Megoldott feladatok

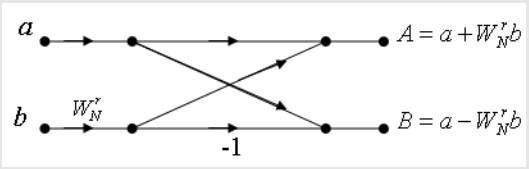
5.1) Adja meg egy 2 pontos DFT kiszámításához szükséges $\mathbf{W}_2$ mátrixot! Rajzolja fel az FFT algoritmus „lepke” számításának ábráját!

Megoldás

A 2 pontos DFT kiszámításához szükséges mátrix a következő:

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} e^{j0} & e^{j0} \\ e^{j0} & e^{j\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ez alapján az FFT „lepke” ábrája az alábbi ábrán látható:



5.2) Adja meg az $x(n) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ diszkrét jelsorozat *N*=4 pontos DFT-jét!

Megoldás

A 4 pontos DFT a következő mátrix-vektor szorzásból kapható meg:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_4 \mathbf{x} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5j \\ 1 \\ 0.5j \end{bmatrix}.$$

5.3) Az $x(t) = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t)$ analóg jelet $T_s = 0.025\text{sec}$ mintavételi idővel mintavételezzük. Adja meg az $x(n)$ mintavételezett jelet $n = 0,1,2,3$ esetén! Adja meg: (i) az analóg jel $|X(\omega)|$ amplitúdó karakterisztikáját; (ii) a mintavételezett jel $|X_n(\omega)|$ amplitúdó karakterisztikáját; (iii) valamint az $x(n)$ 4 mintájából számított *N*=4 pontos DFT spektrumot!

Megoldás

A $T_s = 0.025\text{sec}$ mintavételi idő alapján a $f_s = 40\text{Hz}$ mintavételi frekvencia nagyobb, mint a jel sávszélességének ($B = 10\text{Hz}$) kétszerese, vagyis a mintavételi tételt ezzel a mintavételi gyakorisággal betartjuk. A mintavett jel a következőképpen kapható meg:

$x(nT_s) = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot n \cdot 0.025)$,

ahol $n=0,1,2,3$ behelyettesítés után esetén a mintavett jel az $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}^T$ vektoros alakban adható meg.

Az egyes jelek spektrumképei a következők:

(i) $\left|X(\omega)\right|=\frac{1}{2}\left[\delta(\omega-2\cdot\pi\cdot 10)+\delta(\omega+2\cdot\pi\cdot 10)\right]$ (az $x(t)=\cos(2\pi\cdot 10\cdot t)$ analóg jel Fourier transzformáltja)

(ii) $\left|X_n(\omega)\right|=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left|X\left(\omega-\frac{2\cdot\pi}{T_s}i\right)\right|$ (az analóg jel spektrumának periodikus kiterjesztettje, $f_s=40\text{Hz}$ esetén)

A *N*=4 pontos DFT a következő mátrix-vektor szorzásból kapható meg:

$w_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, $W_N(i,j)=w_N^{i\cdot j}$, $i,j=0\ldots N-1$

$w_4=e^{-j\frac{2\pi}{4}}$,

$i\cdot j$	0	1	2	3
	4	5	6	7
	8	9	10	11
$W_N(i,j)$	1	$-j$	-1	j

$A_{i,j}=i\cdot j$ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&2&4&6\\0&3&6&9\end{bmatrix}$, $\mathbf{W}_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{X}=\mathbf{W}_4\mathbf{x}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\0\\2\end{bmatrix}$.

5.4) Az $x(n)=[-5\ \ x(1)\ \ 3\ \ x(3)]$ jel 4 pontos DFT-je $X(k)=[3\ \ -8+9j\ \ X(2)\ \ X(3)]$. Határozza meg az ismeretlen értékeket!

Megoldás

A DFT $\mathbf{X}=\mathbf{W}_4\mathbf{x}$ vektoros alakja alapján felírható egyenletrendszerből:

$$\begin{bmatrix}3\\-8+9j\\X(2)\\X(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\x(1)\\3\\x(3)\end{bmatrix},$$

amiből $x(1)=-2,\quad x(3)=7,\quad X(2)=-7,\quad X(3)=-8-9i$.

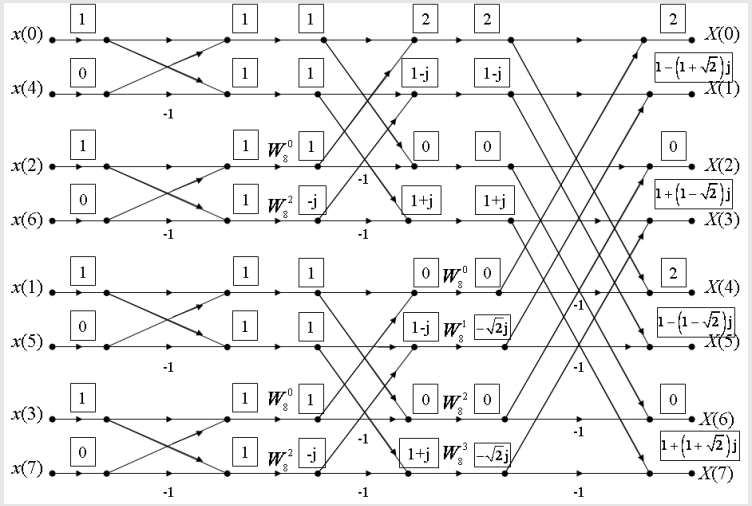
5.5) Határozza meg az $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ jel 4 pontos DTF-jét mátrix-vektor szorzással, másrészt a 8 pontos DFT-jét FFT segítségével! Rajzolja fel a számítás lepke ábráját! Magyarázza a tapasztaltakat!

Megoldás

A 4 pontos DFT a következő mátrix-vektor szorzásból kapható meg:

$$\mathbf{X}=\mathbf{W}_4\mathbf{x}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & j & -1 & -j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -j & -1 & j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

A 8 pontos DFT számítása FFT algoritmussal az alábbi ábrán követhető nyomon:



5.6) Adja meg az $x(n)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ diszkrét jelsorozat 3 pontos DFT-jét!

Megoldás

A 3 pontos DFT a következő mátrix-vektor szorzásból kapható meg:

$$\mathbf{X}=\mathbf{W}_4\mathbf{x}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}j\\ \frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}j\end{bmatrix}.$$

5.7) Adott az $x(n) = \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{[\,1}\;\; 1\;\; 1\;\; 1\,]$ diszkrét jelsorozat.

a) Diszkrét idejű Fourier transzformáció (DTFT) segítségével adja meg a jelsorozat $X(\omega)$ spektrumát (zárt alakban), és az $X\left(\omega = \frac{2\pi}{N}k\right) \equiv X(k)$ mintavett spektrumot, ahol $k = 0,1,2,3$ (tehát N=4)! Ábrázolja közös diagramban az $|X(\omega)|$ amplitúdó spektrumot és annak mintavett értékeit!

b) Számítsa ki diszkrét Fourier transzformációval (DFT) az $x(n)$ diszkrét jelsorozat $X(k)$ mintavett spektrumát! Ellenőrizze, hogy megegyezik-e az a) pontban számított mintavett spektrummal!

c) Rajzolja fel a négypontos FFT kiszámításához szükséges „lepke” ábrát! Adja meg a köztes értékeket a csomópontokban! Ellenőrizze, hogy az eredmény megegyezik-e az a) és b) pontban számított mintavett spektrummal! Számolja össze, a szorzási és összeadási nyereségünket!

Megoldás:

a) $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{3} x(n)\cdot e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j\omega 2} + e^{-j\omega 3}$

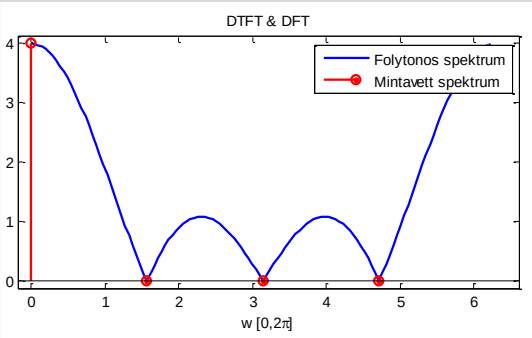
$X\left(\omega = \frac{2\pi}{N}k\right) \equiv X(k) = 1 + e^{-j\pi k/2} + e^{-j\pi k} + e^{-j3\pi k/2}$, és ez alapján $k = 0,1,2,3$-ra:

$X(0) = 1 + e^{-j\pi 0/2} + e^{-j\pi 0} + e^{-j3\pi 0/2} = 1+1+1+1 = 4$

$X(1) = 1 + e^{-j\pi 1/2} + e^{-j\pi 1} + e^{-j3\pi 1/2} = 1 - j - 1 + j = 0$

$X(2) = 1 + e^{-j\pi 2/2} + e^{-j\pi 2} + e^{-j3\pi 2/2} = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

$X(3) = 1 + e^{-j\pi 3/2} + e^{-j\pi 3} + e^{-j3\pi 3/2} = 1 + j - 1 - j = 0$

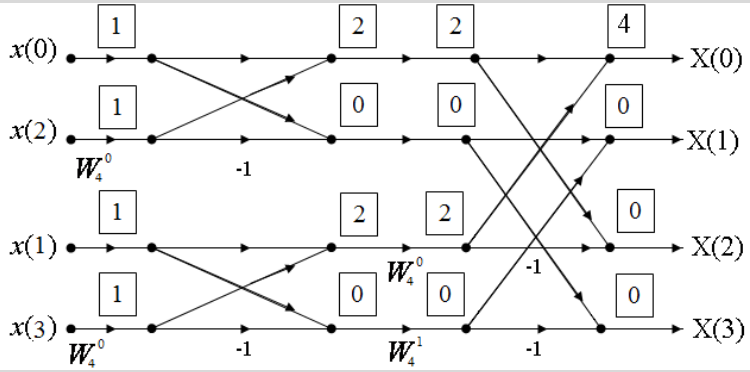


b) Ehhez ki kell számolni N=4-hez tartozó W transzformációs mátrixot, ahol a komplex egység: $W_4 = e^{-j2\pi/N} = e^{-j\pi/2}$

$$\overline{\overline{W}} = \begin{bmatrix} W_4^{0\cdot0} & W_4^{0\cdot1} & W_4^{0\cdot2} & W_4^{0\cdot3} \\ W_4^{1\cdot0} & W_4^{1\cdot1} & W_4^{1\cdot2} & W_4^{1\cdot3} \\ W_4^{2\cdot0} & W_4^{2\cdot1} & W_4^{2\cdot2} & W_4^{2\cdot3} \\ W_4^{3\cdot0} & W_4^{3\cdot1} & W_4^{3\cdot2} & W_4^{3\cdot3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$, vagyis

$$\overline{X} = \overline{\overline{W}} \cdot \overline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, és ez megegyezik az a)-ban számolt értékekkel.

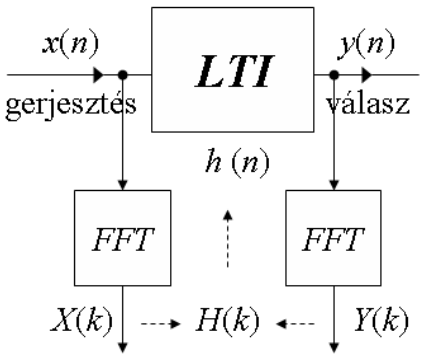
c) Egy 4 pontos DFT-t 2 db 2 pontos és 1 db 4 pontos lepkével tudunk kiszámolni az alábbi módon:



Ez megegyezik az a)-ban és a b)-ben számolt értékekkel.

	DFT	**FFT**	→	**Nyereség**
Összeadás	4*3=12	2*2+1*4=8	→	4 (30%)
Szorzás	4*4=16	2*1+1*2=4 (a negálást nem tekintettem szorzásnak)	→	12 (75%)

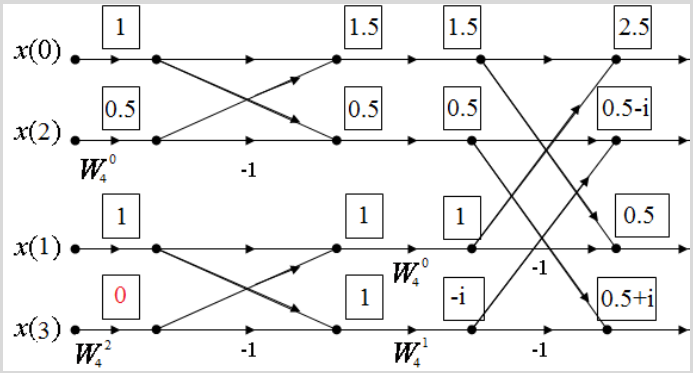
5.8) Egy lineáris időinvariáns, kauzális szűrő bemenetén az $x(n) = [\underset{\uparrow}{1}_{n=0} \quad 1 \quad 0.5]$ sorozat és a kimeneten $y(n) = [\underset{\uparrow}{1}_{n=0} \quad 0 \quad 1 \quad 2]$ sorozat figyelhető meg.



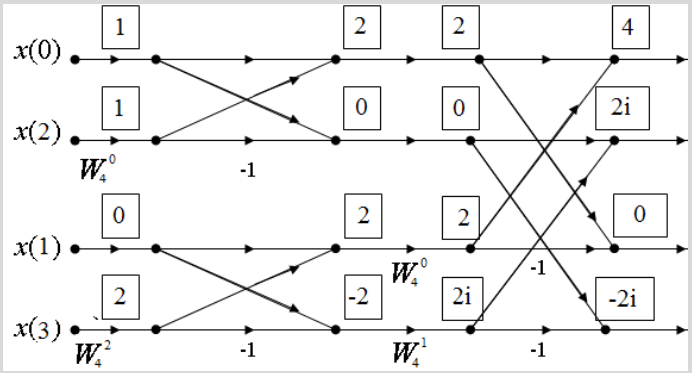
a) A bemeneti és a kimeneti sorozat N=4 pontos FFT-je alapján adja meg a szűrő átviteli függvényének $H(k)$ DFT-jét, és az alapján IDFT-vel a $h(n)$ impulzusválaszt!

b) Ellenőrizze az eredményt diszkrét konvolúcióval!

Megoldás: Az *x(n)* vektorból a bináris tükrözés után [1 0.5 1 0] lesz. (Kiegészítjük egy 0-val ahhoz, hogy négy hosszú legyen.



Ugyanígy az *y(n)*-el.



A H(k) meghatározásához az Y(k)/X(k) osztást kell elvégezni. A fentiek alapján:

H(k) = [1.6 -1.6+0.8i 0 -1.6-0.8i]

Ezt iDFT-zve az alábbi művelet végrehajtása szükséges:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_4\mathbf{x} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1.6 \\ -1.6+0.8i \\ 0 \\ -1.6-0.8i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 1.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Tehát ezzel megkapjuk a h(n) függvényt.

A konvolúcióhoz az *x(n)* és *h(n)* konvolúcióját számoljuk ki és ellenőrizzük, hogy megkapjuk-e az *y(n)*-et.

A konvolúció eredménye: [-0.4 -0.4 1 2 1.4 0.4]

Ez nem az *y(n)*. Miért? Mert h valójában végtelen tartójú, de lecseng, így 15-16 pontos DFT-je már pontos eredményt ad…(ld. feladat7pont9.m)

Otthoni feladatok

5.9) Adja meg az *N* pontos DFT definícióját! Bizonyítsa a definíció alapján az *i*DFT létezését! Mutassa meg, hogy az *x(n)* jel DFT-jének milyen kapcsolata van az *x(t)* jel spektrumával, ha *x(n)* az *x(t)* mintavett verziója! A gyakorlatban milyen módon számítjuk egy *x(n)* jel spektrumát? Mire jó, ha ismerjük egy jel spektrumát?

5.10) Határozza meg az $x(n)=[2\ \ 1\ \ 0\ \ -1\ \ -2\ \ -1\ \ 0]$ jel 8 pontos DTF-jének $X(0)$, $X(2)$, $X(4)$, $X(6)$ értékeit radix-2 algoritmussal! Rajzolja fel a számítás lepke ábráját!

5.11) Egy diszkrét, kauzális, $h(n)=(1\ \ -1)$ impulzusválaszú szűrő bemenetén az $x(n)=\delta(n)+\delta(n-3)$ gerjesztés jelenik meg. Adja meg a szűrő válaszát diszkrét konvolúcióval, ill. DFT felhasználásával (Segítség: $h(n)\overset{DFT}{\rightarrow}H(k)$ és $x(n)\overset{DFT}{\rightarrow}X(k)$ után $Y(k)=H(k)\otimes X(k)\overset{IDFT}{\rightarrow}y(n)$)! A két számítás ugyanarra az eredményre vezet? Magyarázza a tapasztaltakat! Adja meg és a relatív frekvencia tartományon rajzolja le a szűrő $|H(\omega)|$ amplitúdó karakterisztikáját és ugyanitt a $|H(k)|$ mintavett amplitúdó karakterisztikát ! Milyen jellegű ez a szűrő?

5.12) Adja meg az $\mathbf{x}=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$ diszkrét jel 4 pontos és 6 pontos DFT-jét! Ábrázolja az eredményt közös grafikonon! Magyarázza a tapasztaltakat!

5.13) Adja meg egy 8 pontos DFT kiszámításának a komplexitását az eredeti formula szerint! Mennyire csökken ez a komplexitás a RADIX 2 algoritmus szerint?

5.14) Adja meg egy 8 pontos DFT kiszámításának a komplexitását (szorzások és összeadások száma) az eredeti formula szerint mennyire csökken ez a komplexitás a RADIX 2 algoritmus szerint?

5.15) Az $X(k)=[0.7\ \ \ 0.8-1.3j\ \ \ 1.7\ \ \ 0.8+1.3j]$ az $x(n)$ diszkrét jelsorozat diszkrét Fourier Transzformáltja. Inverz DFT segítségével adja meg a jelsorozatot!

5.16) Egy $x(t) = 2\sin(2\pi f_0 \cdot t)$ jel spektrumanalízise során f_s frekvenciájú mintavételezés és 4 bites lineáris kvantálás (teljesen kivezérelt) után egy 8 pontos FFT-vel állítjuk elő a diszkrét spektrumot.

a) **Adja meg**, és **értelmezze** az FFT kimenetét, ha $f_0 / f_s = 1/4$!

b) Rajzolja le a számítás lepke ábráját!

5.17) Egy $x(t) = \cos(2\pi f_0 \cdot t)$ jel spektrumanalízise során f_s frekvenciájú mintavételezés és 4 bites lineáris kvantálás (teljesen kivezérelt) után egy 8 pontos FFT-vel állítjuk elő a diszkrét spektrumot.

a) **Adja meg** az FFT kimenetét, ha $f_0 / f_s = 1/2$! Rajzolja le a számítás lepke ábráját!

b) **Adja meg** az FFT kimenetét, ha $f_0 / f_s = 1/4$! Rajzolja le a számítás lepke ábráját!

c) Rajzolja le közös diagramon az a) és b) feladatrészben kapott diszkrét spektrumot és az $x(t)$ eredeti jel spektrumát!