega \in [-\pi, \pi]$$

J=3 (szűrő fokszáma) ismétlésnek:



2. Felhasználva a Fourier sorfejtés tulajdonságait:

$$H_d(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)\cdot e^{-j\omega n}, \qquad h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)\, e^{j\omega n} d\omega$$

Kiszámoljuk $h_d(n)$-et, $n=-3,\ldots,3$-ra:

$$h_d(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)\cdot e^{j\omega 0} d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} 1e^{j\omega 0} d\omega+\int_{\pi/2}^{\pi} 1e^{j\omega 0} d\omega\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\omega\Big|_{-\pi}^{-\pi/2}}_{\pi/2}+\underbrace{\omega\Big|_{\pi/2}^{\pi}}_{\pi/2}\right]=\frac{1}{2}$$

Megjegyzés:

$$\int e^x dx=e^x, \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln(a)},$$

$$\int e^{j\omega} d\omega=\int (e^j)^{\omega} d\omega=\frac{e^{j\omega}}{\ln(e^j)}=\frac{e^{j\omega}}{j}=-je^{j\omega}$$

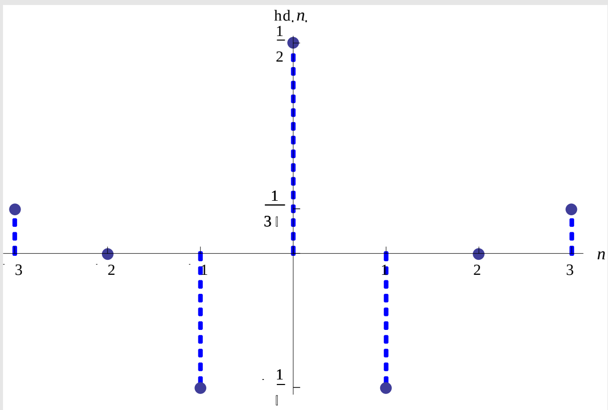
$h_d(k)$ páros függvény ($h_d(k)=h_d(-k)$), mert $\mathrm{H}_d(\omega)$ valós függvény.

$$h_d(1)=h_d(-1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)\cdot e^{j\omega 1} d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} e^{j\omega 1} d\omega+\int_{\pi/2}^{\pi} e^{j\omega 1} d\omega\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{(-je^{j\omega})\Big|_{-\pi}^{-\pi/2}}_{-1-j}+\underbrace{(-je^{j\omega})\Big|_{\pi/2}^{\pi}}_{+j-1}\right]=-\frac{1}{\pi}$$

$$h_d(2)=h_d(-2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)\cdot e^{j\omega 2} d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\left(-\frac{j}{2}e^{j2\omega}\right)\Bigg|_{-\pi}^{-\pi/2}}_{+\frac{j}{2}+\frac{j}{2}}+\underbrace{\left(-\frac{j}{2}e^{j2\omega}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}}_{-\frac{j}{2}-\frac{j}{2}}\right]=0$$

$$h_d(3)=h_d(-3)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega)\cdot e^{j\omega 3} d\omega=-\frac{1}{2\pi}\frac{j}{3}\left[\underbrace{(e^{j3\omega})\Big|_{-\pi}^{-\pi/2}}_{+j-1}+\underbrace{(e^{j3\omega})\Big|_{\pi/2}^{\pi}}_{-1+j}\right]=\frac{1}{3\pi}$$



3. Ablakot illesztünk az elméleti, eredeti impulzusválasz függvényre, hogy véges tartójú legyen, hiszen $h_d(n)$ végtelen tartójú mindkét irányban:
Az ablak, ami véges tartójú, most derékszögű ablakfüggvény (**w**):

$$\mathbf{h}_d = \left[\cdots, \frac{1}{3\pi}, 0, -\frac{1}{\pi}, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{3\pi}, \cdots \right]$$

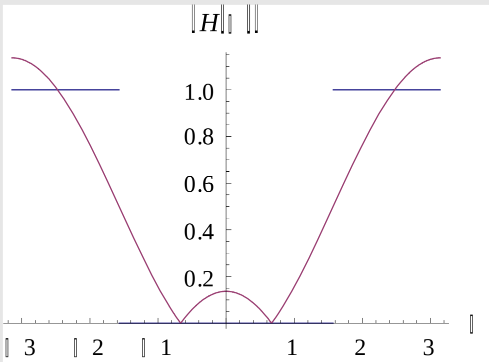
$$\mathbf{w} = \left[\cdots, 0, 0, 1, \underset{\uparrow}{1}, 1, 0, 0, \cdots \right]$$

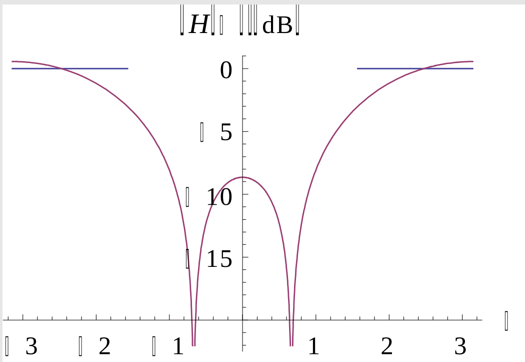
$$\mathbf{g} = \mathbf{h}_d \otimes \mathbf{w} = \left[\cdots, 0, 0, -\frac{1}{\pi}, \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{\pi}, 0, 0, \cdots \right],$$ ahol $\otimes$ az elemenkénti szorzás jele

4. Eltoljuk az ablakolt most már véges tartójú impulzus válasz függvényt, hogy kauzális rendszert kapjunk:

$$h(n) = g(n-R) = g(n-1) \Rightarrow \mathbf{h} = \left[\underset{\uparrow}{-\frac{1}{\pi}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\pi} \right]$$

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{J-1} h(n) \cdot e^{-j\omega n} = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} - \frac{1}{\pi} e^{-j2\omega}$$





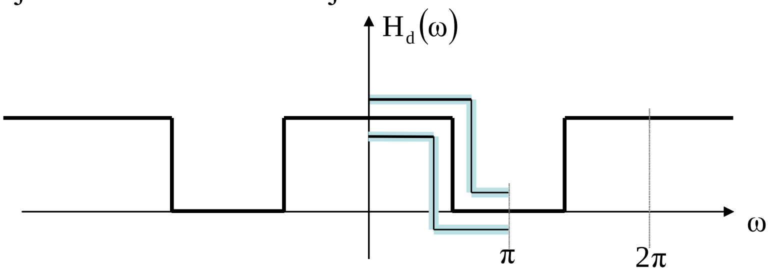
Feladatok otthoni kidolgozásra

6.3) Egy M fokszámú FIR szűrőt tervezünk ablakolással. A toleranciasémába illő $H_d(\omega)$ kívánt átviteli karakterisztika sorfejtéséből $h_d(n) = \begin{cases} 0.3^n & ha \quad n \geq 0 \\ 0.3^{-n} & ha \quad n < 0 \end{cases}$.

a) Rajzolja le a $H_d(\omega)$ kívánt átviteli karakterisztikát!

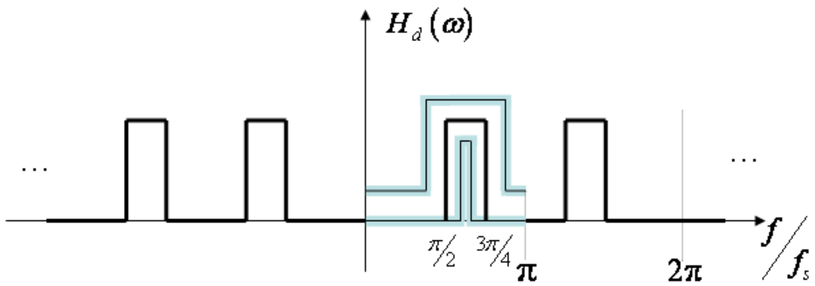
b) Adja meg egy M=7 fokszámú FIR szűrő együtthatóit, ha az alkalmazott ablak egy rectangular és Hamming ablak!

c) Rajzolja le a szűrő architektúráját!



6.4) Adja meg a $\left[0,\pi/2\right]$ relatív frekvenciatartományon ideális aluláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének az impulzusválasz függvényét *J*=5 esetén! Adja meg az impulzus választ Bartlet ablak esetén is! Rajzolja le a szűrőt!

6.5) Adja meg a $\left[\pi/2, 3\pi/4\right]$ relatív frekvenciatartományon ideális sáváteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének a $h(n)$ impulzusválasz függvényét *J*=7 esetén! Adja meg, és rajzolja le a megvalósított szűrő $\left|H(f)\right|$ amplitúdó karakterisztikáját!



6.6) Adja meg a $\left[0,\pi/4\right]$ relatív frekvenciatartományon ideális aluláteresztő szűrő derékszögű ablakfüggvénnyel vett közelítésének az impulzusválasz függvényét *J*=7 esetén! Rajzolja le a szűrőt!!