Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információs Technológia és Bionika Kar

"Fides et Ratio"

Az Információ-technika és a Bionika Fizikája I
2016 Tavasz – 05

Dr. Csurgay Árpád I.

AZ ELEKTROMÁGNESES KÖLCSÖNHATÁS

A Tér – az Idő – a Test és az Erő fogalmai

Testek, erők, tér és idő: ezek a *klasszikus fizika* alapfogalmai. A klasszikus test oszthatatlan részecskékből (‘atomai’) épül fel. Két test találkozása rugalmas ütközést eredményez, az energiák és az impulzusok összege állandó marad. A klasszikus erő fogalma nem ismer oszthatatlanságot. Alaptermészete szerint érvényes rá a szuperpozíció: két erőt pontról-pontra, időpillanatról-időpillanatra vektoriálisan adunk össze.

Elemi „testek” és alapvető „erők”

Az anyag egy részecskéjének építőkő illetve elemi jellegét az határozza meg, hogy a részecske oszthatatlannak tekintendő-e vagy sem. Ahhoz, hogy egy testet részeire törjünk szét, szükségünk van egy másik testre, és egy bizonyos kölcsönhatás-típusra, energiára.

Amíg nem tudtak olyan részecskegyorsítókat építeni, amelyekben a bombázó atomok energiája már elegendőn nagy volt ahhoz, hogy az atommagokat széttörje, addig nem tudhattuk, hogy a magok protonokból és neutronokból állnak, így joggal tekintették az akkor ismert 92 típusú atomot az anyag végső építőköveinek. Az atomok ugyanis minden addig ismert kölcsönhatásukban megőrizték identitásukat.

Ma már tudjuk, hogy elegendően nagy energiájú kölcsönhatással még az egyébként igen stabil protonok és neutronok is további részekre törhetők szét, így ők sem tekinthetők végső építőköveknek, mivel kvarkoknak és gluonoknak nevezett részekből állnak.

A fizika épületének elméleti és kísérleti szárnya egymást segítve épül

Ahogy a neutron, a neutrinó létét először az elméleti kutatás jósolta meg, és csak évek múlva találtak rájuk a kísérleti fizikusok, ugyanúgy a kvarkokra és gluonokra és a Higgs bozonra is az elemi részek elméleti fizikájának kvantum-kromodinamika fejezete hívta fel a figyelmet. A kísérleti fizikusok csak később fedezték fel őket, a top-kvarkot például 1994-ben, a Higgs bozont 2013-ban. Felfedezésükkel az elemi részek elmélete és a megismert részecskék újra összhangba kerültek.

A molekulák nem elemi testek, hiszen kémiai úton, melegítéssel vagy más módon atomokra bonthatók. Az atomok sem elemiek, mert más atomokkal vagy fénysugárral történő bombázással tovább bonthatók. Az atommag sem elemi, mert nagyenergiájú atomokkal vagy gammasugarakkal protonokra és neutronokra bontható.

A 20. század közepéig a protonokat és a neutronokat elemi részeknek tekintették, de az 1960-as és 70-es években világossá vált, hogy tovább bonthatók, mégpedig kvarkokra.

Legjobb tudásunk szerint ma a kvarkok elemi részeknek tekinthetők. Ami az elektront illeti, őt mind a mai napig semmilyen kísérletben sem sikerült sem részekre bontani, sem bármilyen belső struktúrájára fényt deríteni. Az elektron is elemi test.

A ma ismert elemi testek (részecskék)

		Név	Jel	Tömeg	Spin	Töltés q/e	Anti-részecske jele	Élettartam [s]
FERMION	LEPTON	elektron	e	0,511 MeV	$\frac{1}{2}$	-1	e^{+}	∞
		müon	μ	105,7 MeV	$\frac{1}{2}$	-1	μ^{+}	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$
		tau	τ	1784 MeV	$\frac{1}{2}$	-1	τ^{+}	$0{,}3 \cdot 10^{-12}$
		neutrínó-e	ν_e	< 46 eV	$\frac{1}{2}$	0	$\overline{\nu_e}$	stabil
		μ-neutrínó	ν_μ	< 0,25 MeV	$\frac{1}{2}$	0	$\overline{\nu_\mu}$	stabil
		τ-neutrínó-τ	ν_τ	< 70 MeV	$\frac{1}{2}$	0	$\overline{\nu_\tau}$	stabil
	KVARK	up-kvark	u	~ 350 MeV	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$\overline{u}$	
		down-kvark	d	~ 350 MeV	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\overline{d}$	
		charm-kvark	c	~ 1500 MeV	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$\overline{c}$	
		strange-kvark	s	~ 500 MeV	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\overline{s}$	
		bottom-kvark	b	~ 5000 MeV	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\overline{b}$	
		top-kvark	t	?	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$\overline{t}$	
BOZON		foton	γ	0	1	0	γ	stabil
		gluon	g	0	1	0	g	
		W^{+}-bozon	W^{+}	$81{,}8 \pm 1{,}5$ GeV	1	+1	W^{-}	
		W^{-}-bozon	W^{-}	$81{,}8 \pm 1{,}5$ GeV	1	-1	W^{+}	
		Z^{0}-bozon	Z^{0}	$92{,}6 \pm 1{,}7$ GeV	1	0	Z^{0}	

Amit az anyag felépítéséről ma tudunk, azt a fizika az ún. Standard Modellben igyekszik összesűríteni. Eszerint az anyag 12 fermionból: 6-féle kvarkból és 6-féle leptonból épül fel, melyek között négy alapvető kölcsönhatás léphet fel:

gravitáció,

elektromágneses kölcsönhatás,

erős magerők és

gyenge magerők .

A természet négy alapvető kölcsönhatása

Kölcsönhatás típusa	Erősség (relatív)	Térbeli ható-távolság [m]	Kölcsönható részecskék
Erős kölcsönhatás (magerők)	1	$\approx 10^{-15}$	Kvarkok (hadronok)
Elektromágneses (villamos) kölcsönhatás	10^{-2}	∞	Villamos töltésű részecskék
Gyenge kölcsönhatás (magerők)	10^{-14}	$\approx 2 \cdot 10^{-18}$	Leptonok és kvarkok (hadronok)
Gravitáció	10^{-38}	∞	Minden részecske

A XIX század közepéig az elektromágneses erőkkel
a fizika három különálló fejezete foglalkozott:
az elektromosság tana, a mágnesség tana és az optika (fénytan).

Az ‘elektromágnesség’ szó görög eredetű ἤλεκτρον *ēlektron =* „amber” (borostyán)

μαγνῆτις λίθος *magnētis lithos = magnetit* Ὀπτικά optika

Az elektromágneses kölcsönhatás kitüntetett szerepű

Az elektromágneses kölcsönhatás az Univerzumban mindenütt, minden történésben jelen van, minden folyamatnak meghatározó kísérő jelensége.

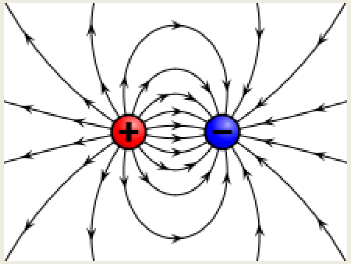
A Napból az energiát elektromágneses hullámok alakjában kapjuk.

A rugalmas erőhatás, a szilárd- és lágy testeket összetartó erők, a súrlódás, az égés, minden kémiai reakció lényegében elektromágneses kölcsönhatás.

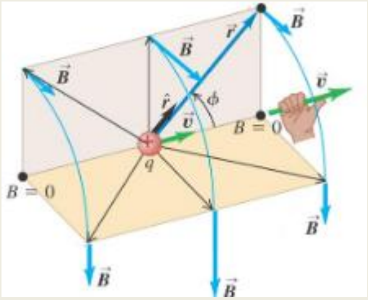
Életünk, beleértve az energiatermelő kémiai folyamatokat, a sejtek és egész idegrendszerünk működését, az elektromágneses kölcsönhatás jegyében zajlik.

Gravitációs erők hiányában lehet,
de elektromágneses erők nélkül nem lehet élni.

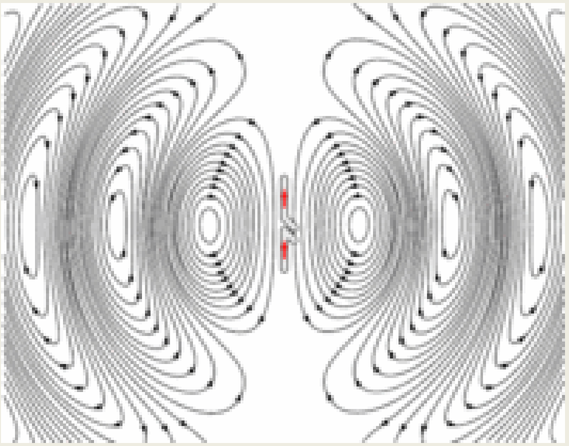
Elektromos töltéssel rendelkező testek körül
elektromos erőteret figyelhetünk meg,

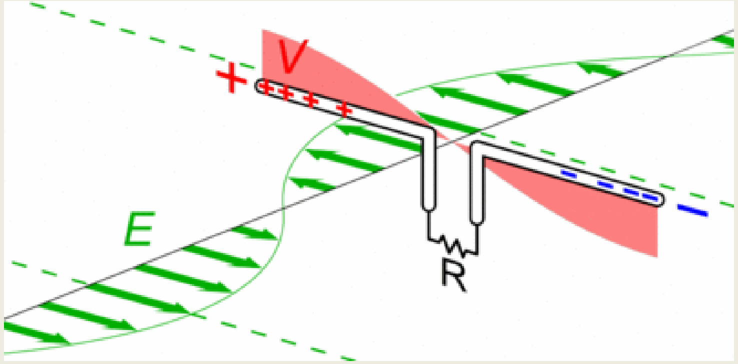


Mozgó töltés körül elektromos és
mágneses erőteret figyelhetünk meg



Gyorsuló töltés ‘antennaként sugároz’,
elektromágneses sugárzás forrása

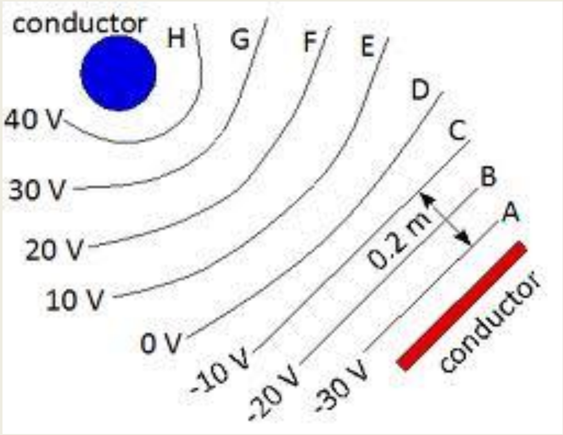




Erők - Vektorok

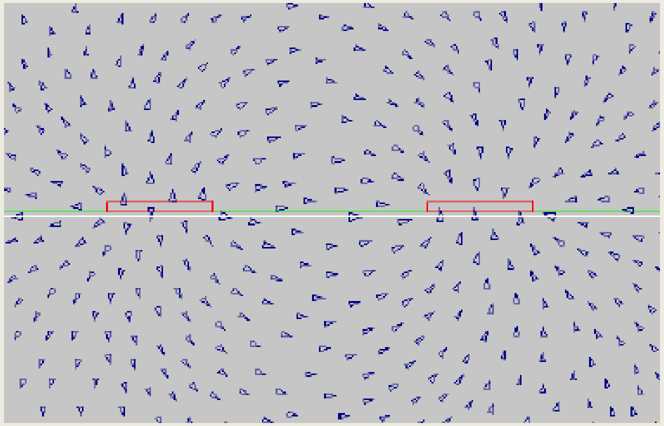
Vektor algebra és Vektoranalízis

Skalár és vektor terek



A skalár tér a geometriai tér (és idő)
minden pontjához
egy skalár számot rendel

Azonos skalár számú felületek
("ekvipotenciális" felületek)



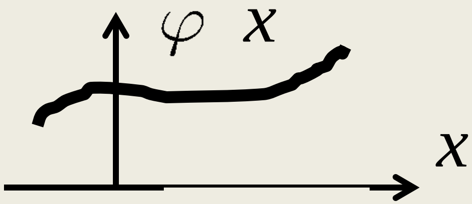
A vektor tér a geometriai tér (és idő)
minden pontjához
egy vektort rendel

A vektor tér ábrázolása nyilakkal
és „erővonalakkal"

Skalár tér

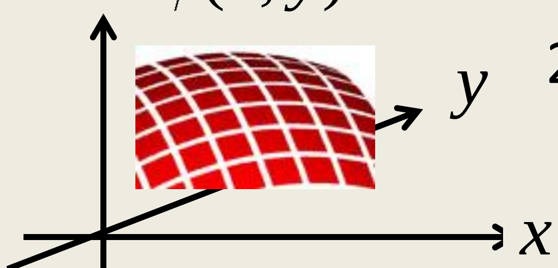
$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$$

Skalár – vektor függvény

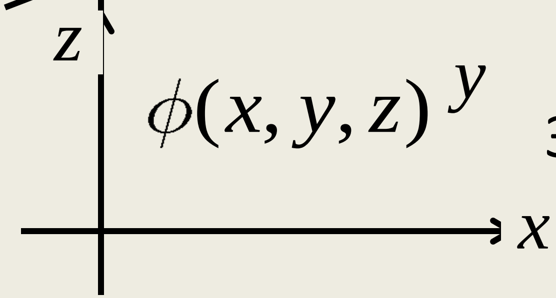


1 dimenzió

$\phi(x, y)$



2 dimenzió

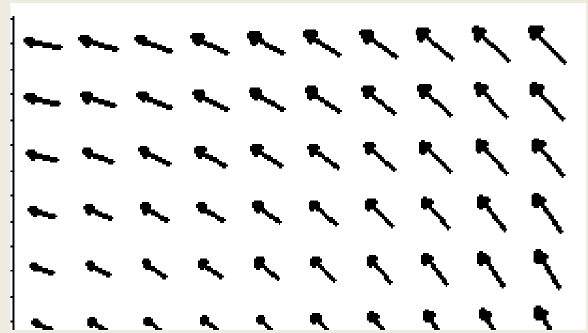


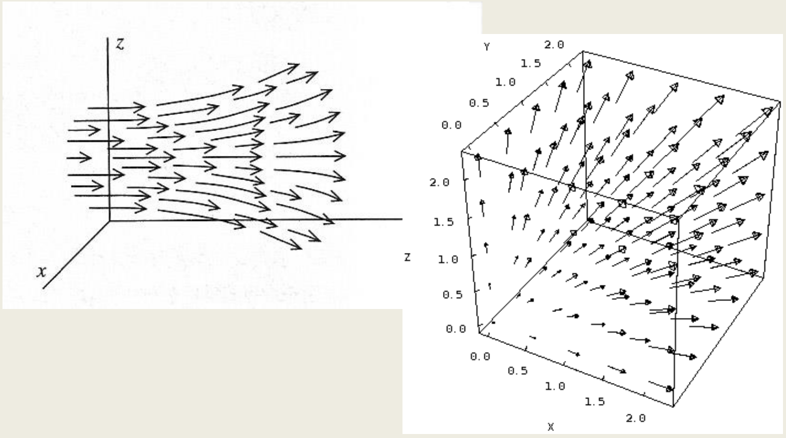
3 dimenzió

Vektor tér

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + v_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + v_z(\mathbf{r})\mathbf{k}$$

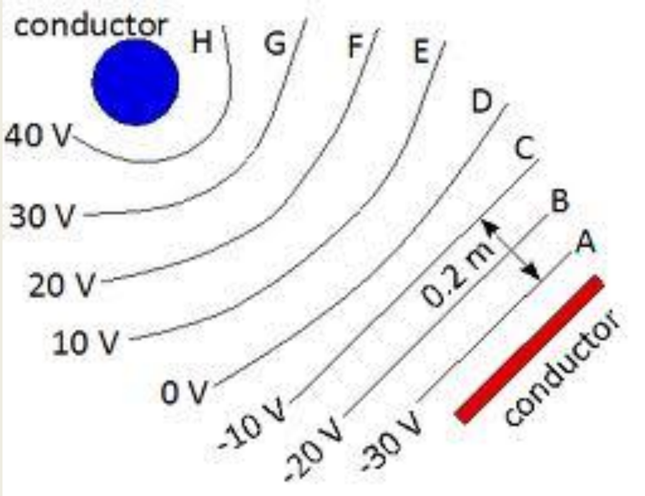
Vektor – vektor függvény

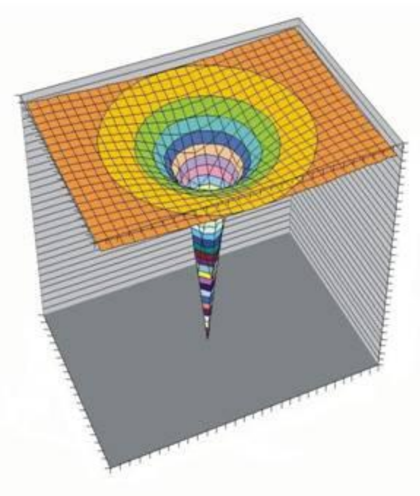


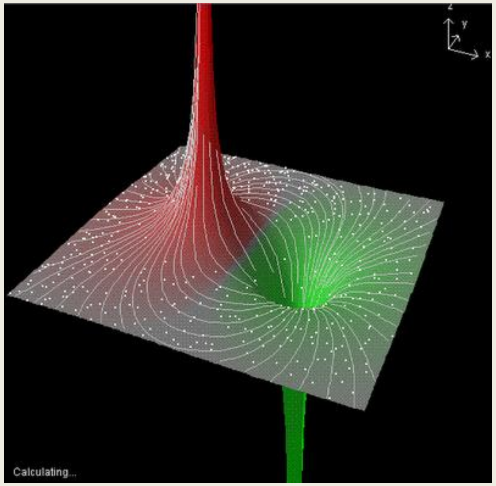


Skalár tér $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$

Ekvipotenciális felületek $\phi(\mathbf{r}) = \text{konstans}$





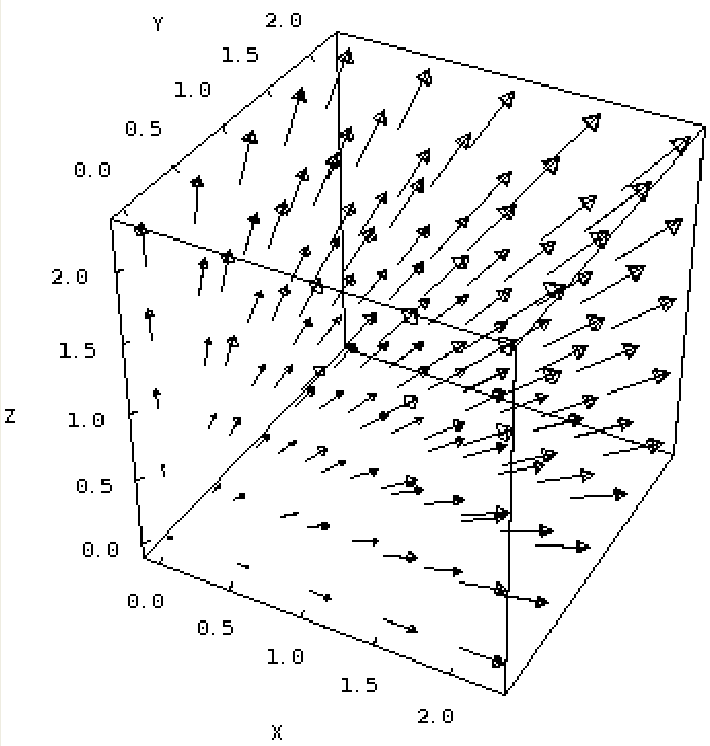


Vektor tér

Erővonalak

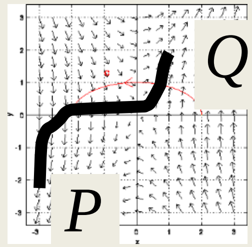
$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + v_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + v_z(\mathbf{r})\mathbf{k} =$$

$$= v_x(x, y, z)\mathbf{i} + v_y(x, y, z)\mathbf{j} + v_z(x, y, z)\mathbf{k}$$



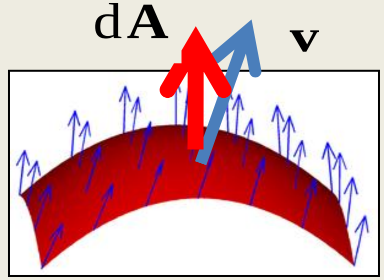
Integrálszámítás

VONAL INTEGRÁL



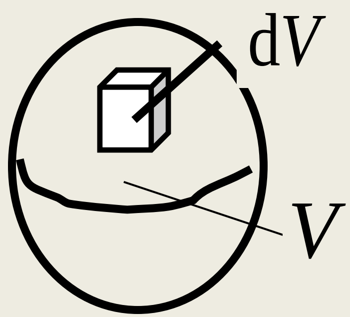
$$\lim_{\mathrm{d}l\to 0}\sum_{P}^{Q}\mathbf{v}\ \ \mathbf{r}\ \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_{L:\ P}^{Q}\mathbf{v}\ \ \mathbf{r}\ \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$$

FELÜLETI INTEGRÁL



$$\lim_{\mathrm{d}A\to 0}\sum_{A}\mathbf{v}\ \ \mathbf{r}\ \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_{A}\mathbf{v}\ \ \mathbf{r}\ \cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$

TÉRFOGATI INTEGRÁL



$$\lim_{\mathrm{d}V\to 0}\sum_{V}\rho\ \ \mathbf{r}\ \cdot \mathrm{d}V = \int_{V}\rho\ \ \mathbf{r}\ \cdot \mathrm{d}V$$

$$\lim_{\mathrm{d}V\to 0}\sum_{V}\mathbf{f}\ \ \mathbf{r}\ \cdot \mathrm{d}V = \int_{V}\mathbf{f}\ \ \mathbf{r}\ \cdot \mathrm{d}V$$

Differenciálszámítás

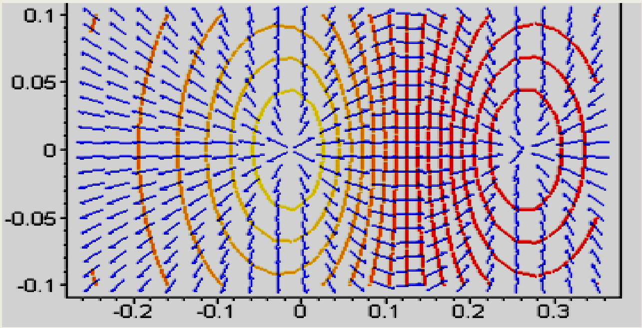
Skalár tér $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$ skalár-vektor függvény

A térbeli skalár számérték megváltozása az elmozdulás nagyságától és irányától függ $\Delta\mathbf{r}$

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r})$$

A maximális megváltozás iránya merőleges az ekvipotenciális felületre

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) \cong \operatorname{grad}\phi(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{r}$$



$$\operatorname{grad}\phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\cdot\phi$$

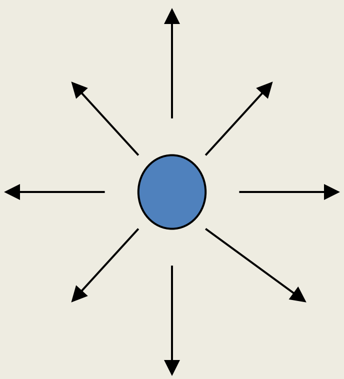
$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

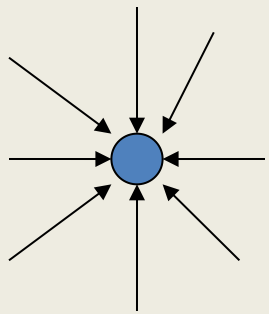
Vektor terek $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + v_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + v_z(\mathbf{r})\mathbf{k}$

Vektor-vektor függvények

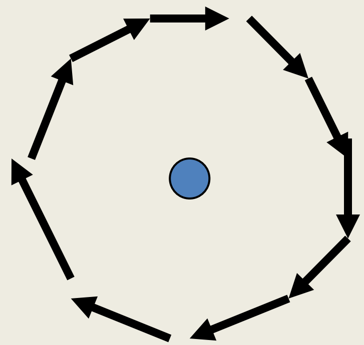
Vektor-vektor függvények deriváltjai

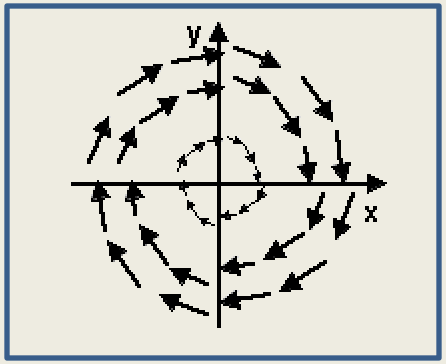
Source = forrás Sink=nyelő





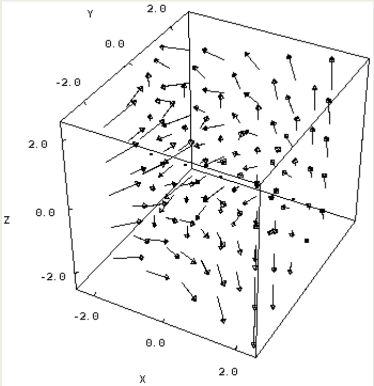
Curls, vortex = örvény, forgatag



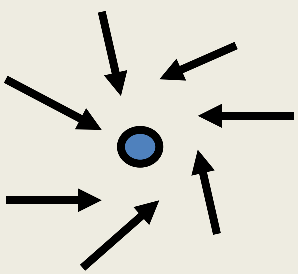


Divergencia – „Source”

Rotatió – Curl = rotáció



Forrás + Örvény



Vektrotér divergenciája (forrásai)

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_A \mathbf{v}\cdot d\,\mathbf{A}}{\Delta V}$$

A vektortér egy tetszés szerinti pontjában a vektortér divergenciája a szóban forgó pont köré irt zárt felületre vett felületi integrál és a zárt felület által határolt köbtartalom hányadosának határértéke, ha a térfogatelem nagysága minden határon túl csökken.

(E határérték független a térfogat és az azt határoló felület alakjától!)

A vektortér rotációja (örvényei)

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{v}\right)_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\oint_L \mathbf{v}\cdot d\,\mathbf{l}}{\Delta A}$$

A vektortér egy pontbeli rotációjának a ponton átmenő sikra merőleges komponensét megkapjuk, ha képezzük

a vektrotér vonalintegrálját a sikban egy pont körüli zárt vonalra,

ezt elosztjuk a vonal által körülhatárolt felületelemmel, majd

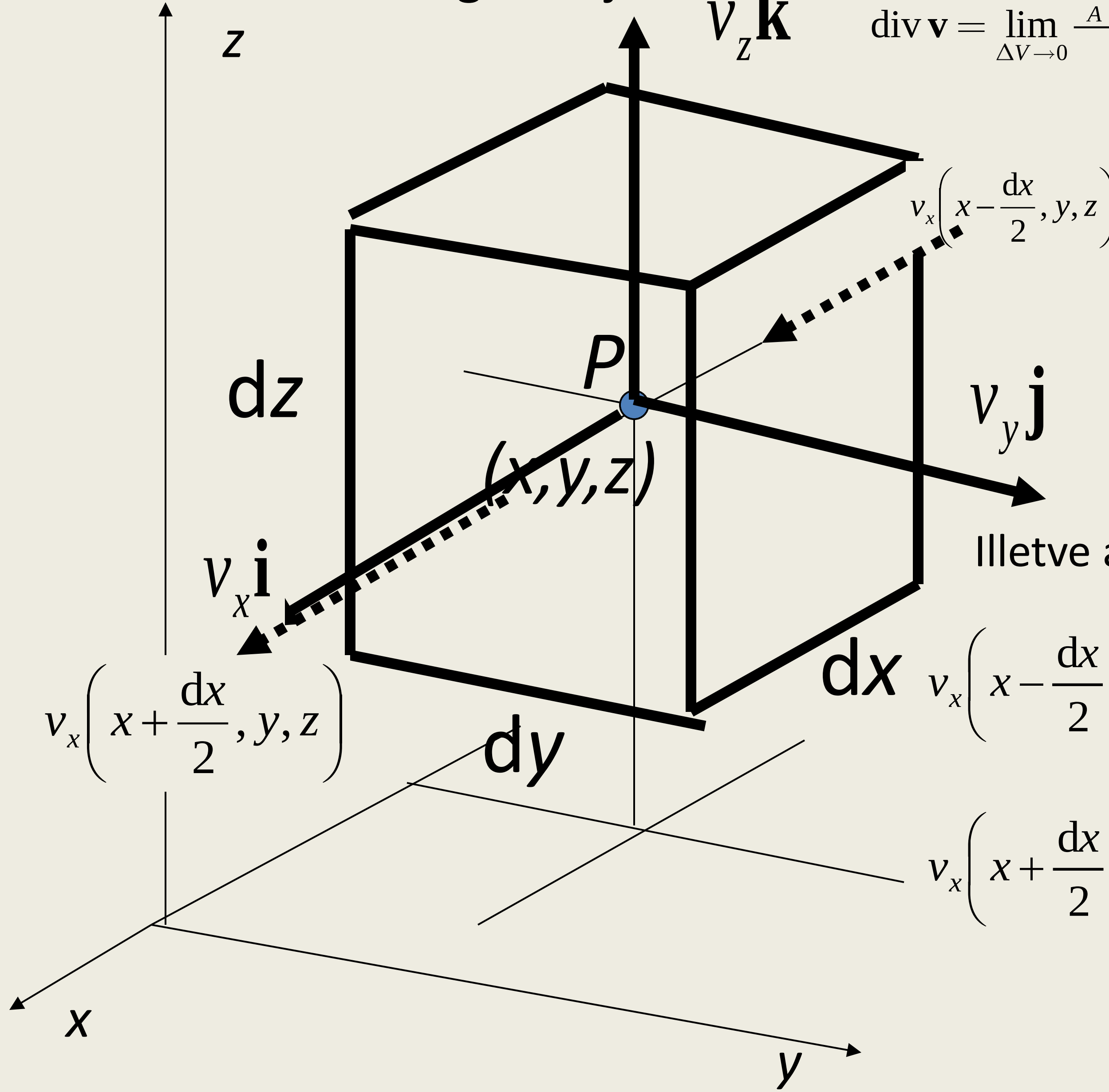
képezzük e hányados határértékét, ha a felületelem minden határon túl nulla felé tart, miközben a határoló görbe a pontra zsugorodik.

Vektrotér divergenciája

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_A \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A}}{\Delta V}$$

Térfogatelem

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z$$



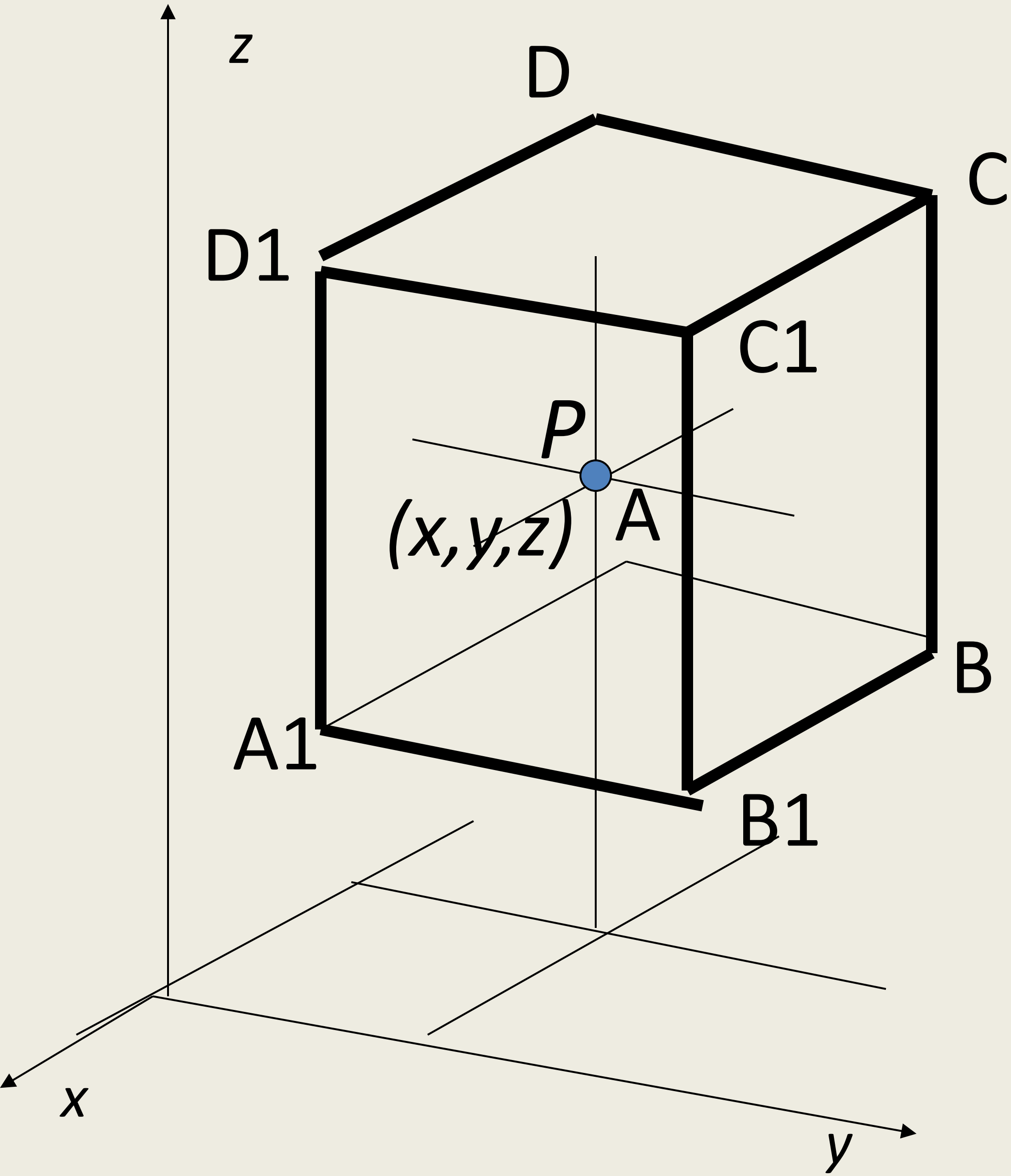
A vektortér a P pontban

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

Illetve a P pont környezetében:

$$v_x\left(x-\frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right) \approx v_x(x,y,z) - \frac{\mathrm{d}x}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$v_x\left(x+\frac{\mathrm{d}x}{2}, y, z\right) \approx v_x(x,y,z) + \frac{\mathrm{d}x}{2}\frac{\partial v_x}{\partial x}$$



Minthogy a felületnek mindig a kifelé mutató normálisa a pozitiv irány, az ABCD és az A1B1C1D1 lapokra vett integrál

$$\int_{ABCD} \mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{A} + \int_{A1B1C1D1} \mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\oint_{A} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} = \int_{ABCD} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} + \int_{A1B1C1D1} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} +$$

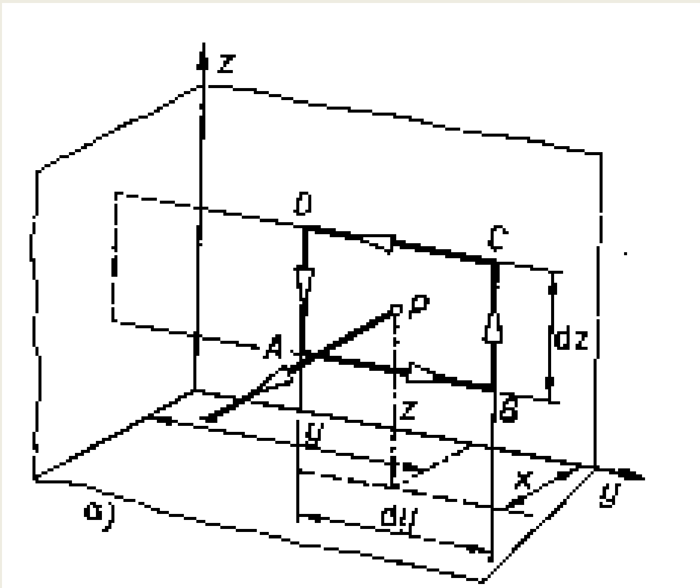
$$\int_{AA1D1D} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} + \int_{BB1C1C} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} +$$

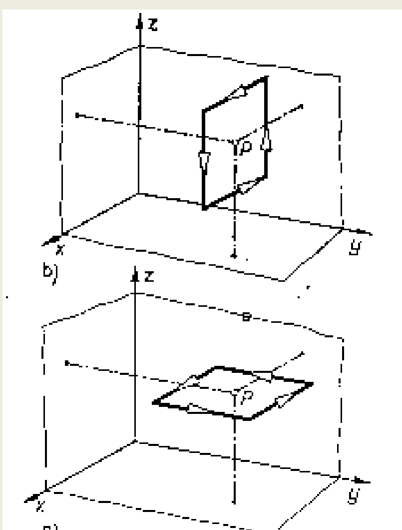
$$\int_{ABB1A} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} + \int_{DCC1D} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} =$$

$$= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

A vektortér rotációja (örvényei)





Először számitsuk ki a rotáció x irányú komponensét.

$$\int_{AB} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \int_{CD} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\partial v_y}{\partial z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\int_{DA} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \int_{BC} \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{\partial v_z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

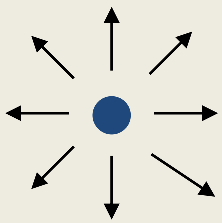
Mutatis mutandis

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

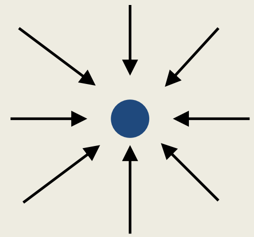
$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_x(x,y,z)\mathbf{i} + v_y(x,y,z)\mathbf{j} + v_z(x,y,z)\mathbf{k}$$

Divergencia



Source (forrás)

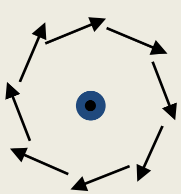


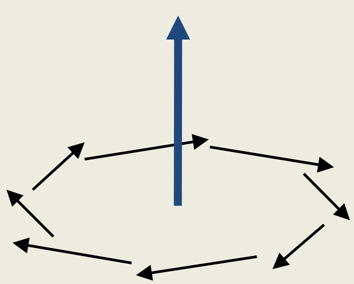
Sink (nyelő)

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_A \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A}}{\Delta V}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Rotation (curl), Vortex





$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{v}\right)_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\oint_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}}{\Delta A}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Példák

1. Adja meg Descartes koordinátákban a Laplace operátort, amelyet a $\Delta\varphi \equiv \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\varphi\right)$ azonosság definiál.

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \mathrm{grad}\,\varphi = \nabla \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{y}}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{z}}\mathbf{k}$$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\varphi\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathrm{z}^2} \equiv \Delta\varphi$$

2. Bizonyítsa be, hogy $\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}\,\varphi\right) = \nabla \times \left(\nabla \cdot \varphi\right) = 0$

3. Bizonyítsa be, hogy $\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\right) = \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{v}\right) = 0$

4. Bizonyítsa be, hogy $\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\ \mathbf{v}\right) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{v}) - \Delta\,\mathbf{v}$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) =$$
$$= \nabla \times \left(\nabla \cdot \varphi \right)$$

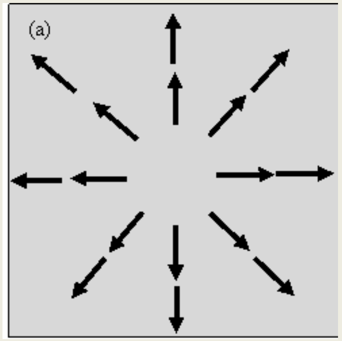
$$\mathbf{rot\ v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

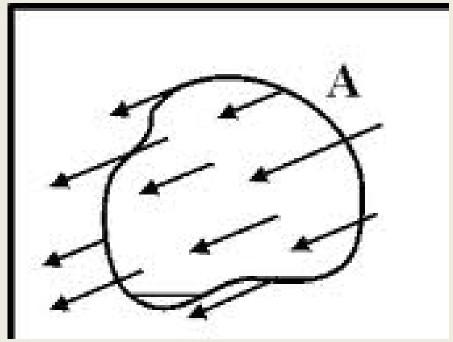
$$\nabla \cdot \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{k}$$

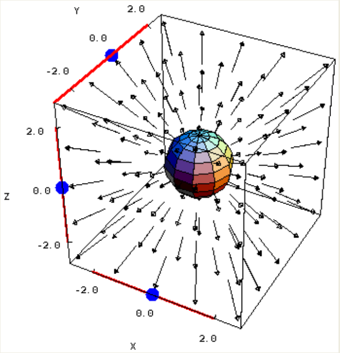
$$\nabla \times \left(\nabla \cdot \varphi \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \partial\varphi / \partial x & \partial\varphi / \partial y & \partial\varphi / \partial z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \right) =$$
$$= \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{v} \right)$$

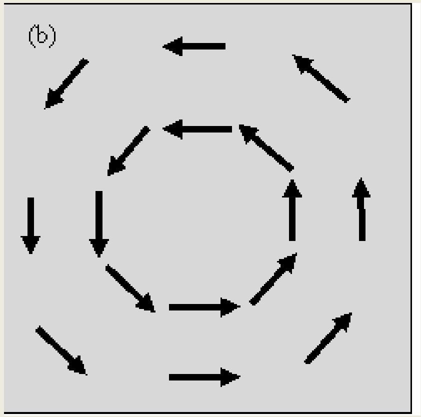
$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0$$

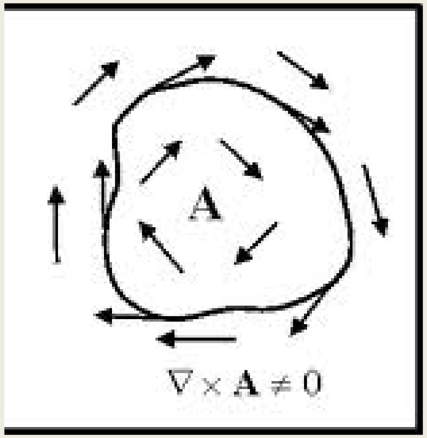






Örvénymentes vektor térnek csak divergenciája van (források).

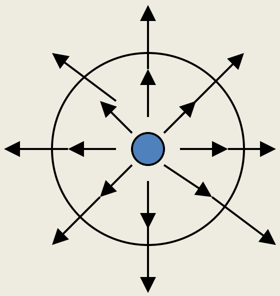




Egy solenoid típusú vektor térnek csak örvényei vannak.

Gauss integrál tétele

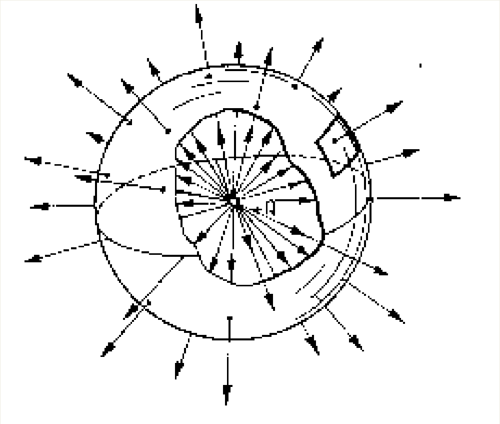
Egy folytonosan differenciálható vektor tér zárt felületre vett integrálja (fluxus) egyenlő a vektor tér divergenciájának térfogati integráljával a felület által bezárt térfogatra nézve.



$$\oint_A \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \int_V \mathrm{div}\mathbf{v}\cdot \mathrm{d}V$$

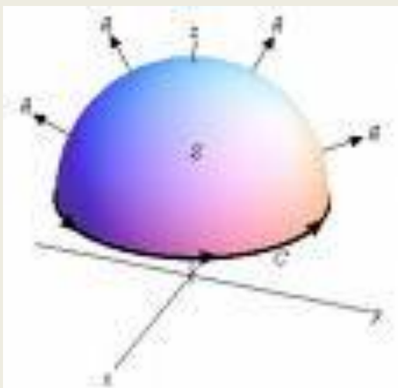
$$\oint_A \mathbf{v}\cdot \mathbf{dA} = \mathbf{8}$$

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{v}\cdot \mathrm{d}V = 8$$

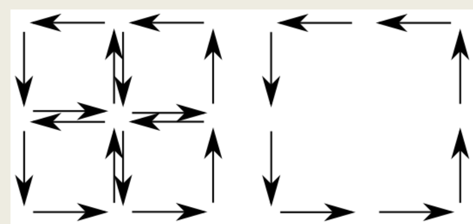


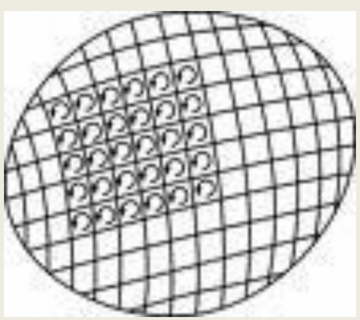
Stokes integrál tétele

Egy vektor tér rotációjának felületi integrálja egy három dimenziós felületre egyenlő a vektor tér vonalmenti integráljával a felület határára.



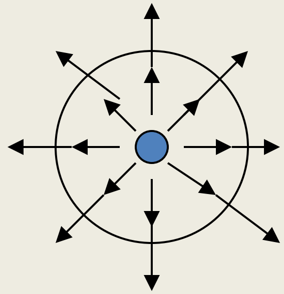
$$\oint_L \mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_A \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A}$$





Carl Friedrich Gauss

(1777 – 1856)



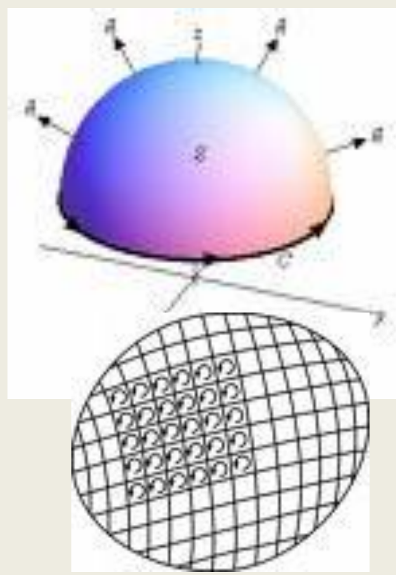
$$\oint_A \mathbf{v}\cdot\mathbf{dA} = \mathbf{8}$$

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}V = 8$$

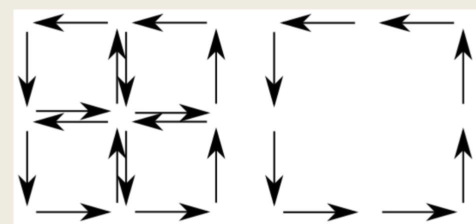
Gauss tétele

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}V = \oint_A \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}$$

Sir George Gabriel Stokes
(1819 - 1903)



Stokes tétele



$$\oint_L \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_A \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}$$

A vektoranalízis azonosságai és inverz problémái

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \nabla(\nabla\varphi) \equiv \Delta\varphi$$

$$\mathrm{div}(\varphi\cdot\mathbf{u}) = \varphi\cdot\mathrm{div}\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\varphi$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = \nabla\times(\nabla\varphi) = 0$$

$$\mathrm{rot}(\varphi\cdot\mathbf{u}) = \varphi\cdot\mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{grad}\varphi\times\mathbf{u}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) = \nabla(\nabla\times\mathbf{v}) = 0$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}\times\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{u}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{v}) - \Delta\,\mathbf{v}$$

A vektor analízis inverz problémái

Adottak az erőtér forrásai és örvényei .
Határozzuk meg az erőtereket!

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r});\;\; \mathrm{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \text{find } \mathbf{v}(\mathbf{r}) \text{ from given } g(\mathbf{r})$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0;\;\; \mathrm{rot}\,\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{s}(\mathbf{r}) \rightarrow \text{find } \mathbf{u}(\mathbf{r}) \text{ from given } \mathbf{s}(\mathbf{r})$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{w}(\mathbf{r}) = 0;\;\; \mathrm{rot}\,\mathbf{w}(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \text{find } \mathbf{w}(\mathbf{r}) \text{ for a given volume } V$$

Inverz problémák megoldása – Skalár és vektor potenciál

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r});\;\; \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \text{find } \mathbf{v}(\mathbf{r}) \text{ from given } g(\mathbf{r})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = g \qquad \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \qquad \mathbf{v(r)} = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}) \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{g}{r} \mathrm{d}V$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0;\;\; \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{s}(\mathbf{r}) \rightarrow \text{find } \mathbf{u}(\mathbf{r}) \text{ from given } \mathbf{s}(\mathbf{r})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \qquad \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{s} \qquad \mathbf{u(r)} = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \qquad \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{s}}{r} \mathrm{d}V$$