

LTI rendszerek analízise időtartományban

2.1) Adja meg a kauzalitás és a stabilitás definícióját! Adott egy rendszer $h(n) = u(n-1)n^{-2}$ impulzusválasza. Stabil és kauzális ez a rendszer? Válaszát a definíciók alapján indokolja!

Megoldás

Kauzalitás: Egy rendszer kauzális, ha a pillanatnyi válaszát csak a jelen és múlt határozza meg, a jövőtől nem függ, azaz:

$$y(n) = \Psi(y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots).$$

Stabilitás: bármilyen input esetén a kimenet korlátos marad

BIBO stabilitás: korlátos input esetén az output is korlátos marad, vagyis:

ha $|x(n)| \leq M_x \forall n - re \Rightarrow |y(n)| < M_y < \infty$ (ennek feltétele: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$)

- Mivel $h(n) = u(n-1)n^{-2} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{ha } n > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, ezért a definícióból következően *kauzális*.

- Mivel $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} \right| < \infty$, ezért definícióból következően *BIBO stabil* (de ezt meg is

lehet magyarázni: ha az input nem egy exp. felrobbanó függvény, akkor az impulzusválasz exp. csökkenő súlyai „le fogják húzni” a bemenet értékeit, így a kimenet is véges lesz)

2.2) Jelölje meg a helyes állításokat! Indokolja válaszát! (az állításonként 5 pont csak akkor kapható meg, ha a válasz a helyes indoklást is tartalmazza!)

a.) Ha egy lineáris rendszer kauzális akkor $h(n) = 0$ minden $n < 0 -ra$.

b.) Egy lineáris rendszer BIBO stabilitásának a feltétele, hogy a $h(n)$ abszolút értékben összegezhető legyen.

c.) Csak a lineáris időinvariáns rendszer írható le egyértelműen egy egyváltozós impulzusválasz függvény segítségével.

d.) A BIBO stabilitás azt jelenti, hogy tetszőleges bemeneti jel esetén a rendszer kimenetén mindig korlátos jel van.

e.) Az $y(n) = x(-n) + x(2n)$ rendszeregyenlettel adott szűrő időinvariáns és kauzális.

Megoldás

- a.) Igaz. Ez a kauzális rendszer definíciójában szerepel. Konvolúció esetén ez biztosítja, hogy a rendszer kimenete csak a múltbéli bemenettől függjön (rendszer csak a múltbéli jeleket használja fel a kimenet előállítására):

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^0 h(n-k)x(k)$$

- b.) Igaz. A BIBO stabilitási tétel bizonyításából látható, hogy egy korlátos bemeneti jel esetén csak akkor kapunk korlátos kimeneti jelet, ha a rendszer impulzus válaszára teljesül, hogy:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

- c.) Igaz?? A linearitás és az időinvariancia alapvető követelménye az impulzusválasz alkalmazhatóságának. E két tulajdonság szükséges ahhoz, hogy belássuk, hogy egy függvénnyel (impulzusválasz) leírható egy LTI rendszer.
- d.) Hamis. Csak korlátos bemeneti jel esetén biztosított a korlátos kimeneti jel BIBO stabil rendszer esetén. A neve is tartalmazza ezeket a feltételeket: Bounded Input Bounded Output
- e.) Hamis. A fent megadott szűrő se nem időinvariáns, se nem kauzális.

Nem időinvariáns, mert a definíció ($S\tau x(n) = \tau Sx(n)$) nem igaz rá:

$$y(n-1) = Sy(n) = S\tau x(n) = S\{x(-n) + x(2n)\} = \boxed{x(-n-1) + x(2n-1)}$$

≠

$$y(n-1) = Sy(n) = S\tau x(n) = \tau Sx(n) = \tau x(n-1) = \boxed{x(-n+1) + x(2n-2)}$$

Nem kauzális, mert a pillanatnyi kimenet a jövőbeli bemenettől is függ: $x(2n)$

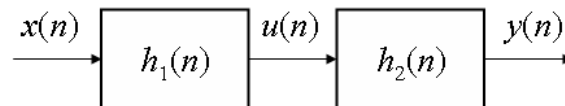
2.3) Egy lineáris időinvariáns rendszer impulzusválasza $h(n) = [1 \ 0 \ 1 \ 1]$. Adja meg a rendszer válaszát az $x(n) = [2 \ 1 \ -1 \ 1]$ gerjesztés esetén!

Megoldás

A rendszer válasza $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{j=0}^3 h(j)x(n-j)$ diszkrét konvolúcióval határozható meg.

$h(n) = [1 \uparrow 0 \ 1 \ 1]$	$y(n)$
[1 -1 1 2]	2
[1 -1 1 2]	1 ←
[1 -1 1 2]	1
[1 -1 1 2]	4
[1 -1 1 2]	0
[1 -1 1 2]	0
[1 -1 1 2]	1

2.4) Két sorosan (kaszád) kapcsolt LTI rendszer bemenetét az $x(n) = x_1(n) = [2 \ 1 \uparrow \ -1 \ 1]$ diszkrét jellel gerjesztjük.



- a.) Milyen tulajdonságai vannak a konvolúciónak? Mutassa be ezeket!
- b.) Adja meg az $y(n) = y_1(n)$ választ $h_1(n) = [1 \uparrow \ 2 \ 1]$ és $h_2(n) = [1 \uparrow \ 1]$ impulzusválaszok esetén!
- c.) Adja meg az eredő impulzusválaszt!
- d.) Adja meg a kaszád kapcsolás $y(n) = y_2(n)$ választát $x(n) = x_2(n) = [-2 \ \uparrow \ -1 \ 1 \ 1]$ gerjesztésre!
- e.) Mi lesz az $y(n)$ válasz az $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ gerjesztés esetén?

2.5) Adott egy $x(n) = [1 \ 4 \ 2 \ 3 \ 5 \ 3 \ 3 \ 4 \ 5 \ 7 \ 6 \ 9]$ diszkrét jelsorozat. Rajzolja le a következő jeleket:
 $x(n), x(n-2), x(4-n), x(n+2), x(n) \cdot u(2-n), x(n-1)\delta(n-3), x(n^2)!$

2.6) Adja meg a kauzalitás, a stabilitás, a linearitás és az időinvariancia definícióját! A definíciók alapján adja meg az alábbi rendszerek tulajdonságait:

- a.) $y(n) = \cos(x(n))$,
- b.) $y(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$,

- c.) $y(n) = x(-n+2)$,
- d.) $y(n) = x(n) + nx(n+1)$,
- e.) $y(n) = |x(n)|!$

2.7) A következő bemenet-kimenet párok egy időinvariáns rendszer megfigyeléséből származnak:

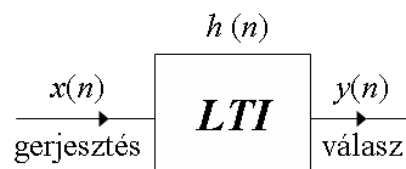
$$x_1(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{\Psi(n)} \leftrightarrow y_1(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_2(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{\Psi(n)} \leftrightarrow y_2(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_3(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\Psi(n)} \leftrightarrow y_3(n) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- a.) Tudunk valamit mondani a rendszer linearitásáról?
- b.) Mi a rendszer impulzusválasza?

2.8) Egy lineáris, időinvariáns rendszer az $x(n) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ gerjesztésre adott válasza $y(n) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.



- a.) Adja meg a szűrő $h(n)$ impulzusválaszát!
- b.) Az impulzusválasz alapján milyen típusú a szűrő!

Megoldás: Ez itt egyelőre egy becsapós feladat... ☺ A megoldáshoz de-konvolúcióra volna szükség, azonban azt nem tanuljuk, illetve nem használjuk most.

Megjegyzés: Egy rendszer vizsgálatához célszerű a szokásos vizsgálójeleket használni.

Hint: DTFT-vel áttérhetünk frekvencia tartományba, ahol egy osztással majd iDTFT-vel elvégezhető a feladat megoldása.

2.9) A következő bemenet-kimenet párok egy lineáris rendszer megfigyeléséből származnak:

$$x_1(n) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{\Psi(\cdot)}{\leftrightarrow} y_1(n) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2(n) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\Psi(\cdot)}{\leftrightarrow} y_2(n) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_3(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\Psi(\cdot)}{\leftrightarrow} y_3(n) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c.) Tudunk valamit mondani a rendszer időinvarianciájáról?

2.10) Adott egy szűrő $h(n) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix}$ impulzusválasza! Adja meg és rajzolja le az amplitúdó karakterisztikája $\alpha = 0.5$, $\alpha = -0.5$ és $\alpha = 1$ esetén! Milyen típusúak ezek a szűrők? Stabil-e a rendszer?

Megoldás

...

$$|H_{\alpha=0.5}(\omega)| = |1 + 0.5e^{-j\omega}| = \sqrt{(1 + 0.5 \cos \omega)^2 + 0.25 \sin^2 \omega} = \sqrt{1.25 + \cos \omega}$$

...

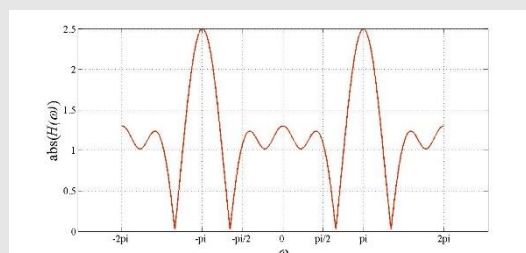
2.11) Rajzolja le a $h(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.5 & -0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$ impulzusválaszú szűrőhöz tartozó architektúrát! Milyen típusú ez a szűrő? Stabil-e a rendszer?

Megoldás

A megadott impulzusválasz alapján ez egy FIR szűrő, ami miatt strukturálisan stabil. Az átviteli karakterisztikája a következő:

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = 1 + 0.5 \cdot e^{-j2\omega} - 0.6 \cdot e^{-j3\omega} + 0.4 \cdot e^{-j4\omega},$$

ez alapján a szűrő felüláteresztő (pontosabban: sávszűrő+felülérősítő) típusú.



Normalizált frekvencia van az x tengelyen, vagyis 2π = mintvételi frekvencia (fs).

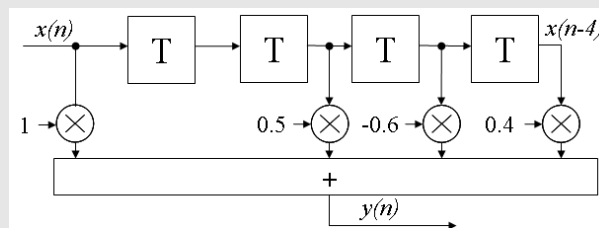
Értelemszerűen $fs/2 = \pi$ -ig van értelme értelmezni az átviteli spektrumot. Azt figyelhetjük meg, hogy:

- $[0, \pi/2]$ tartományom fodrosan, de kb. 1(=0 dB) az amplitúdó, vagyis itt se nem erősít, se nem szűr

- $[\pi/2, 3\pi/4]$ tartományon egyértelműen vág

- $[3\pi/4, \pi]$ tartományon egyértelműen erősít.

A rendszer blokkdiagramja az alábbi:



2.12) Lehet-e BIBO stabil a $h(n) = u(n) \frac{1}{n+1}$ impulzusválasz függvénnyel rendelkező szűrő? Válaszát indokolja!

Megoldás

A BIBO stabilitás elégséges feltétele, hogy az impulzusválasz függvény abszolút

integrálható legyen, a konkrét esetben: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \rightarrow \infty$, tehát a rendszer nem BIBO

stabil.

2.13) Mit jelent a kauzalitás? Kauzális-e az a rendszer, amelynek rendszeregyenlete az $y(n-1) = x(n) - 2x(n-1)$?

Megoldás

Egy rendszer kauzális, ha a pillanatnyi válaszát csak a jelen és múlt határozza meg, a jövőtől nem függ, azaz:

$$y(n) = \Psi(y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots).$$

A differenciaegyenlettel megadott rendszer nem kauzális.

2.14) Adott egy rendszer $y(n) = x(2n) + 2x(n)$ rendszeregyenlete. Időinvariáns-e a rendszer? Válaszát indokolja!

Megoldás

Időinvariáns rendszer esetén $y(n) = S^k \{T\{x(n)\}\} = T\{S^k\{x(n)\}\}$, tehát az eltolás és rendszer operátor felcserélhető, vagy más szóval, a rendszer azonos gerjesztésre minden időpillanatban azonosan válaszol.

A fenti rendszeregyenlettel megadott szűrő nem időinvariáns, mivel

$$S^k \{T\{x(n)\}\} = x(2n - k) + 2x(n - k), \text{ de}$$

$$T\{S^k\{x(n)\}\} = x(2n - 2k) + 2x(n - k).$$

2.15) Adja meg a lineáris rendszer definícióját! Az $y(n) = x^2(n)$ rendszeregyenlettel adott rendszer lineáris? A definíció alapján indokolja választát!

Megoldás

Egy rendszer lineáris, ha teljesül az $y(n) = T\left\{\sum_i a_i x_i(n)\right\} = \sum_i a_i T\{x_i(n)\}$ szuperpozíció elve.

A fenti rendszeregyenlettel megadott szűrő nem lineáris, mivel

$$T\{a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\} = a_1^2 x_1^2(n) + 2a_1 a_2 x_1(n) x_2(n) + a_2^2 x_2^2(n), \text{ de}$$

$$a_1 T\{x_1(n)\} + a_2 T\{x_2(n)\} = a_1 x_1^2(n) + a_2 x_2^2(n).$$

2.16) Adja meg a kauzalitás és a stabilitás definícióját! Adott egy rendszer $h(n) = u(n-1)n^{-2}$ impulzusválasza. Stabil és kauzális ez a rendszer? Válaszát a definíciók alapján indokolja!

Megoldás

Kauzalitás: Egy rendszer kauzális, ha a pillanatnyi válaszát csak a jelen és múlt határozza meg, a jövőtől nem függ, azaz:

$$y(n) = \Psi(y(n-1), y(n-2), \dots, x(n), x(n-1), \dots).$$

Stabilitás: bármilyen input esetén a kimenet korlátos marad

BIBO stabilitás: korlátos input esetén az output is korlátos marad, vagyis:

ha $|x(n)| \leq M_x \forall n - re \Rightarrow |y(n)| < M_y < \infty$ (ennek feltétele: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$)

- Mivel $h(n) = u(n-1)n^{-2} = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{ha } n > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, ezért a definícióból következően *kauzális*.

- Mivel $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} \right| < \infty$, ezért definícióból következően *BIBO stabil* (de ezt meg is

lehet magyarázni: ha az input nem egy exp. felrobbanó függvény, akkor az impulzusválasz exp. csökkenő súlyai „le fogják húzni” a bemenet értékeit, így a kimenet is véges lesz)

2.17) Egy $h_i(n)$ impulzusválaszú szűrő az $x(n) = \left[1 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 1 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.5 \right]$ diszkrét

jelsorozattal történő gerjesztésre $y_i(n)$ diszkrét jelsorozattal válaszol.

a.) Adja meg és rajzolja le közös diagramon az alábbi $h_i(n)$ impulzusválaszokhoz tartozó $y_i(n)$ jelsorozatokat:

- $h_1(n) = [1 \quad 1]$,
- $h_2(n) = [1 \quad 2 \quad 1]$,
- $h_3(n) = [0.5 \quad 0.5]$,
- $h_4(n) = [0.25 \quad 0.5 \quad 0.25]$,
- $h_5(n) = [0.25 \quad -0.5 \quad 0.25]$,
- $h_6(n) = [0.5 \quad -0.5]!$

b.) Mi a különbség $y_1(n)$ és $y_2(n)$, valamint $y_3(n)$ és $y_4(n)$ között?

c.) Magyarázza $y_2(n)$ és $y_4(n)$ simaságát! Mi okozza?

d.) Hasonlítsa össze $y_4(n)$ és $y_5(n)$ jeleket! Mi a különbség? Hogyan magyarázza?

e.) Ábrázolja közös diagramon $x(n)$, $y_2(n)$ és $y_6(n)$ diszkrét jeleket, és magyarázza az eredményeket!