A/D konverzió, sávszélesség

1.1) Rajzolja fel A/D konverzió funkcionális blokkdiagramját, és írja le az egyes lépéseket! Mit mond ki a mintavételezési és visszaállítási tétel? Mi az aliasing jelenség? Vezesse le az A/D átalakítás során az egyenletes kvantálásra vonatkozó jel-zaj viszony összefüggését! Ismertesse (matematikai formulák nélkül), hogy milyen megfontolások vezetnek a logaritmikus kvantáláshoz!

1.2) Bizonyítsa be a konvolúció alaptulajdonságait: Folytonos konvolúció:

$$(f*g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

jelölésben elő szokott fordulni $f(t)*g(t)$ is

Diszkrét idejű konvolúció:

$$(f*g)[n] := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k]$$

kommutatív: $f*g=g*f$, jó tulajdonságból a rendszerek sorba kapcsolásánál az egyes rész rendszerek felcserélhetősége következik.

asszociatív: $f*(g*h)=(f*g)*h$, jó tulajdonságból a rendszerek sorba kapcsolásánál a rész rendszerek összevonhatósága következik.

disztributív: $f*g+f*h=f*(g+h)$, ebből a jó tulajdonságból következik a párhuzamosan kapcsolt rész rendszerek összevonhatósága.

asszociativitás skalárral való szorzásra: $a(f*g)=(a\cdot f)*g, a\in\mathbb{R},\mathbb{C}$, jó tulajdonságból következik a rendszerek lineáris erősítésének (skálázás) egybeolvasztása részrendszerekbe.

létezik egységelem közelítés: $f*\delta=f$,

ahol $\delta(t)$ ~ Dirac delta

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1, \quad \delta(t)=0, \text{ ha } t\neq 0$$

vannak olyan függvények, amire létezik inverz elem: $\exists f, \exists f^{-1}$, hogy $f*f^{-1}=\delta$

ez azért hasznos, mert vannak olyan rendszerek, amiket ki lehet egyenlíteni (equalizer), egy rendszer által bevezetett torzítást vissza lehet alakítani az eredeti jellé.

Sajnos nem minden függvényre létezik a konvolúcióra nézett inverz elem

1.3) Az $x_1(t)=u(t)e^{-t}$ és az $x_2(t)=u(t)\cdot t\cdot e^{-t}$ jeleket mintavételezzük. A sávszélesség meghatározásakor a küszöb paraméter $\varepsilon=0.01$

a. Melyik jel sávszélessége nagyobb?

b. Minimálisan milyen frekvenciával kell mintavételezni, ezt a két analóg jelet, hogy még visszaállíthatóak legyenek a mintáikból?

Megoldás

A két jel spektruma a Fourier transzformáltból számítható:

$$X_1(f)=\mathcal{F}\{u(t)e^{-t}\}=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-t}e^{-j2\pi f\cdot t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-t}e^{-j2\pi f\cdot t}dt=\left[\frac{e^{-(j2\pi f+1)t}}{-(j2\pi f+1)}\right]_0^{\infty}=$$

$$X_1(f)=\frac{1}{j2\pi f+1}$$

és

$$X_2(f)=\mathcal{F}\{u(t)t\cdot e^{-t}\}=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)t\cdot e^{-t}e^{-j2\pi f\cdot t}dt=\int_{0}^{\infty}t\,e^{-t}e^{-j2\pi f\cdot t}dt=\ (1)$$

Megj: $\int_a^b\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right)dx=\int_a^b f'(x)g(x)dx+\int_a^b f(x)g'(x)dx$

ezért $\int f(x)g(x)dx=f(x)\int g(x)dx-\int\left(f'(x)\int g(x)dx\right)dx$

$$(1)=\left[t\cdot\frac{e^{-(j2\pi f+1)t}}{-(j2\pi f+1)}\right]_0^{\infty}-\left[\frac{e^{-(j2\pi f+1)t}}{\left(-(j2\pi f+1)\right)^2}\right]_0^{\infty}=$$

$$X_2(f)=\frac{1}{(j2\pi f+1)^2}$$

A jelek sávszélessége, ha $\varepsilon=0.01$

$$B=\underset{f}{argmax}\left\{\min_f|X(f)-\varepsilon\max_f|X(f)||\right\}-\underset{f}{argmin}\left\{\min_f|X(f)-\varepsilon\max_f|X(f)||\right\}$$

$$\max_f|X_1(f)|=\max_f\left|\frac{1}{j2\pi f+1}\right|=\max_f\sqrt{\frac{1}{1+4\pi^2f^2}}=1,\ \text{ ha } f=0$$

$$\max_f|X_2(f)|=\max_f\left|\frac{1}{(j2\pi f+1)^2}\right|=\max_f\sqrt{\frac{1}{(1+4\pi^2f^2)^2}}=1,\ \text{ ha } f=0$$

$$\varepsilon\max_f|X(f)|=0.01$$

nézzük meg, ahol metszik egymást: $\sqrt{\dfrac{1}{1+4\pi^2f^2}}-0.01=0$

$f_{X_1} \in \pm\sqrt{\dfrac{1-(0.01)^2}{(0.01)^2 \cdot 4\pi^2}} = \pm 15.91469851457871$

nézzük meg, ahol metszik egymást: $\sqrt{\dfrac{1}{(1+4\pi^2 f^2)^2}} - 0.01 = 0$

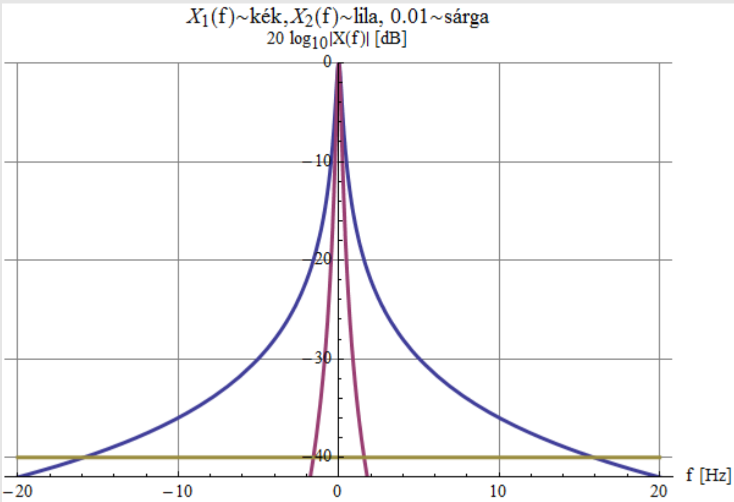
$$f_{X_2} \in \pm\sqrt{\dfrac{\pm\sqrt{\dfrac{1}{(0.01)^2}}-1}{2^2\pi^2}} = \begin{Bmatrix} -1.5835716892985487, -1.5994873825601215j, \\ +1.5994873825601215j, 1.5835716892985487 \end{Bmatrix}$$

$f_{X_2} \in \{\pm 1.5835716892985487\}$

Így a két jel sávszélessége:

$B_{X_1} = 15.91469851457871 - (-15.91469851457871) \cong 32Hz$

$B_{X_2} = 1.5835716892985487 - (-1.5835716892985487) \cong 3.167Hz$



Mivel a jel valós, ezért a spektruma szimmetrikus, így a spektrumban a „0 bal oldalán" ugyan az az „információ" található mint a „0 jobb oldalán".

Ezért ezeknek a jeleknek elég csak a „fele sávszélesség" hisz a 0 tengelyre tükrözve visszakapjuk az eredetit.

Így a két jel sávszélessége: $B_{X_1} \cong 16Hz, B_{X_2} \cong 1.5835Hz$

ezért az 1. jel sávszélessége a nagyobb

Ha valós jelekről beszélünk, akkor a mintavételi tétel miatt $fs \geq 2B$, ha komplex jelekről, aminek a spektruma nem szimmetrikus (a spektrum jobb és bal oldala nem azonos), akkor $f_s \geq B$ azonban itt a B sávszélesség a valóshoz képest 2x-es

Ezért a minimális mintavételi frekvencia a megadott küszöb miatt $f_s \geq 32Hz$

1.4) Mit mond ki a mintavételi és visszaállítási tétel?

Megoldás

Ha egy sávkorlátozott (B sávszélességű) $x(t)$ jelet $f_s \geq 2B$ frekvenciával mintavételezünk, akkor a jel tökéletesen (veszteségmentesen) rekonstruálható a mintáiból:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT), \text{ ahol}$$

$$h(t) = 2B\frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$$

1.5) Egy analóg jel sávszélessége 52 kHz, adja meg a mintavételi frekvencia alsó határát! Milyen szempontok indokolják, hogy a jelet az elvileg lehetséges legkisebb mintavételi frekvencia felett mintavételezzük (legalább két szempontot ismertessen)?

Megoldás

Az $f_s \geq 2B$ mintavételi tétel értelmében $f_s = 104\text{kHz}$ a mintavételi frekvencia alsó határa. A túlmintavételezésnek két oka lehet:

- Ha az alsó mintavételi frekvenciát használjuk, akkor a jelvisszaállításához szükséges egy ideális aluláteresztő szűrő, amely a gyakorlatban nem valósítható meg. A túlmintavételezés esetén véges meredekségű lehet a szűrő, amely már megvalósítható.
- A tömöríthetőség miatt előnyös lehet a túlmintavételezés, mivel nagyobb mintaszámú, korreláltabb mintahalmaz esetén jobb hatásfokú tömörítés érhető el.

1.6) Adja meg a kvantálási SNR jel-zaj viszonyt véletlen (egyenletes eloszlású) jel és n bites egyenletes kvantálás esetén.

Megoldás

Előadáson elhangzott. Végeredmény: SNR=6n

Hasonlóan az előző példához, csak a jel teljesítményét máshogy kell kiszámolni, mert itt egyenletes eloszlású véletlen folyamatnak tételeztük fel.

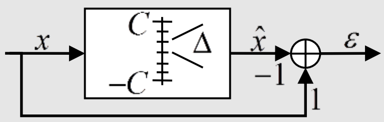
Ezért a jel teljesítménye $Pow_{signal} = \frac{4C^2}{12}$

1.7) Adja meg a kvantálási SNR jel-zaj viszonyt teljesen kivezérelt szinuszos jel és *n* bites egyenletes kvantálás esetén.

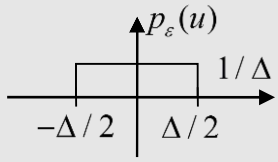
Végeredmény: SNR=6*n*+1.8

definíciók amiket felhasználunk:

- n: kvantáló bitszáma
- N: hány darab kvantálási szimbólumot definiálunk
- C: a kvantáló dinamikatartományának maximum amplitúdó értéke
- Δ: egyenletes kvantálás esetén a kvantálási szimbólumokhoz tartozó amplitúdó értékek közti távolság



- $N = \frac{2C}{\Delta} = 2^n$
- $\varepsilon = x - \hat{x}$, a kvantálási hiba
- feltételezzük, hogy a kvantálási zaj eloszlása egyenletes, azaz



$$p_\varepsilon(u) = \begin{cases} 1/\Delta, |u| < \Delta/2 \\ 0 \end{cases}$$

- $SNR = \frac{Pow_{signal}}{Pow_{noise}}, SNR_{dB} = 10\log_{10}(SNR)$
- $V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} (V(t))^2 dt}$
- $Pow_{electrical} = \frac{(V_{RMS})^2}{R}$, ahol R az az ellenállás amire a V_{RMS} átlagfeszültség van kapcsolva, egységnyinek tekintjük, mert később úgyis eltűnne az SNR aránynál.

- $$\mu_X = \int x \cdot p_X(x)dx$$ $$\sigma_X^2 = \int (x-\mu_X)^2 p_X(x)dx$$, a zaj teljesítményét ha 0 várható értékű a

  szórásnégyzettel lehet leírni.

Megoldás:

A jel szinuszos, teljes kivezérlésű, ezért $V(t) = C\sin(2\pi t)$

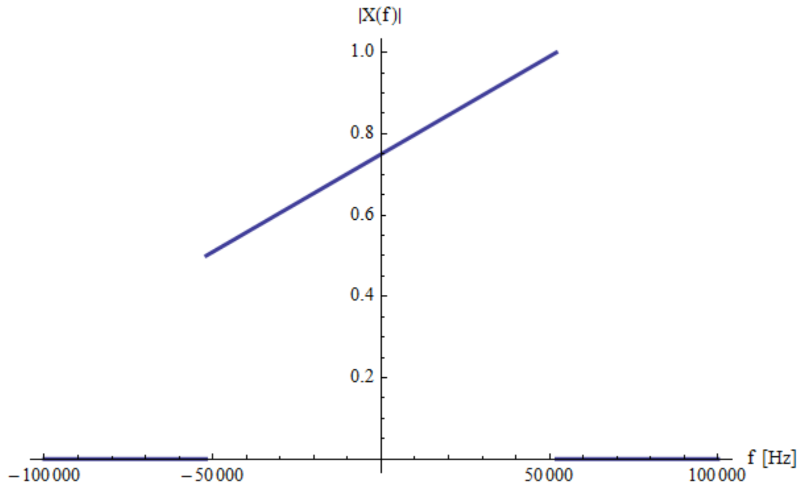
A jel teljesítménye: $Pow_{signal} = \sqrt{\frac{1}{T_2-T_1}\int_{T_1}^{T_2}(V(t))^2 dt}^{\,2} = \sqrt{\frac{1}{1-0}\int_0^1 (C\sin(2\pi t))^2 dt}^{\,2} = \frac{C^2}{2}$

A zaj teljesítménye: $Pow_{noise} = \sigma_\varepsilon^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} u^2 \cdot \frac{1}{\Delta} du = \frac{\Delta^2}{12}$

A jel-zaj viszony:

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{C^2/2}{\Delta^2/12}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{3}{2}N^2\right) = 10\log_{10}\left(\frac{3}{2}2^{2n}\right) =$$
$$= 10\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right) + 2n10\log_{10}(2) = 1.760912591 + 6.020599913n$$

1.8) Egy analóg jel amplitúdó spektruma a következő ábrán látható:



a. Adja meg a jel sávszélességét
b. Adja meg a mintavételi frekvencia alsó határát, ahol a jel még egyértelműen visszaállítható.
c. Milyen szempontok indokolják, hogy a jelet az elvileg lehetséges legkisebb mintavételi frekvencia felett mintavételezzük?
   Legalább két szempontot ismertessen!

Megoldás

a) A jel sávszélessége $B = +52kHz - (-52kHz) = 104kHz$

b) Mivel a jel spektruma nem szimmetrikus, ezért a jel időben komplex lesz.
A mintavételi tétel értelmében: $f_s \geq B$ (komplex jelek esetén), így
$f_s \geq 104kHz$

c) Az egyik szempont, hogy a visszaállításnál nem tudunk ideális alul áteresztő szűrőt használni, aminek a levágási meredeksége végtelen, csak fizikailag megvalósítható végtelennél kisebb meredekségű szűrőt tudunk használni, így a levágási meredekség miatti többlet sávszélességet is figyelembe kell vennünk.
A másik szempont lehet, hogy a túl mintavételezéssel növelhetjük az egyes minták közti korrelációt. Ezt a tulajdonságát a sorozatunknak később tömörítésre használhatunk fel.

1.9) Adja meg a kvantálási SNR-t (jel-zaj viszonyt) véletlen egyenletes eloszlású jelre ami teljesen kivezérel egy n bites egyenletes lépésközű kvantálót!

Megoldás

Az előző példa alapján: $SNR_{dB} = 6n$

mert

$$Pow_{signal} = \sigma_\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x)\,dx = \int_{-C}^{C} x^2 \frac{1}{2C}\,dx = \left[\frac{x^3}{6C}\right]_{-C}^{C} = \frac{C^3}{6C} - \frac{-C^3}{6C} = \frac{4}{12}C^2$$

$$Pow_{noise} = \sigma_\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\varepsilon(x)\,dx = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} u^2 \cdot \frac{1}{\Delta}\,du = \frac{\Delta^2}{12}$$

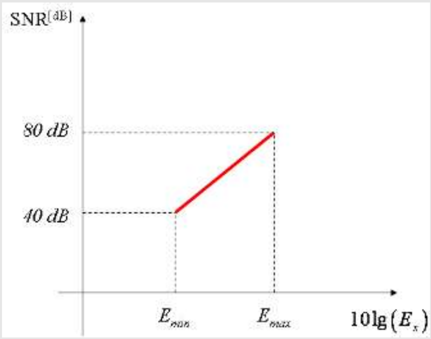
$$SNR = \frac{\frac{4}{12}C^2}{\frac{1}{12}\Delta^2} = 4\frac{C^2}{\Delta^2} = 4\frac{C^2}{(2C/N)^2} = 4\frac{C^2}{(4C^2)/N^2} = N^2$$

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}\left(N^2\right) = 10\log_{10}\left(2^{2n}\right) = n \cdot 20\log_{10}(2) =$$
$$SNR_{dB} = 6.020599913 \cdot n \cong 6 \cdot n \ [\mathrm{dB}]$$

1.10) Hány bites lineáris kvantáló kell ahhoz, hogy legalább 40 dB-es jel-zaj viszonyt kapjunk 40 dB-es dinamikatartomány felett?

Megoldás

A 40dB-es bemeneti dinamikatartomány azt jelenti, hogy a bemeneti jel legkisebb és legnagyobb teljesítményű (ill. energiájú) része között 40dB a különbség, azaz $E_{max}/E_{min} = 10^4$. Ha a legkisebb jelszintnél is 40dB-es jel-zaj viszonyt kell biztosítanunk, akkor a legnagyobb jelszintnél 80dB a jel-zaj viszony:



Tehát SNR_{max} = 80dB, amiből $n = \lceil 80/6 \rceil = 14$ (bit).

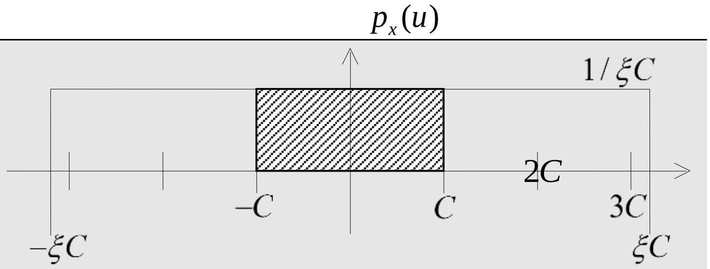
Megjegyzés:

Ha olyan jelet adunk a bemenetre, amely a legjobban kihasználja a kvantáló dinamikatartományát, azaz a legnagyobb jel-zaj viszonyt biztosítja, illesztett kvantálónak nevezzük ($x_{max} = C$, ld. korábbi feladatokat is). Ekkor a jelteljesítmény és a kvantálási zaj közötti összefügg általános bemeneti jelnél: $s_\varepsilon^2 = \lambda^2 \cdot s_x^2 \cdot 2^{-2n}$, ahol λ a bemenő jel eloszlásától függő konstans. Egyenletes eloszlásnál: $s_\varepsilon^2 = \frac{q^2}{12} = C^2 \cdot \frac{2^{-2n}}{3}$, ahol $C^2 = x_{max}^2 = 3s_x^2 \Rightarrow$ $s_\varepsilon^2 = s_x^2 \cdot 2^{-2n} \Rightarrow \lambda = 1$.

1.11) Mekkora lesz egy n=8 bites szimmetrikus, egyenletes kvantáló jel-zaj viszonya (SNR) 10dB-es túlvezérlés esetén? (A bemenő jelet egyenletes eloszlásúnak tekintve.)

Megoldás

Tudjuk, hogy $10\log_{10}\dfrac{s_x^2}{s_{x\max}^2}=10\text{dB}$,



ahol $s_{x\max}^2$ az illesztett kvantálóhoz tartozó jelteljesítmény rész, és s_x^2 a jel valódi teljesítménye. Mivel a jel amplitúdóját nem tudjuk, csak a teljes kivezérlés nagyságát (2C), ezért először ezt kell kiszámolnunk. Ehhez szükségünk van a jel teljesítményére. Ezt az ismert amplitúdó nagyságával tudjuk kifejezni, ha tudjuk a teljes kivezérlés teljesítményét: $s_{x,\max}^2=\dfrac{4C^2}{12}$, $s_x^2=10\cdot s_{x\max}^2=10\dfrac{4C^2}{12}$, ahol C a kvantáló dinamika tartománya.

A jel maximális amplitúdója tehát ξC, ahol $s_x^2=\sigma_x^2=\int\limits_{-\xi C}^{\xi C}u^2\cdot\dfrac{1}{2\xi C}du=10\dfrac{4C^2}{12}$, így

$\xi=\sqrt{10}\approx 3.162277$, $x_{\max}=\sqrt{10}C$

A zaj teljesítményt külön kell számolni, abban az esetben, amikor nincs túlvezérlés és abban, amikor van, majd az alábbiak szerint vegyük a két eredmény átlagát:

$s_\varepsilon^2=P_{\text{norm}}\cdot s_{\varepsilon\,\text{norm}}^2+(1-P_{\text{norm}})\cdot s_{\varepsilon\,\text{tulvez}}^2$, ahol $s_{\varepsilon\,\text{tulvez}}^2$ a túlvezérléskor kapott kvantálási zaj szórása, $s_{\varepsilon\,\text{norm}}^2$ a normál működésnél mért zaj szórása, P_{norm} a normál működés valószínűsége.

- P_{norm} = ?

Mivel egyenletes eloszlást tételeztünk föl, ezért

$$P_{\text{norm}}=\int\limits_{-C}^{C}\mathrm{p}_x(u)du=\int\limits_{-C}^{C}\frac{1}{2x_{\max}}du=\frac{C}{x_{\max}},$$

amiből visszahelyettesítve kapjuk a valószínűséget

$$P_{\text{norm}}=\frac{C}{x_{\max}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

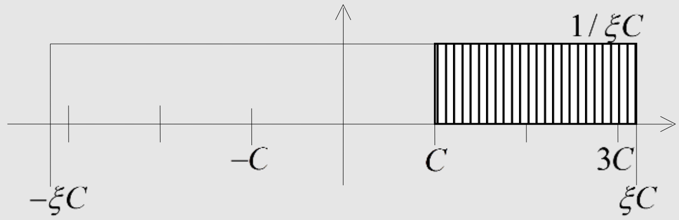
- $s_{\varepsilon\,\text{norm}}^2$ = ?

A normál működésre már ismert az összefüggés (ld. 2.2 feladat):

$$s_{x\,\text{norm}}^2=\frac{\Delta^2}{12}=\mathrm{C}^2\cdot\frac{2^{-2n}}{3}=\frac{C^2}{3\cdot 2^{16}}.$$

- $s_{\varepsilon\,\text{tulvez}}^2$ = ?

A túlvezérelt működési tartományban a kvantálási zaj szórása az alábbiak szerint számítható:



$$
\begin{aligned}
s^2_{\varepsilon\,\text{tulvez}} &= \int (X(u)-\mu_X)^2\, p_X(u)du = \\
&= 2\int_C^{x_{\max}} (u-C)^2 \frac{1}{2(x_{\max}-C)}du = \\
&= \int_C^{\sqrt{10}C} \frac{u^2-2uC+C^2}{C\left(\sqrt{10}-1\right)}du = \\
&= \frac{1}{C\left(\sqrt{10}-1\right)}\left[\frac{u^3}{3}-u^2C+uC^2\right]_C^{\sqrt{10}C} \\
&= C^2\frac{13\sqrt{10}-31}{3\sqrt{10}-3} \approx C^2\cdot 1{,}559
\end{aligned}
$$

A fentiek részeredmények alapján, mivel $s^2_{\varepsilon\,\text{norm}} << s^2_{\varepsilon\,\text{tulvez}}$, ezért élhetünk a következő közelítéssel:

$$
s^2_{\varepsilon} \approx (1-P_{\text{norm}})\cdot s^2_{\varepsilon\,\text{tulvez}} = \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}}\cdot s^2_{\varepsilon\,\text{tulvez}} = C^2\left(\frac{13\sqrt{10}-31}{3\sqrt{10}}\right),
$$

amiből a keresett kvantálási jel-zaj viszony a következő:

$$
SNR = \frac{10\dfrac{C^2}{3}}{s^2_{\varepsilon}} = \frac{10\sqrt{10}}{13\sqrt{10}-31} \approx 3{,}128 \text{ (4,95dB)}
$$

Látható, hogy a túlvezérlés megjelenésével meredeken csökken a jel-zaj viszony. (Megjegyzés: házi feladatként ennek vizualizációjára készíthető egy script plusz jegyért.)

1.12) Egy hálózat átviteli karakterisztikája a következő alakban ismert:

$$
H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega\cdot 1{,}59\cdot 10^{-4}}.
$$

Adja meg a rendszer sávszélességét $\varepsilon = 0.1$ paraméter érték mellett! Mennyivel nő/csökken a sávszélesség $\varepsilon = 0.01$ esetén? Milyen jellegű szűrőt valósít meg a rendszer?

Megoldás

A $\left|H(\omega)\right| = \sqrt{\dfrac{1}{1+\left(\omega\cdot 1{,}59\cdot 10^{-4}\right)^2}}$ amplitúdó spektrumból az alábbi egyenlet:

$$\sqrt{\frac{1}{1+\left(\omega\cdot 1,59\cdot 10^{-4}\right)^2}}=\varepsilon$$

megoldása esetén közvetlenül a sávszélességet adja eredményül. Az $\varepsilon=0.1$ paraméter esetén $B_{\varepsilon=0.1}\cong 100kHz$ sávszélesség, az $\varepsilon=0.01$ paraméter esetén $B_{\varepsilon=0.01}\cong 1MHz$ adódik, vagyis 10-szeresére növekszik.

1.13) Az $x(t)=\sin(2\pi 50t)$ jelet legalább hány bites egyenletes teljes kivezérlésű kvantálóval kell kvantálni, hogy $\mathrm{SQNR}\geq 40\ \mathrm{dB}$ jel/zaj viszonyt biztosítson?

a. Mennyivel kellene növelni a bitek számát ugyanezen feltétel teljesítéséhez, ha a kvantáló tízszer nagyobb amplitúdójú jel esetében lenne teljesen kivezérelve?

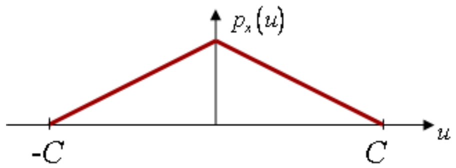
b. Mekkora mindkét esetben a Δ kvantálási lépésköz?

c. Ha erre a kvantálóra egy véletlen jelet vezetünk (teljes kivezérléssel, azaz *C*=1) az ábrán felrajzolt sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora lesz az SQNR?

d. Mekkora a kvantálási jel-zaj viszony, ha *n*=5 bites kvantálót normál tartományban használunk? (A kvantálót a *C* amplitúdóhoz illesztjük.)

e. Mi történik túlvezérlés esetén, és hogyan jelentkezik ez a kvantálási jel-zaj viszonyban?

f. Ismertesse (matematikai formulák nélkül), hogy milyen megfontolások vezetnek a logaritmikus kvantáláshoz!



1.14) Hány bites kvantálóra van szükség (egyenletes lépésközű kvantálás és teljesen kivezérelt szinuszos jel esetén), ha az elérni kívánt jel-zaj viszony 50 dB?

1.15) Rajzolja le az egyenletes lépésközű kvantálás esetén a kerekítési hiba (zaj) sűrűségfüggvényét, ha kvantálási lépésköz 0.01 V!

1.16) Az $x(t) = 5\sin(2\pi 50t) + \sin(2\pi 50t + \pi)$ jelet legalább hány bites egyenletes teljes kivezérlésű kvantálóval kell kvantálni, hogy $\mathrm{SNR} \geq 40\,\mathrm{dB}$ jel/zaj viszonyt biztosítson? Mennyivel kellene növelni a bitek számát ugyanezen feltétel teljesítéséhez, ha a kvantáló tízszer nagyobb amplitúdójú jel esetében lenne teljesen kivezérelve? Mekkora mindkét esetben a Δ kvantálási lépésköz?

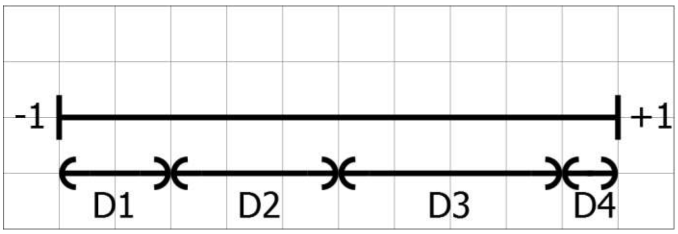
1.17) Legalább mekkora mintavételezési frekvenciát és legalább hány bites egyenletes kvantálást kell alkalmazni az $x(t) = 5\cos\left(2\pi \cdot 100 \cdot t^{[s]}\right)$ jel digitalizálásakor, ha elszeretnék kerülni az átlapolódás jelenségét és legalább $60dB$-es kvantálási jel-zajviszonyt szeretnénk elérni? Adja meg a jel-zaj viszonyt azonos amplitúdójú és periódusidejű háromszög jel esetére!

1.18) Egy lineáris, invariáns rendszer impulzusválasza

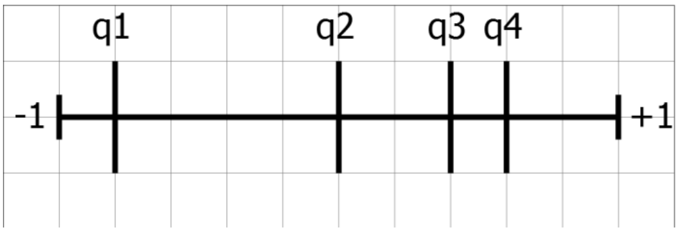
$$w(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & \text{ha } 0 \leq t \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $\alpha = 100 s^{-1}$. Határozza meg a rendszer átviteli karakterisztikájának $\varepsilon = 0.1$ illetve $\varepsilon = 0.01$ paraméterekhez tartozó, Hz-ben mért sávszélességét! Milyen jellegű szűrőt valósít meg a rendszer?

1.19) Adott egy 2 bites kvantáló $[-1,+1]$ tartományon. Rajzolja be az optimális kvantáláshoz tartozó kvantálási szimbólumokat $\left(Q_{opt} : \min_{Q} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Delta_i} (x - q_i)^2 p(x)dx \right)$, ha adottak a tartományok $\Delta_i \in \Delta$, $\Delta = \{[-1,-0.6],[-0.6,0],[0,0.8],[0.8,1]\}$!



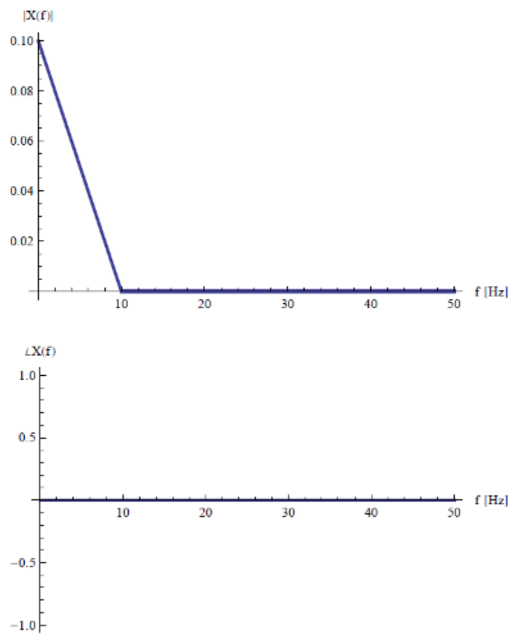
1.20) Adott egy 2 bites egyenletes kvantáló $[-1,+1]$ tartományon. Rajzolja be az optimális kvantáláshoz tartozó tartományokat $\left(\Delta_{opt} : \min_{\Delta} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Delta_i} (x-q_i)^2 \, p(x) \, dx\right)$, ha adottak a kvantálási szimbólumok $q_i \in Q, \quad Q = \{-0.8, 0, 0.4, 0.6\}$!



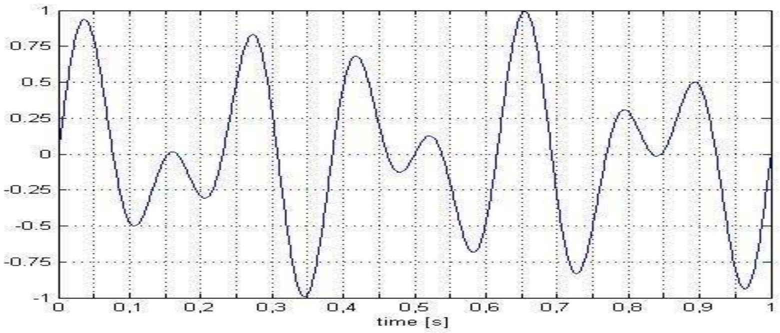
1.21) Adott egy jel valós értékű jel $x(t) = \frac{\sin(10\pi t)^2}{100\pi^2 t^2}, x(t) \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$, aminek a spektruma: $X(f) \in \mathbb{C}$ ismert az ábrán látható módon.

Rajzold le az $x(n)$ mintavett jel spektrumát $X_s(f)$-et, ha a mintavételi frekvencia:

- $f_s = 10Hz$
- $f_s = 20Hz$
- $f_s = 30Hz$



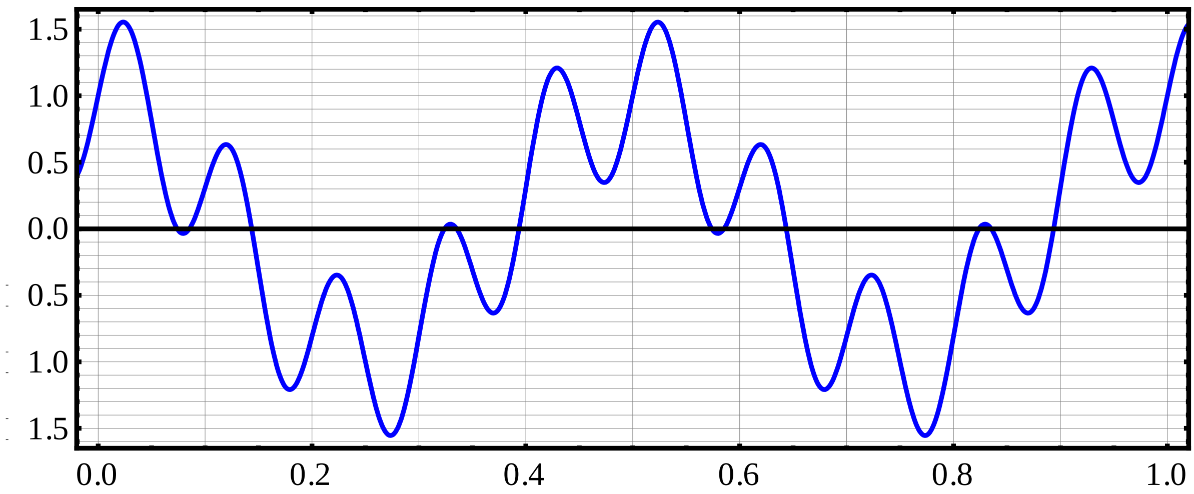
1.22) Mintavételezze és kvantálja az alábbi $x(t)=\frac{1}{2}\sin(2\pi 5t)+\frac{1}{2}\sin(2\pi 8t)$ jelet, ha a mintavételi frekvencia $f_s=20Hz$, egyenletes n=3 bites kvantáló, valamint a jel teljesen kivezérelt! Rajzolja be az alábbi grafikonba a mintavételezett és kvantált jelet!



a) Adja meg az $x(n)$ mintavett és $\hat{x}(n)$ kvantált jelet n=0,…,5 esetén! *(10 pont)*

b) Rajzolja fel az $x(n)$ mintavett jel spektrumát a $[-40\text{Hz}, 40\text{Hz}]$ frekvenciatartományon!

1.23) Mintavételezze és kvantálja az ábrán látható $x(t)=0.6\sin(2\pi 10t)+\cos(2\pi 2t)$ jelet, ha a mintavételi frekvencia $f_s=10Hz$, egyenletes n=3 bites kvantáló, valamint a kvantálót a $[-1.6, 1.6]$ tartományra tervezték!



a) Adja meg az $x(n)$ mintavett és $\hat{x}(n)$ kvantált jelet $n=0\ldots4$ esetén sorozat alakban valamint adja meg a kvantálási szimbólumokat!

b) Rajzolja fel az $x(t)$ eredeti jel és az $x(n)$ mintavett jel (végtelen hosszú sorozat) amplitúdó spektrumát $\left(|X(f)| \text{ és } |X_s(f)|\text{-et}\right)$ a $[-40\text{Hz}, 40\text{Hz}]$ frekvenciatartományon!

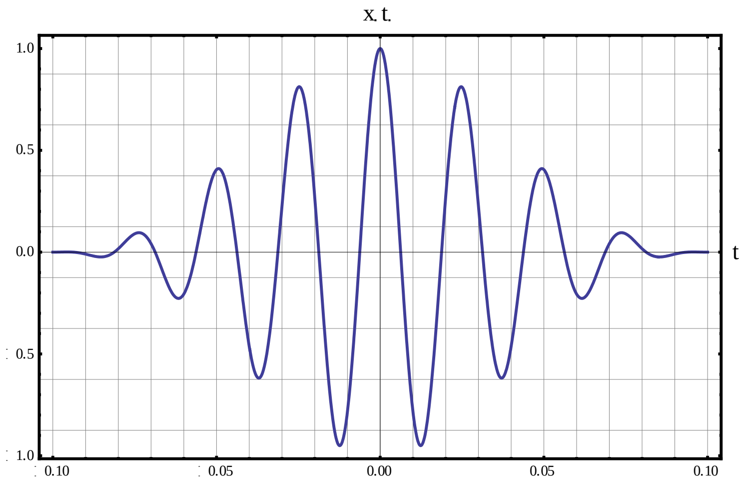
c) Adott ugyan ezen az amplitúdó tartományon egy 2 bites kvantálóhoz tartozó kvantálási határokat tartalmazó halmaz:

$\Delta_i \in \Delta, \quad \Delta = \{[-1.6, 0], [0, 0.1], [0.1, 0.8], [0.8, 1.6]\}$

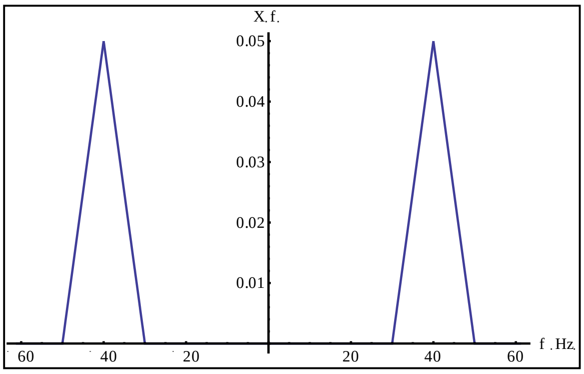
Adja meg a Lloyd-Max algoritmus következő iterációjaként előálló kvantálási szimbólumokat!

1.24) Adott a következő folytonos időtartománybeli jel és annak spektruma:

$$x(t) = \frac{\sin^2(10\pi t)\cos(80\pi t)}{100\pi^2 t^2}$$



$$X(f) = \begin{cases} \dfrac{50+f}{200} & -50 \le f < -40 \\ \dfrac{-30-f}{200} & -40 \le f < -30 \\ \dfrac{-30+f}{200} & 30 \le f < 40 \\ \dfrac{50-f}{200} & 40 \le f < 50 \end{cases}$$



a) Rajzolja le az $x_1[n] = x(n \cdot T_1)$ és az $x_2[n] = x(n \cdot T_2)$ mintavett jelek spektrumát, ha $f_{s,1} = 40Hz$ és ha $f_{s,2} = 120Hz$!

b) Rajzolja le a fenti ábrába a jelet kvantálás és mintavételezés után, ha $f_s = 1/0.01\,Hz$ és a kvantáló 3 bites egyenletes lépésközű, ami a $[+1, -1]$

tartományra van tervezve. Jelölje a mintavett jel értékeit ○-el, a kvantált jel értékeit $\times$-el! *(5p)*

c) Hány bites kvantálót kellene alkalmaznunk, hogy a kvantálási jel-zaj viszony legalább 100 dB legyen, ha feltételezzük, hogy a kvantálási zaj egyenletes eloszlású és a jel tisztán szinuszos jellegű és teljesen kivezérli a kvantáló?