



Az Információ-technika és a Bionika Fizikája I

2016 Tavasz – 02

Dr. Csurgay Árpád I.

Klasszikus (nem-relativisztikus) mechanika

$$v \ll c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Test lendülete (momentum) = Tömeg x Sebesség

Tehetetlenség: a testek lendületüket (momentum) önmaguk nem képesek megváltoztatni

3. Newton mozgástörvényei

I. Erőmentes térben a test lendülete nem változik

II. A lendületet a testre ható erő változtatja meg

$$\frac{d m \mathbf{v}}{d t} = m \frac{d \mathbf{v}}{d t} = \mathbf{F}$$

III. Két test között ható erőre teljesül az akció-reakció elve

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

A lendület (impulzus, momentum) megmaradási törvénye

Ha két test hat egymásra, akkor

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0,$$

Általában több test esetén, csak egymásra ható erőkkel számolva, azaz feltéve, hogy a több testből álló rendszerre külső erő nem hat

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \mathbf{p}_i\right) = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{i,j} = 0 \rightarrow \sum_i \mathbf{p}_i = \text{állandó},$$

Bevezetve a rendszer tömegközéppontját $\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / \sum_i m_i$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \mathbf{p}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i\right) = 0 \rightarrow \sum_i \mathbf{p}_i = \text{állandó} = \left(\sum_i m_i\right) \mathbf{v}$$

Ha külső erő nem hat, akkor a tömegközéppont $\mathbf{v}$ sebessége állandó marad!

4. A mechanika elvei

Newton törvényei – „Vektor mechanika”:

Minden egyes tömegpontra meghatározzuk a rá ható erőt,
hogymegoldhassuk a Newton mozgásegyenleteket

5. Analitikus mechanika

Kiindulunk a vektor mechanikából: $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}$

Feltesszük, hogy az erőter konzervatív: $\mathbf{F} = -\text{grad}U_{\text{pot}}(\mathbf{r}) = -\nabla U_{\text{pot}}(\mathbf{r})$

Két új fogalmat vezetünk be:

Lagrange függvény (Lagrangian)=
=Kinetikus mínusz Potenciális energia $L = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - U_{\text{pot}}(\mathbf{r}),$

Hatás (Action)

A Lagrange függvény
idő-integrálja

$$S[\mathbf{r}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - U_{\text{pot}}(\mathbf{r}) \right) dt.$$

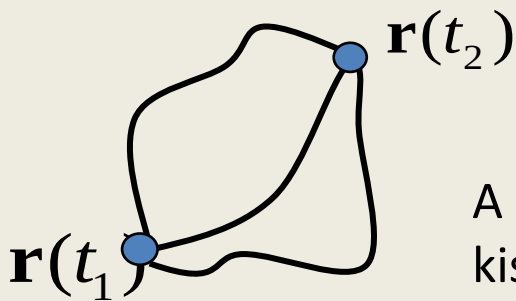
Állítás (Proposition): A test tényleges pályáján a HATÁS minimális (esetleg maximum) , de mindenképpen szélső-érték

„A legkisebb hatás elve”

Ha „variáljuk” a pályát, akkor azt találjuk, hogy a tényleges pályán a hatás a legkisebb, azaz a hatás variációja nulla.

$$\delta S [\mathbf{r}(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

Két kezdeti feltétel helyett (induló helyzet és sebesség vektorok), rögzítjük a pálya kezdő $\mathbf{r}(t_1)$ és $\mathbf{r}(t_2)$ végpontjának helyvektorát.



A kijelölt két pont között minden lehetséges pályára kiszámítjuk a hatást. A legkisebb hatáshoz tartozik a test tényleges pályája.

Az állítás bizonyítása (Proof of Proposition):

Tekintsünk egy adott pályát $\mathbf{r}(t)$

Hogyan változik a hatás, ha a pályát kissé módosítjuk?

$$\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t) + \delta \mathbf{r}(t),$$

Vigyázzunk arra, hogy a kezdő és végpont helyén maradjon

$$\delta \mathbf{r}(t_1) = \delta \mathbf{r}(t_2) = 0$$

$$S[\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - 2 \dot{\mathbf{r}} \delta \dot{\mathbf{r}} + \delta \dot{\mathbf{r}}^2 - U_{\text{pot}}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \right] dt,$$

$$U_{\text{pot}}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = U_{\text{pot}}(\mathbf{r}) + \nabla U_{\text{pot}} \delta \mathbf{r} + O[\delta \mathbf{r}^2].$$

$$\delta S \equiv S[\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}] - S[\mathbf{r}] = \int_{t_1}^{t_2} [m \dot{\mathbf{r}} \delta \dot{\mathbf{r}} - \nabla U_{\text{pot}} \delta \mathbf{r} + \dots] dt = \int_{t_1}^{t_2} [-m \ddot{\mathbf{r}} - \nabla U_{\text{pot}}] \delta \mathbf{r} dt + \cancel{m \dot{\mathbf{r}} \delta \mathbf{r} \Big|_{t_1}^{t_2}}.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [-m \ddot{\mathbf{r}} - \nabla U_{\text{pot}}] \delta \mathbf{r} dt = 0 \leftrightarrow m \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U_{\text{pot}}.$$

Nulla, mert a végpontok rögzítettek

A hatás akkor és csak akkor extremum, ha a pálya kielégíti a Newton mozgástörvényt Q.e.d.

Az állítás bizonyítása (Proof of Proposition):

Tekintsünk egy adott pályát $\mathbf{r}(t)$

Hogyan változik a hatás, ha a pályát kissé módosítjuk?

$$\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t) + \delta \mathbf{r}(t),$$

Vigyázunk arra, hogy a kezdő és végpont helyén maradjon

$$\delta \mathbf{r}(t_1) = \delta \mathbf{r}(t_2) = 0$$

$$S[\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}}^2 - 2\dot{\mathbf{r}}\delta\dot{\mathbf{r}} + \delta\dot{\mathbf{r}}^2) - U_{\text{pot}}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \right] dt,$$

$$U_{\text{pot}}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = U_{\text{pot}}(\mathbf{r}) + \nabla U_{\text{pot}} \delta \mathbf{r} + \mathcal{O}[\delta \mathbf{r}^2].$$

$$\delta S \equiv S[\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}] - S[\mathbf{r}] = \int_{t_1}^{t_2} [m\dot{\mathbf{r}}\delta\dot{\mathbf{r}} - \nabla U_{\text{pot}} \delta \mathbf{r} + \dots] dt = \int_{t_1}^{t_2} [(-m\ddot{\mathbf{r}} - \nabla U_{\text{pot}}) \delta \mathbf{r}] dt + \cancel{[m\dot{\mathbf{r}}\delta\mathbf{r}]_{t_1}^{t_2}}.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [(-m\ddot{\mathbf{r}} - \nabla U_{\text{pot}}) \delta \mathbf{r}] dt = 0 \leftrightarrow m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U_{\text{pot}}. \quad \begin{array}{l} \text{Nulla, mert a} \\ \text{végpontok rögzítettek} \end{array}$$

A hatás akkor és csak akkor extremum, ha a pálya kielégíti a Newton mozgástörvényt Q.e.d.

Variációszámítás

Határozzuk meg azt az $y = y(x)$ függvényt, amelyre az integrál („functional”) $I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ szélső értéket vesz fel.

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Functionals to be extremized	Euler equations
$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$	$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$
$I = \int_V F\left(x_1, x_2, x_3, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3$	$\frac{\partial F}{\partial u} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial (\partial u / \partial x_i)} = 0.$

Egyetlen szabadon mozgó pontszerű test analitikus mechanikája

Szabadon mozgó test: 3 dimenzió $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$

Konfigurációs tér: q_1, q_2, q_3 $q_1 = r, q_2 = \vartheta, q_3 = \varphi$

„Általános koordináták”

Pálya: minden időpillanatban egy „pont” a konfigurációs térben

Lagrange függvény: Kinetikus – Potenciális energia

$$L = E_{kin}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) - E_{pot}(q_1, q_2, q_3)$$

Hatás (Action) $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$

A legkisebb hatás elve (Hamilton elv)

Lagrange mozgásegyenletek
(3 másodrendű diff. egyenlet) $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$

Lagrange függvény (Lagrangian) $L = E_{kin} - E_{pot}$

Lagrange mozgásegyenletek
(3 másodrendű diff. egyenlet)

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

„Általános lendület”
(Generalized momentum)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, 2, 3$$

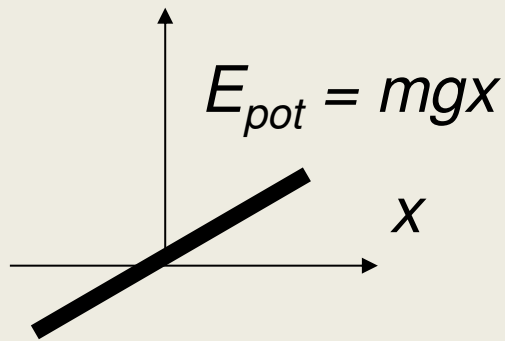
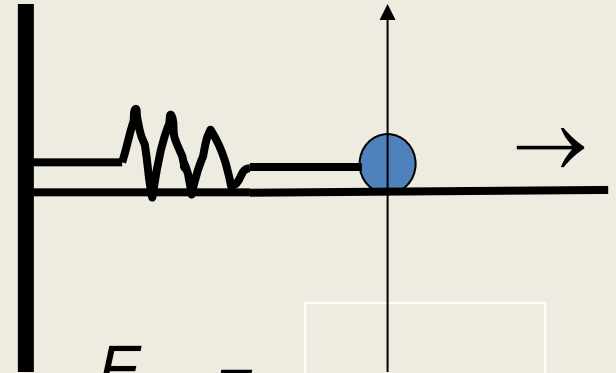
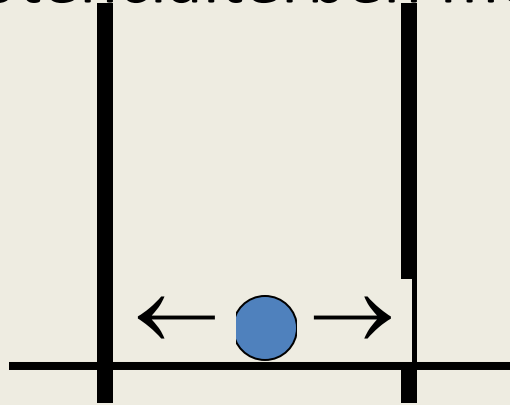
Hamilton függvény (Hamiltonian)

$$H = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i p_i - L$$

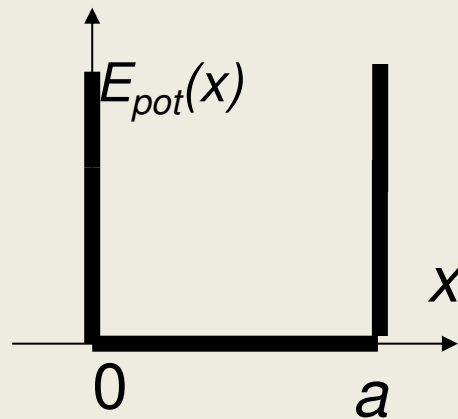
Hamilton – féle kanonikus mozgásegyenletek
(6 elsőrendű diff. egyenlet)

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

Egydimenziós potenciáltérben mozgó pontszerű test

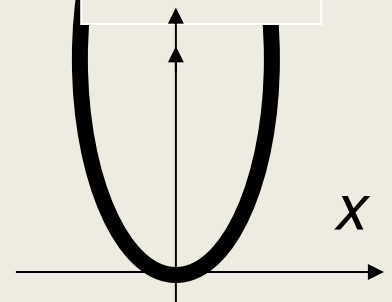


Konstans erő



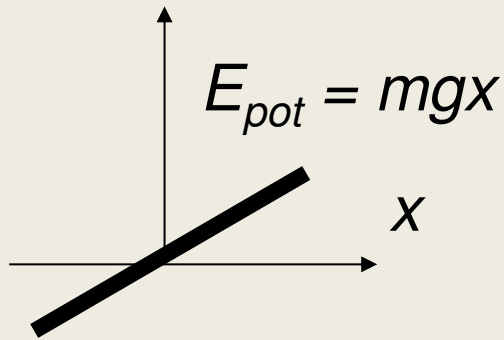
Dobozban pattogó részecske

$$E_{pot} = 0.5 k \cdot x^2$$



Harmonikus oszcillátor

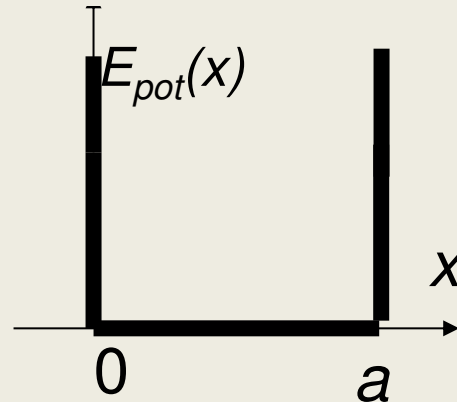
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad L = E_{kin} - E_{pot}$$



$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx$$

$$m\ddot{x} = -mg$$

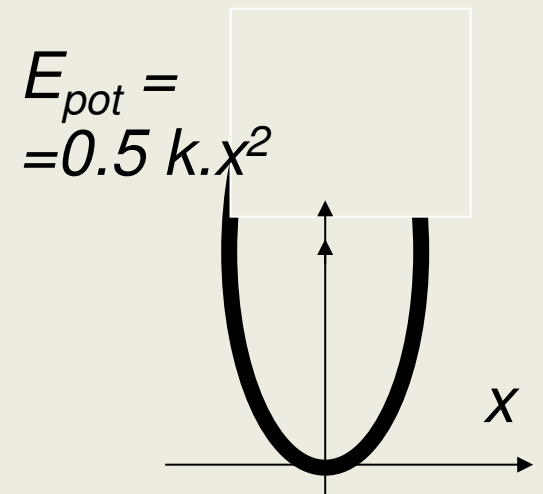
$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$



$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$x = x_0 \pm v_0 t$$



$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

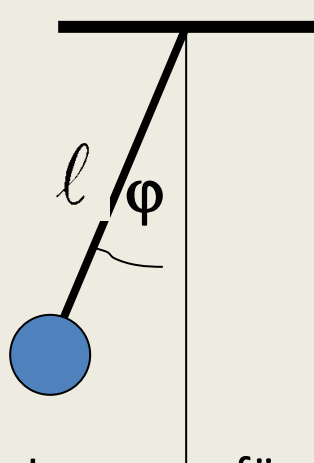
$$m\ddot{x} = -k \cdot x$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot x \quad \omega = \sqrt{k / m}$$

$$x = x_0 \cos \omega \cdot t$$

Kényszerpályán mozgó pontszerű testek

Síkinga mozgásegyenletei



Általános koordináta φ

Kinetikus energia $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2$

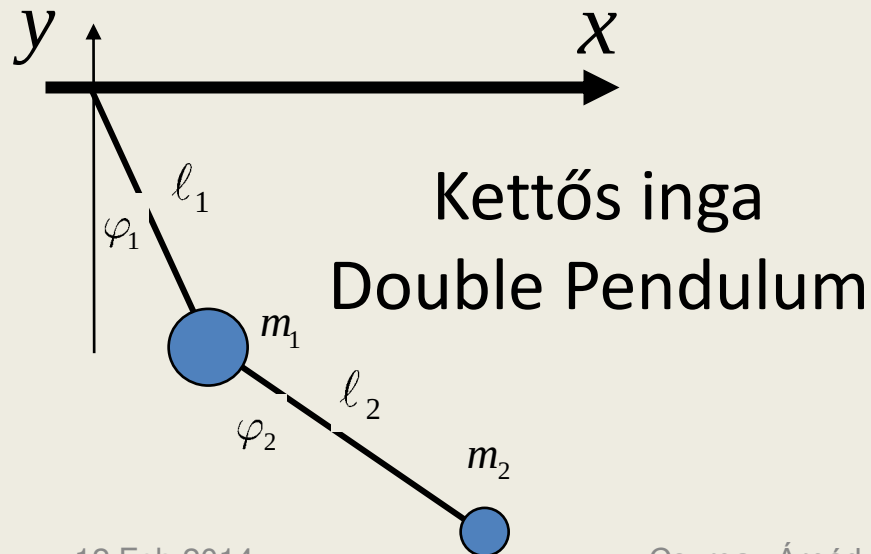
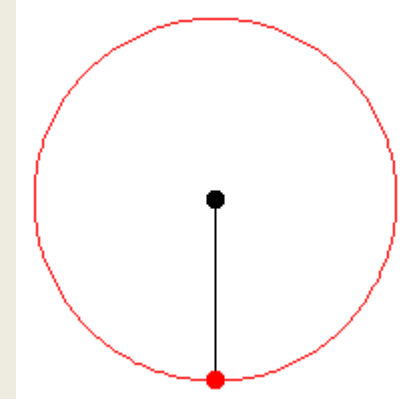
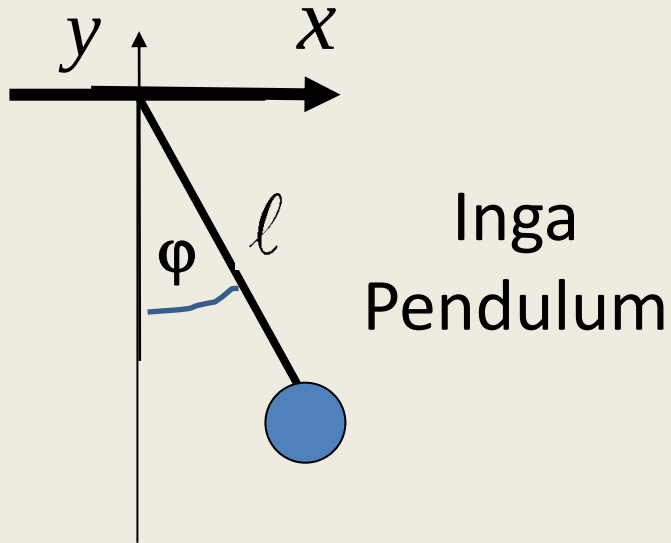
Potenciális energia $E_{pot} = mg\ell(1 - \cos \varphi)$

Lagrange függvény: $L = E_{kin} - E_{pot} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 - mg\ell(1 - \cos \varphi)$

Lagrange-Euler mozgásegyenlet : $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, f$

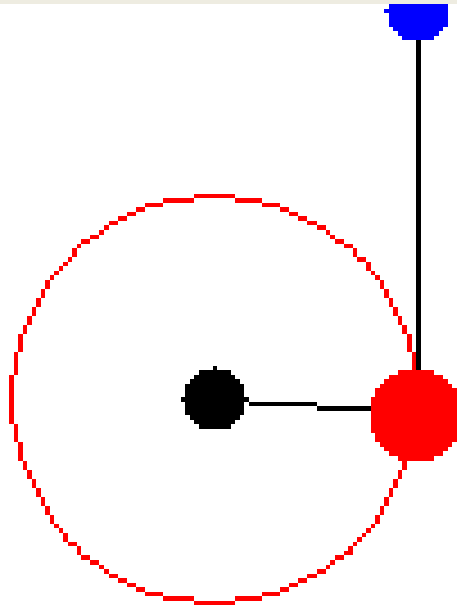
$$\cancel{m\ell^2}\ddot{\varphi} + \cancel{mg\ell}\sin \varphi = 0 \rightarrow \ell \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$$

Kényszerpályán mozgó testek mechanikája



Merev test
Rigid body

Rugalmas test
Elastic body



Gyro_Adam_csurgay_ea_v2.wmv

Ellenőrző kérdések 2.

A mechanika elvei (A legkisebb hatás elve)

1. Ismertesse a variációszámítás alapfeladatát egyváltozós függvények esetére!
2. Ismertesse a variációszámítás Euler-Lagrange egyenletét
3. A variációszámítás alkalmazásával határozza meg két pont közötti legrövidebb utat!
4. Ismertesse a mechanika Hamilton elvét!
5. Mutassa meg, hogy egy tömegpont esetén a Hamilton elvből levezethető a Newton mozgásegyenlet!
6. Ismertesse a Lagrange féle mozgásegyenleteket
7. Ismertesse a Hamilton féle mozgásegyenleteket
8. Írja fel a egyszerű inga nemlineáris mozgásegyenletét tetszőleges kitérés esetére!
9. Ismertesse a Lagrange és Hamilton mozgásegyenleteket f szabadságfokú mechanikai rendszerek esetére!
10. Írja fel a kettős inga nemlineáris mozgásegyenletét tetszőleges kitérés esetére!

A mozgásegyenlet igen nagy sebességnél

Test lendülete (momentum) $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$

- tehetetlen tömeg = gravitáló tömeg = tömeg
- a tömeg függ a sebességtől (Relativisztikus mechanika)

$$m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad v = |\mathbf{v}|$$

Newton mozgástörvénye igen nagy sebességek esetén

$$\frac{d m \mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \rightarrow m_0 \frac{d \left(1 - v^2 / c^2\right)^{-1/2} \cdot \mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

Ha a sebesség $v \ll c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$$m \frac{d \mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

$m = \text{állandó}$ 18

Relativisztikus pont-mechanika

$$\frac{d m \mathbf{v}}{d t} = m_0 \frac{d \left(1 - (v / c)^2 \right)^{-1/2} \cdot \mathbf{v}}{d t} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Nemlineáris mozgásegyenlet (differenciál-egyenlet)

A sztatikus erőter a testet mozgatva munkát végez

$$m c^2 - m_0 c^2 = q (U_2 - U_1)$$

Elektronvolt eV

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As} ; \quad q_{\text{electron}} = -e ;$$

$$1 \text{ eV} = 1e \cdot 1 \text{ V} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ VAs (Ws)}$$

U feszültséggel gyorsított részecske végsebessége

Tetszőleges végsebesség esete

Kinetikus energia $E_{kin} = mc^2 - m_0c^2$

Nulla kezdősebesség esetén $E_{kin} = qU$

$$E_{kin} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} c^2 - m_0c^2 = qU$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 = \frac{qU}{m_0c^2} \quad \rightarrow v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + qU / m_0c^2\right)^2}}$$

$$E_{kin} = mc^2 - m_0c^2$$

Ha a sebesség $v \ll c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$$E_{kin} = mc^2 - m_0c^2 \rightarrow \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} c^2 - m_0c^2 \quad \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}(v/c)^2$$

$$E_{kin} = mc^2 - m_0c^2 \rightarrow \approx m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2}(v/c)^2 \right) - m_0c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Mekkora feszültséggel kell egy elektront gyorsítanunk, ahhoz hogy tömege megkétszereződjön?

$$2m_0c^2 - m_0c^2 = qU \rightarrow U = \frac{m_0c^2}{e} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ Ws}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 0.511 \cdot 10^6 \text{ V}$$

Elektron nyugalmi energiája

$$m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m_0 c^2 = 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 81.9 \cdot 10^{-15} \text{ Ws}$$

$$1 \text{ eV} = 1e \cdot 1 \text{ V} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ VAs (Ws)}$$

$$m_0 c^2 = 81.9 \cdot 10^{-15} \text{ Ws} \cong 0.511 \cdot 10^6 \text{ eV} \cong 0.5 \text{ MeV}$$

Elektronok, protonok, iónok mozognak
vákuumban elektromágneses térben

$$\frac{d m \mathbf{v}}{d t} = q \mathbf{E} + q (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Lorentz féle erőtvény

Ellenőrző kérdések 3.

Részecske mozgása igen nagy sebességeknél

(Relativisztikus mechanika)

1. Határozza meg egy nulla kezdősebességű (m tömegű és q töltésű) részecske végsebességét, ha a részecskét tetszőlegesen nagy U feszültség gyorsította!
2. Határozza meg az elektron nyugalmi energiáját!
3. Határozza meg a proton és a neutron nyugalmi energiáját!
4. Mekkora feszültséggel gyorsított elektron tömege nő meg a nyugalmi tömeg kétszeresére?
5. Mekkora feszültséggel gyorsított proton tömege nő meg a nyugalmi tömeg k -szorosára?
6. Mekkora a számítás hibája, ha egy U feszültséggel gyorsított elektron végsebességét a relativisztikus hatás elhanyagolásával számítjuk ki $U=10$ kV, illetve $U=200$ kV esetén?
7. Hogyan érvényesül a tömeg – energia ekvivalencia égés esetén (pl. 1 kg szén elégetésekor)?
8. Mekkora energia szabadul fel egy elektron és egy pozitron egyesülésekor?

