



Az Információ-technika és a Bionika Fizikája I

2016 Tavasz – 04

Dr. Csurgay Árpád I.

5. Merev test mozgása (Rigid body motion)

Kiterjedt testek egyik idealizált formája a „merev test” (rigid body).

A merev test olyan speciális pontrendszer, amelynek pontjai egymáshoz képest nem mozdulhatnak el.

A merev test tömege (össztömeg) : $m = \sum_{i=1}^n m_i \quad m = \iiint dm$

A tömegközéppont: $\mathbf{r}_0 = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i m_i \right) / m$

A mozgás: Transzláció + Rotáció (Lineáris + forgó mozgás)

Transzláció: A test tömegközéppontját, mint az egész test tömegét jelentő pontszerű tömeget a külső erők eredője mozgatja

A test lineáris lendülete: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_0 = m\dot{\mathbf{r}}_0$

A lendületet csak külső erő változtathatja meg (tehetetlenség)

A lendület (momentum) megmaradási törvénye

Általában több test esetén, csak egymásra ható erőkkel számolva, azaz feltéve, hogy a több testből álló rendszerre külső erő nem hat

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \mathbf{p}_i \right) = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{i,j} = 0 \rightarrow \quad \mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \text{állandó},$$

$$\mathbf{r}_0 = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / \sum_i m_i \rightarrow \quad \mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = m \mathbf{v}_0; \quad \mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$$

A tömegközéppont sebességét csak külső erő változtatja meg $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$

Forgó test – ‘perdület’ (angular momentum)

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

A perdületre is érvényesül egy megmaradási törvény

Center of Mass and Stability <https://www.youtube.com/watch?v=ajTyhbvMEAg>



Rotational Inertia: The Race Between a Ring and a Disc

<https://www.youtube.com/watch?v=CHQOctEvtTY>



Rotational Inertia: Balancing a Weighted Stick

https://www.youtube.com/watch?v=lk_Pwu7nf1U

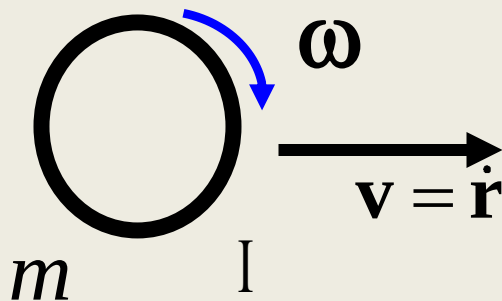


Conservation of Angular Momentum: Controlling Angular Velocity on a Rotating Stool

https://www.youtube.com/watch?v=_eMH07Tghs0

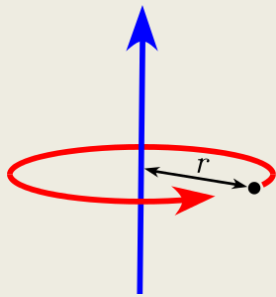
Lineáris vs. Forgó (angular) mozgás

Lineáris mennyiség	Jele	Angular mennyiség	Jele
Távolság	$\mathbf{r}$	Szög (angle)	θ
Sebesség	$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$	Szögsebesség	$\boldsymbol{\omega}$
Tömeg (mass)	m	Tehetetlenségi nyomaték (Moment of Inertia)	I
Lendület (momentum)	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	Perdület (angular momentum)	$\vec{\ell} (= I \cdot \boldsymbol{\omega})$
Erő (Force)	$\mathbf{F} (= \dot{\mathbf{p}})$	Nyomaték (torque)	$\mathbf{M} (= \dot{\vec{\ell}})$

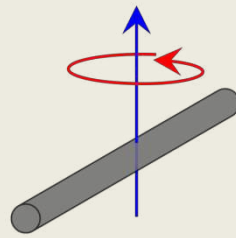


Kinetikus energia (Kinetic energy)

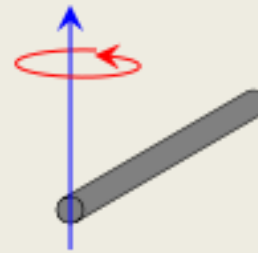
$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} I \boldsymbol{\omega}^2$$



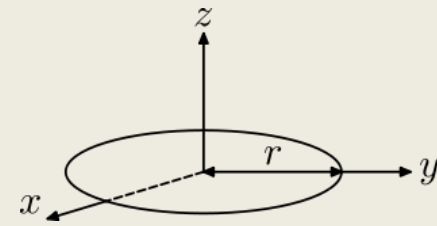
$$I = mr^2$$



$$I_{\text{center}} = \frac{mL^2}{12}$$

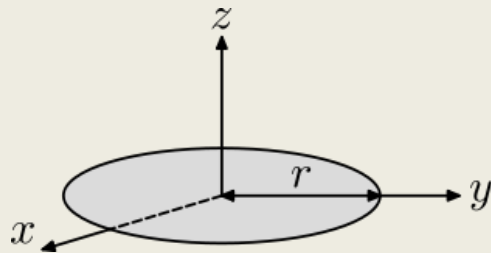


$$I_{\text{end}} = \frac{mL^2}{3}$$



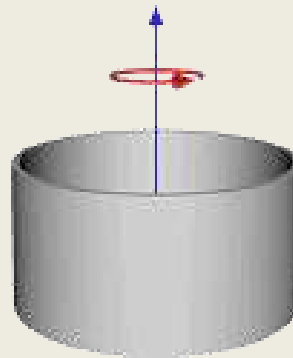
$$I_z = mr^2$$

$$I_x = I_y = \frac{mr^2}{2}$$

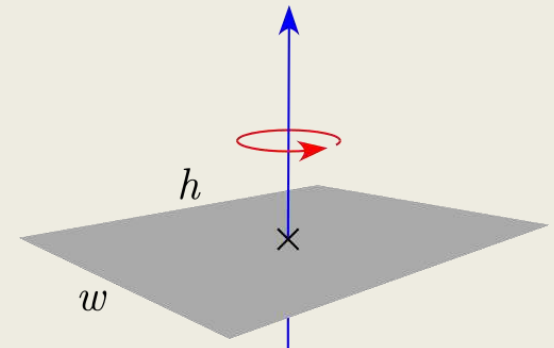


$$I_z = \frac{mr^2}{2}$$

$$I_x = I_y = \frac{mr^2}{4}$$



$$I = mr^2$$



$$I_c = \frac{m}{12} (h^2 + w^2)$$

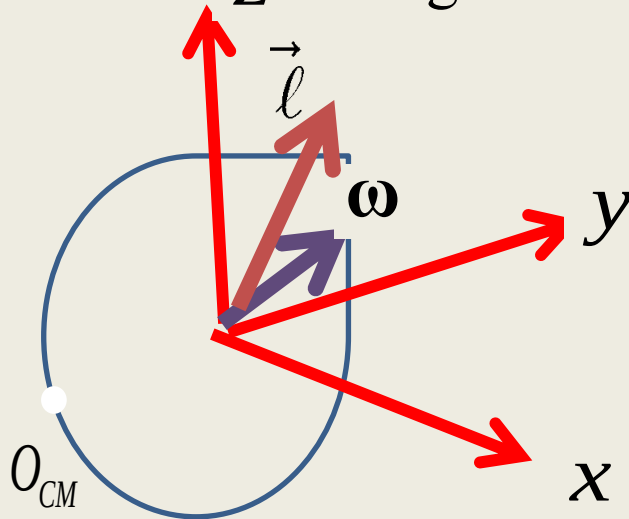
Tétel-RB-01 Egy merev test perdületét az origóra vonatkoztatva kiszámíthatjuk, ha a merev testet először a CM tömegközéppontba koncentrált pontszerű tömegnek tekintjük és kiszámítjuk e pontszerű tömeg perdületét az origóra, majd ehhez hozzáadjuk a testnek a CM-re vonatkozó perdületét.

Tétel-RB-02 Egy merev test kinetikus energiáját úgy számíthatjuk ki, hogy először a testet egy a CM-ben lévő pontszerű tömegként kezeljük, majd ennek kinetikus energiájához hozzáadjuk a testnek a CM-hez képesti forgásainak kinetikus energiáját.

Tétel-RB-03 Ha egy merev testre ható nyomatékok eredője nulla, akkor a merev test perdülete állandó marad. Azaz, az izolált merev test perdülete (merev test, melyre külső erők nem hatnak) megmarad.

A test lineáris lendülete: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}_0 = m\dot{\mathbf{r}}_0$

Az összes külső erő, ami a testre hat, reprezentálható egyetlen külső erővel, amely a tömegközénpontonra hat. és a tömegközéppont, mint pontszerű test mozog. $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{r}}_0$



x, y, z , mozgó koordinátarendszer, amely mereven a testhez van kötve.

$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$$

A merev test forgása a pillanatnyi szögsebességgel reprezentálható:

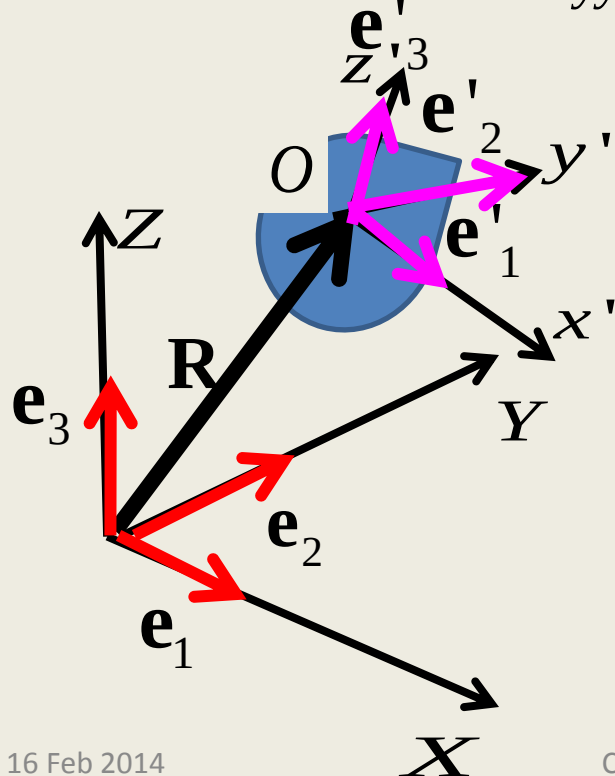
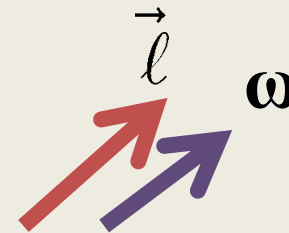
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \cdot \mathbf{i} + \omega_y \cdot \mathbf{j} + \omega_z \cdot \mathbf{k}$$

A test perdület vektora irányában általában nem szögsebesség vektor irányú



$$\vec{l} = \hat{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \begin{bmatrix} l_{0x} \\ l_{0y} \\ l_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Ha $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} \Rightarrow$



O

Tömeg középpont

$\mathbf{R}(X, Y, Z)$

A test térbeli orientációja

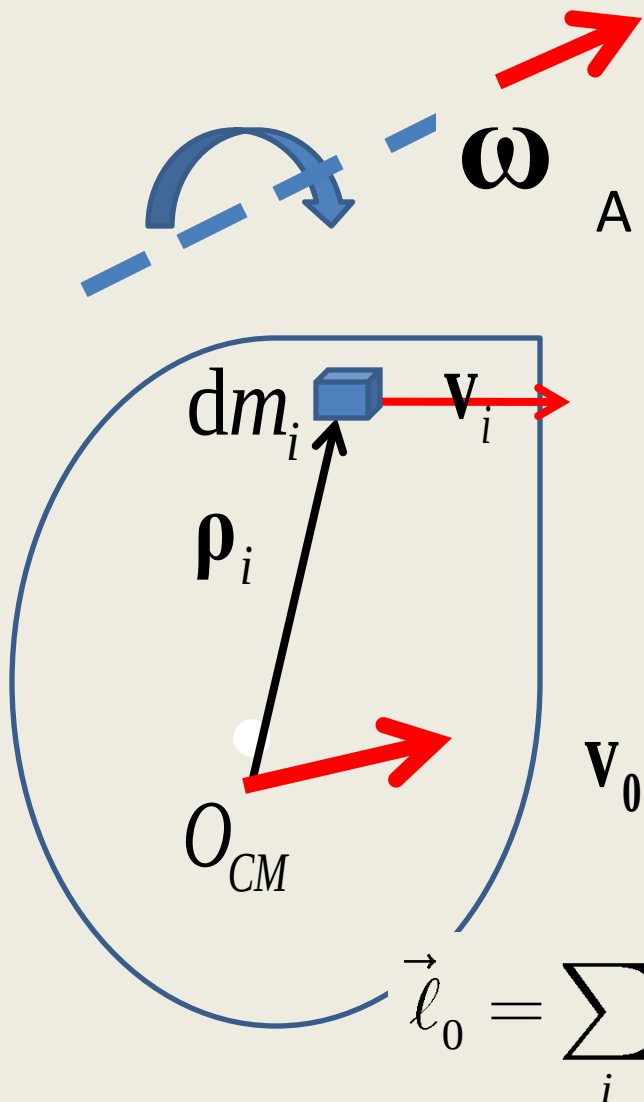
ϕ, θ, ψ

Pillanatnyi szögsebesség

$\boldsymbol{\omega}$

Forgás a térben egy pillanatban:

A merev test egy rögzített pont körül fordul



Az egész test
lineáris lendülete:

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{v}_i dm_i$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$$

Az i pont perdülete $d\vec{\ell}_{0i} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i dm_i$

$$\vec{\ell}_0 = \sum_i \mathbf{r}_G + \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{v}_i dm_i$$

$$\vec{\ell}_0 = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i dm_i \Rightarrow \iiint \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} dm$$

Perdület – Angular momentum

$$\vec{\ell}_0 = \sum_i \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \, dm_i \Rightarrow \iiint \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \, dm$$

$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}; \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_x \cdot \mathbf{i} + \omega_y \cdot \mathbf{j} + \omega_z \cdot \mathbf{k}$$

$$\vec{\ell}_0 = \iiint \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \, dm = \hat{\mathbf{I}} \times \boldsymbol{\omega}$$

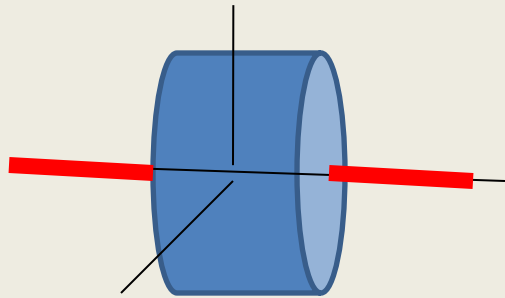
$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \iiint y^2 + z^2 \, dm & -\iiint xy \, dm & -\iiint xz \, dm \\ -\iiint xy \, dm & \iiint x^2 + z^2 \, dm & -\iiint yz \, dm \\ -\iiint xz \, dm & -\iiint yz \, dm & \iiint x^2 + y^2 \, dm \end{bmatrix}$$

x, y, z A koordináta rendszer megválasztható úgy is, hogy

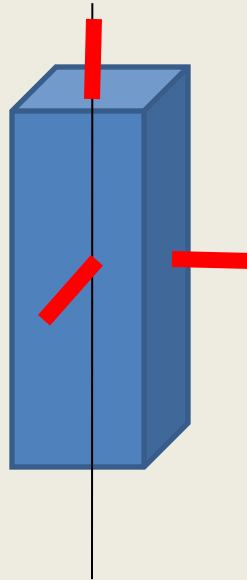
$$\vec{\ell}_0 = \hat{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ell_{0x} \\ \ell_{0y} \\ \ell_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad \text{„Főtengelyek”}$$

„Főtengelyek”

Minden szimmetria tengely főtengely



Bármely két egymásra
merőleges irány főtengely



Diagonalizálás

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{A}^T$$

ahol

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Merev test mozgásának Euler egyenletei

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{r}}_0$$

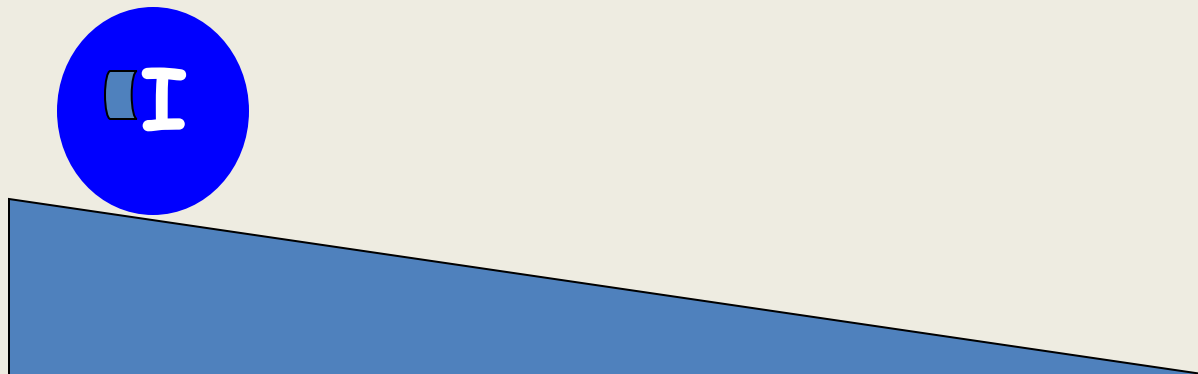
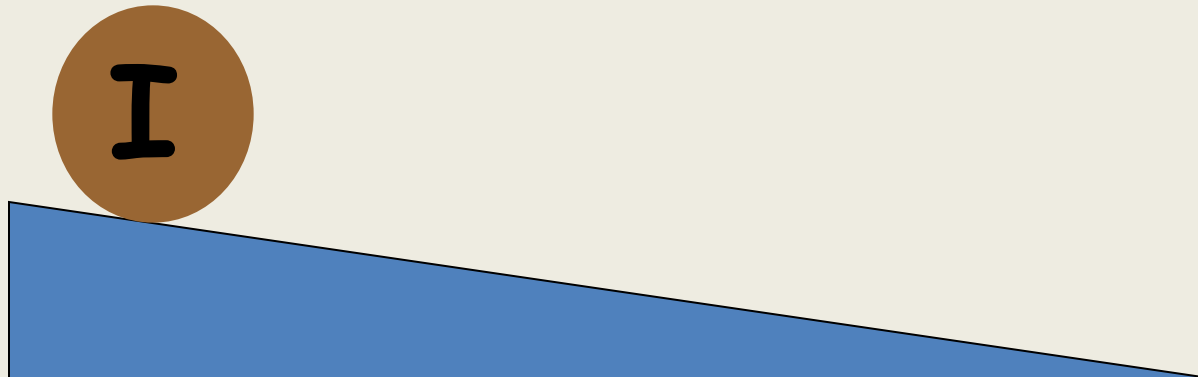
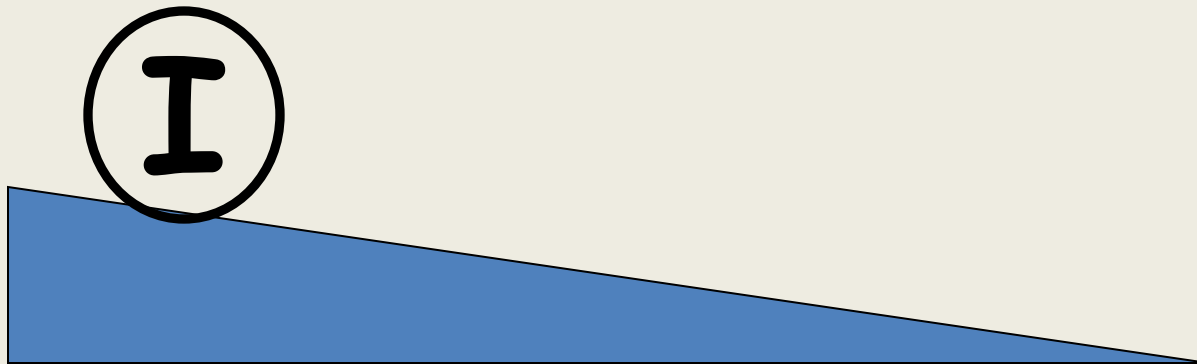
$$\mathbf{M} = \dot{\vec{\ell}} = \hat{\mathbf{I}} \times \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z$$

$$M_y = I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_x\omega_z$$

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y$$

Gyűrű, korong, gömb versenye



Wolfgang
PAULI

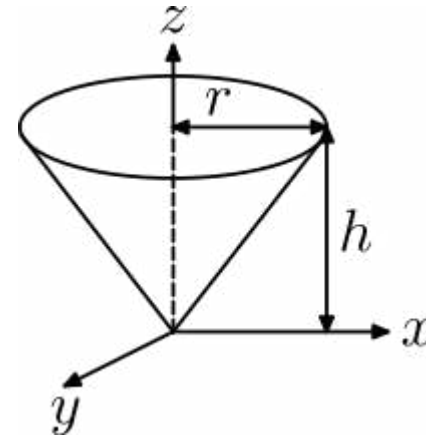
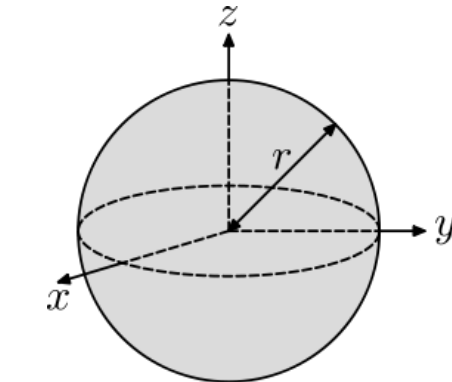
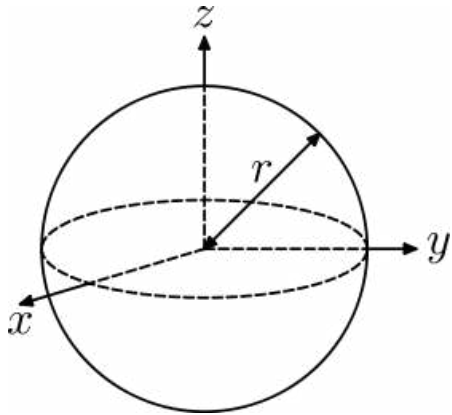


Niels
BOHR

Ha a szögsebesség vektor $\boldsymbol{\omega}$ és a perdület vektor $\vec{\ell}$ egyirányú, akkor forgás tehetetlensége, I , skalár szám.

Általános 3D forgás esetén $\vec{\ell} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$

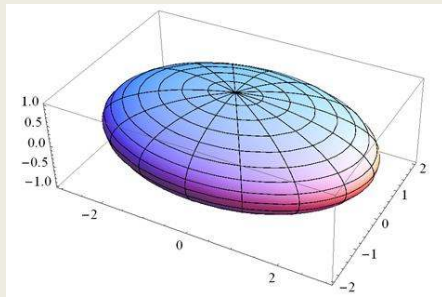
A skalár momentumot az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{n} \equiv n_i I_{ij} n_j$ definiálja



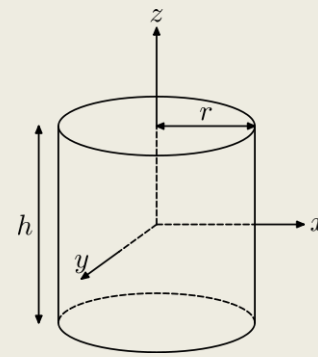
$$I = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mr^2 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mr^2 \end{bmatrix}$$

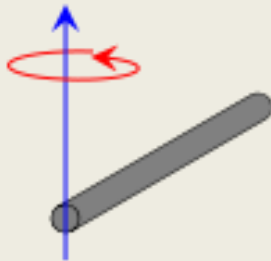
$$I = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mr^2 \end{bmatrix}$$



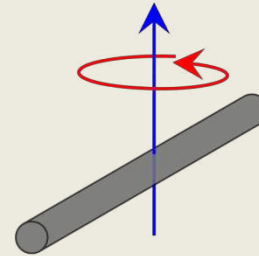
$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}m(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5}m(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$



$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix}$$



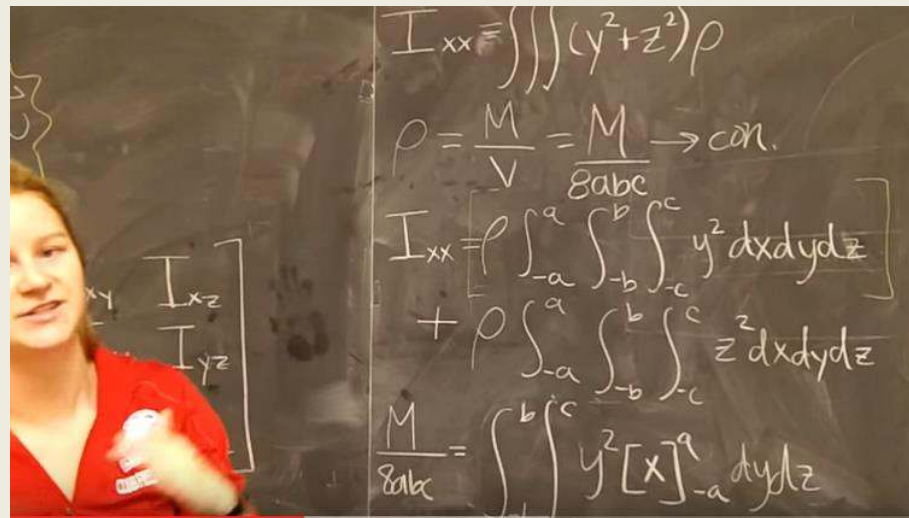
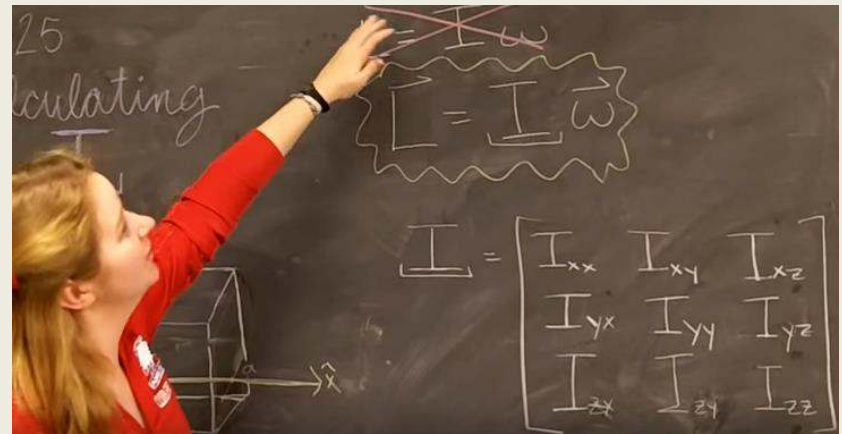
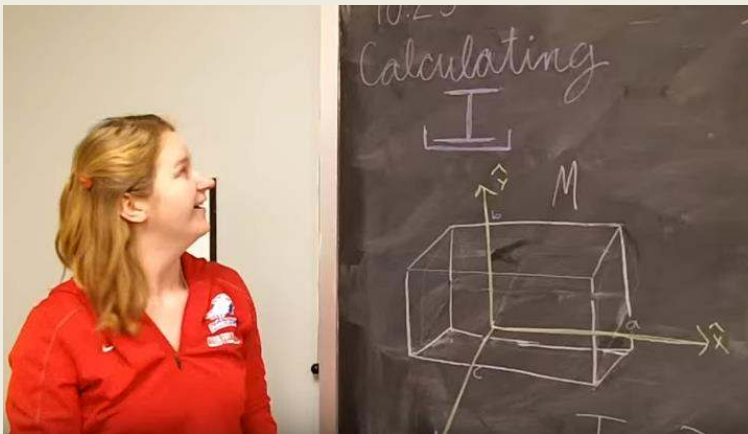
$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ml^2 \end{bmatrix}$$



$$I = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}ml^2 \end{bmatrix}$$

Moment of Inertia Tensor

<https://www.youtube.com/watch?v=4xeRmcV3DMc>



Ellenőrző kérdések 4.

Merev testek mozgása (Rigid body motion)

1. Merev testek össztömege és tömeg-középpontja. Tömegközéppont és stabilitás.
2. Merev test lendülete (momentum) és perdülete (angular momentum)
3. Merev test ranszlációs és forgási tehetetlensége (inertia)
4. Merev test tehetetlenségi nyomatéka (Moment of inertia)
5. Merev test kinetikus energiája
6. Határozza meg egy pontszerű test tehetetlenségi nyomatékát egy adott tengelyre.
7. Határozza meg egy körgyűrű és egy hengerpalást tehetetlenségi nyomatékát a szimmetria tengelyre.
8. Hogyan határozható meg egy téglatest tehetetlenségi nyomatéka?
9. Merev test perdülete a tömegközéppontra illetve egy tetszőleges másik pontra vonatkoztatva
10. Ismertesse a lendület és a perdület megmaradási tételét!