

# 16.

fejezet

## Integrálás vektormezőben

**ÁTTEKINTÉS** Ez a fejezet integrálással foglalkozik vektormezőben. Ez a tematikának az a része, amit a mérnökök, fizikusok akkor használnak, amikor áramlásokat írnak le, vízalatti kábeleket terveznek, hőáramlást magyaráznak, műholdat helyeznek pályára. Definiálunk vonalintegrált, amit erőter által végzett munka kiszámítására használunk. Definiálunk felületmenti integrált, amivel egy adott felületen átáramló folyadék mennyiségét tudjuk kiszámítani. Közben olyan fogalmakkal ismerkedünk meg, mint pl. *konzervatív erőter*, Green-tétel, hogy számításainkat olykor egyszerűsíthessük. Ezeket az új integrálokat a már ismert egyszerű és többszörös integrálokra vezetjük vissza.

### 16.1.

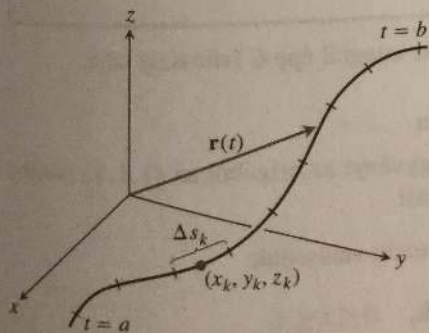
#### Vonalintegrál

Az 5. fejezetben definiáltuk egyváltozós valós függvény integrálját az  $x$ -tengely egy véges és zárt  $[a, b]$  intervallumán. A határozott integrálokat sok különböző feladat megoldásához használtuk, területszámításon kívül pl. változó sűrűségű vékony, egyenes rúd tömegének meghatározásához, munka kiszámításához, amikor az erő az  $x$ -tengely irányában hatott stb. Hogyan számolnánk ki egy olyan változó sűrűségű vékony rúd vagy huzal tömegét, amely egy görbe mentén fut a térben, vagy hogyan számolnánk ki egy térbeli görbe mentén ható erő munkáját? Ezekhez a számításokhoz általánosítanunk kell az  $x$ -tengely egy „szakaszát” mentén vett integrált, a tér egy „görbedarabja” mentén vett integrálra. Ez az általánosabb fogalom a *vonalintegrál*. A „vonal”, azaz a görbe, ami mentén integrálunk, lehet térgörbe vagy síkgörbe. A rövidebb tárgyalás kedvéért a síkgörbéket egyszerűen olyan térgörbéknek tekintjük, amelyeknek harmadik koordinátája azonosan nulla.

Tegyük fel, hogy  $f(x, y, z)$  egy valós értékű függvény, amit az  $f$  értelmezési tartományában futó  $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$  görbe mentén szeretnénk integrálni az  $a \leq t \leq b$  paraméterértékekre. Az  $f$  függvény értékeit a görbe mentén az  $f(g(t), h(t), k(t))$  összetett függvény definiálja. Ezt az összetett függvényt integráljuk az ívhossz szerint  $t = a$ -tól  $t = b$ -ig. Ha a görbe ívhossza nem véges, akkor ez egy improprius integrál. A definícióhoz tekintsünk egy véges ívhosszú (más szóval rektifikálható) görbét. Osszuk fel a görbét  $n$  darab részívre (16.1. ábra), és a  $k$ -adik ív ívhosszát jelölje  $\Delta s_k$ . Mindegyik részíven válasszunk egy  $(x_k, y_k, z_k)$  pontot, és tekintsük az

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k$$

integrálközelítő összeget. A felosztás normáját és az integrál létezését ugyanúgy definiáljuk, mint a Riemann-integrál esetében. Az integrálközelítő összegek



**16.1. ÁBRA** Az  $\mathbf{r}(t)$  görbét felosztjuk kis ívekre  $t = a$ -tól  $t = b$ -ig. A  $k$ -adik részív hossza  $\Delta s_k$ .

határértékét az  $f$  függvény vonalintegráljának nevezzük az adott görbe mentén  $a$ -tól  $b$ -ig. Erre az integrálra is, és más, hasonlóképpen definiált integrálokra is az irodalomban több különböző elnevezés használatos: **görmementi integrál**, **vonalmementi integrál**, **vonalintegrál**. Az irodalomban van, aki egyáltalán nem tesz különbséget az elnevezések között, és van aki aszerint tesz különbséget, hogy a görbe irányítása befolyásolja-e az integrálás eredményét. Az, hogy a  $C$  görbe felett, vagy a  $C$  görbe mentén integrálunk, szintén ugyanazt jelenti. A görbedarabot, ami mentén integrálunk, és amit az irányításával együtt tekintünk, az **integrál útjának** nevezzük. Ha  $f$  folytonos, és a  $g$ ,  $h$  és  $k$  függvényeknek a zárt  $[a, b]$  intervallumban folytonos deriváltjai vannak, akkor az integrál létezik. Ha a görbét egyetlen betűvel jelöljük, pl.  $C$ -vel, akkor az integrál jelölése

$$\int_C f(x, y, z) ds \quad f \text{ integrálja a } C \text{ görbe felett.} \quad (16.1)$$

Ha  $\mathbf{r}(t)$  egy sima görbe az  $a \leq t \leq b$  paramétertartományon ( $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  folytonos és sehol sem  $\mathbf{0}$ ), akkor az

$$s(t) = \int_a^b |\mathbf{v}(\tau)| d\tau \quad \begin{array}{l} \text{A 13.3. alfejezet (13.17) egyenlete} \\ t_0 = a \text{ helyettesítéssel} \end{array}$$

egyenlőséget felhasználhatjuk  $ds$  kifejezésére:  $ds = |\mathbf{v}(t)| dt$ . Egy általunk nem bizonyított tétel szerint  $f$  integrálja a  $C$  görbén

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |\mathbf{v}(t)| dt.$$

Vegyük észre, hogy az egyenlőség jobb oldalán egy közösleges egyváltozós integrál áll, amelyet az 5. fejezetben definiáltunk. Ez a képlet a baloldali integrál helyes értékét adja, függetlenül attól, milyen paraméterezést választottunk, természetesen olyat, ami „sima” paraméterezés.

#### A vonalintegrál kiszámítása

Ha ki akarjuk számítani  $f(x, y, z)$  integrálját egy  $C$  görbe mentén, akkor:

1. Keressük meg  $C$ -nek egy sima paraméterezését,

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

2. Számítsuk ki az

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) |\mathbf{v}(t)| dt \quad (16.2)$$

integrált.

Ha  $f$  az azonosan 1 függvény, akkor az integrál épp  $C$  ívhosszát adja.

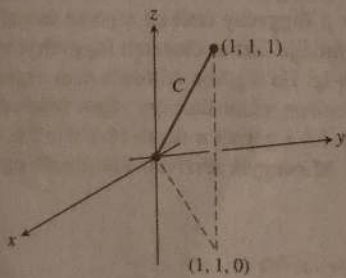
#### 1. PÉLDA Vonalmementi integrál kiszámítása

Integráljuk az  $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$  függvényt az origóból az  $(1, 1, 1)$  pontba menő egyenes szakasz mentén (16.2. ábra)!

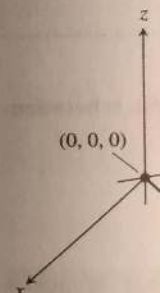
**Megoldás.** A legegyszerűbb paraméterezést választjuk:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

A koordinátafüggvényeknek folytonos első deriváltjaik vannak, és a deriváltfüggvényre  $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ , tehát sehol sem 0, így ez egy sima paraméterezés. A  $C$  menti integrál



16.2. ÁBRA Az 1. példa integrálási útja.



16.3. ÁBRA útja.

$$\begin{aligned} \int_C f(x,y,z) ds &= \int_0^1 f(t,t,t) (\sqrt{3}) dt && (16.2) \text{ egyenlőség} \\ &= \int_0^1 (t-3t^2+t)\sqrt{3} dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (2t-3t^2) dt = \sqrt{3} [t^2-t^3]_0^1 = 0. \quad \square \end{aligned}$$

## Additivitás

A vonalintegrálok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy ha a görbe véges sok egymáshoz csatlakozó  $C_1, C_2, \dots, C_n$  görbedarabból áll, akkor az integrál  $C$  felett a részíveken vett integrálok összege:

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \dots + \int_{C_n} f ds \quad (16.3)$$

### 2. PÉLDA Vonalintegrál két csatlakozó görbeíven

A 16.3. ábrán egy másik utat mutatunk az origóból az  $(1, 1, 1)$  pontba, mint az előbbi ábrán. Integráljuk az  $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$  függvényt  $C_1 \cup C_2$  fölött!

**Megoldás.** A legegyszerűbb paraméterezését választjuk  $C_1$ -nek és  $C_2$ -nek:

$$C_1: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$C_2: \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1.$$

Ezzel a paraméterezéssel

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(x,y,z) ds = \int_{C_1} f(x,y,z) ds + \int_{C_2} f(x,y,z) ds \quad (16.3) \text{ egyenlőség}$$

$$= \int_0^1 f(t,t,0)\sqrt{2} dt + \int_0^1 f(1,1,t)(1) dt \quad (16.2) \text{ egyenlőség}$$

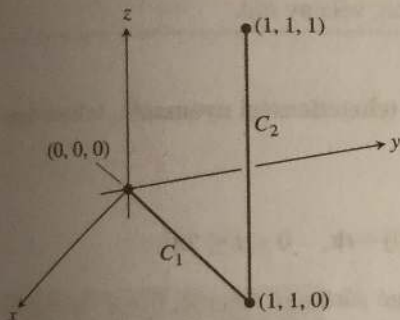
$$= \int_0^1 (t-3t^2+0)\sqrt{2} dt + \int_0^1 (1-3+t)(1) dt$$

$$= \sqrt{2} \left[ \frac{t^2}{2} - t^3 \right]_0^1 + \left[ \frac{t^2}{2} - 2t \right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}. \quad \square$$

Néhány dolgot vegyünk észre ezekben a példákban. Először: Mihelyt a görbe koordinátafüggvényeit behelyettesítettük az  $f$  függvénybe, már egy közös integrálunk van  $t$ -re. Másodszor: A két különböző görbén,  $C$ -n (1. példa) és  $C_1 \cup C_2$ -n (2. példa), az integrál értéke különböző. A legtöbb függvény esetén két adott pontot összekötő görbe mentén számított integrál értéke különböző görbéken különböző. Vannak olyan függvények, amelyek integrálja két pont között nem függ a görbétől, ezekről a 16.3. alfejezetben lesz szó.

## Tömeg és nyomaték számítása

Spirálrugót vagy huzalt tekinthetünk úgy, mint sima görbe mentén eloszló tömeget a térben. A sűrűség eloszlását egy folytonos  $\delta(x,y,z)$  (tömeg/hosszúság-egység) függvény adja meg. A rugó, ill. huzal tömege és momentumai a 16.1. táblázat képletei szerint számíthatók. Ezek az eredmények vékony rudakra is alkalmazhatók.



16.3. ÁBRA A 2. példa integrálási útja.

Tömeg:  $M = \int_C \delta(x,y,z) ds$  ( $\delta = \delta(x,y,z) =$  sűrűség)

Statikai nyomatékok (első momentumok) a koordinátasíkokra vonatkoztatva:

$$M_{yz} = \int_C x\delta ds, \quad M_{xz} = \int_C y\delta ds, \quad M_{xy} = \int_C z\delta ds$$

A tömegközéppont koordinátái:

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \quad \bar{y} = M_{xz}/M, \quad \bar{z} = M_{xy}/M$$

Tehetlenségi nyomatékok a koordinátatengelyekre és más egyenesekre vonatkoztatva:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\delta ds, \quad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\delta ds,$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta ds, \quad I_L = \int_C r^2\delta ds,$$

ahol  $r(x,y,z)$  az  $(x,y,z)$  pont távolsága az  $L$  egyenestől.

A tehetlenségi sugár az  $L$  egyenesre vonatkoztatva:  $R_L = \sqrt{I_L/M}$

16.1. TÁBLÁZAT Tömeg és momentumképletek egy  $C$  sima görbe mentén eloszló tömegre, mint pl. spirálrugó, huzal, vékony rúd.

3. PÉLDA Tömeg, tömegközéppont, tehetlenségi nyomaték, tehetlenségi sugár meghatározása

Egy spirálrugó az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 4t)\mathbf{i} + (\sin 4t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

csavarvonal mentén helyezkedik el. A rugó sűrűsége állandó,  $\delta = 1$ . Mennyi a rugó tömege, hol a tömegközéppontja, mennyi a tehetlenségi nyomatéka és mekkora a tehetlenségi sugara a  $z$ -tengelyre vonatkoztatva?

Megoldás. Felvázoljuk a rugót (16.4. ábra). A szimmetriatulajdonságokat figyelembe véve a tömegközéppont a  $z$ -tengelyen van, a  $(0, 0, \pi)$  pontban.

A további számításokhoz meg kell határoznunk  $|\mathbf{v}(t)|$ -t:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(-4\sin 4t)^2 + (4\cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17}.$$

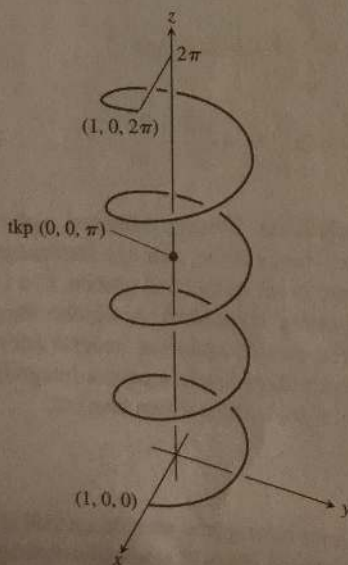
Ezután a 16.1. táblázat képletei alapján számolunk:

$$M = \int_{\text{csavarvonal}} \delta ds = \int_0^{2\pi} (1)\sqrt{17} dt = 2\pi\sqrt{17}$$

$$I_z = \int_{\text{csavarvonal}} (x^2 + y^2)\delta ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t)(1)\sqrt{17} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{17} dt = 2\pi\sqrt{17}$$

$$R_z = \sqrt{I_z/M} = \sqrt{2\pi\sqrt{17}/(2\pi\sqrt{17})} = 1.$$



16.4. ÁBRA A 3. példában szereplő spirálrugó.

16.5. ÁBRA  
fémív.

16.1.  
Térgör

Feleltessük  
(a)-(h) ábrá

(a)

(c)

Vegyük észre, hogy a tehetlenségi sugár a z-tengelyre vonatkoztatva éppen annak a hengernek a sugara, amire a csavarvonal felcsavarodik. □

#### 4. PÉLDA Ív tömegközéppontjának meghatározása

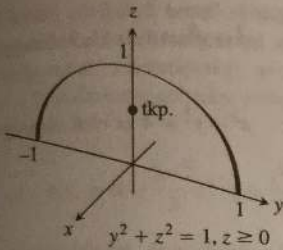
Egy vékony fémív, ami az aljánál nagyobb sűrűségű, mint fent, az  $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  félkör mentén fekszik az yz-síkban (16.5. ábra). Hol van az ív tömegközéppontja, ha a sűrűsége az  $(x, y, z)$  pontban  $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ?

**Megoldás.** Tudjuk, hogy  $\bar{x} = 0$  és  $\bar{y} = 0$ , mert az ív az yz-síkban fekszik, és a tömege a z tengelyre szimmetrikusan oszlik el.  $\bar{z}$  kiszámításához paraméterezzük a körívet:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Ezzel a paraméterezéssel a deriváltvektor

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1.$$



16.5. ÁBRA A 4. példában szereplő fémív.

A 16.1. táblázat alapján

$$M = \int_C \delta \, ds = \int_C (2 - z) \, ds = \int_0^\pi (2 - \sin t)(1) \, dt = 2\pi - 2$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_C z \delta \, ds = \int_C z(2 - z) \, ds = \int_0^\pi (\sin t)(2 - \sin t) \, dt = \\ &= \int_0^\pi (2 \sin t - \sin^2 t) \, dt = \frac{8 - \pi}{2} \end{aligned}$$

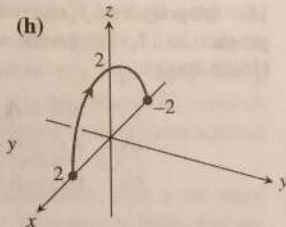
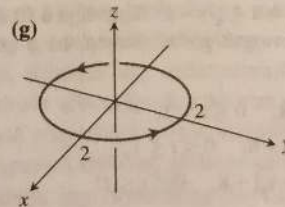
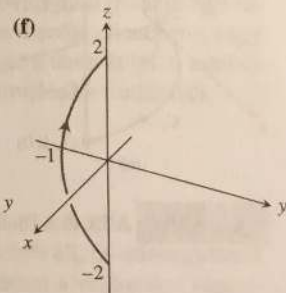
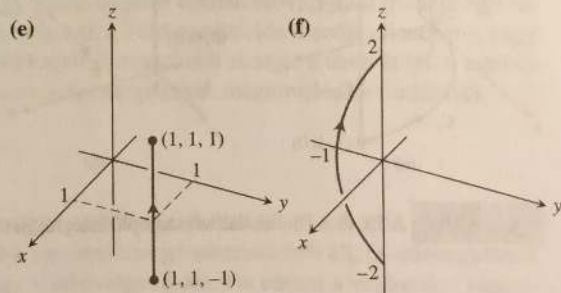
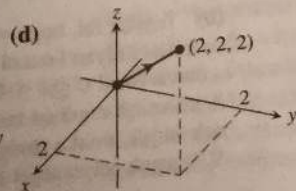
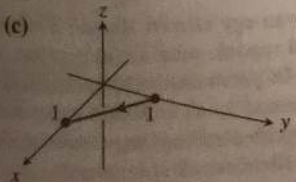
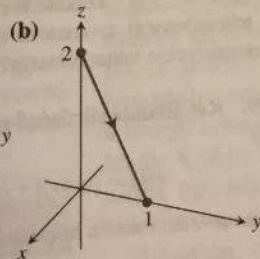
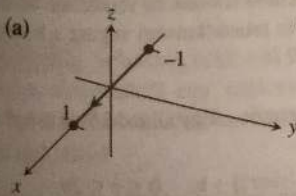
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} = \frac{8 - \pi}{4\pi - 4} \approx 0,57.$$

Két tizedesre kerekítve  $\bar{z} \approx 0,57$ , a tömegközéppont  $(0, 0, 0,57)$ . □

## 16.1. Feladatok

### Térgörbék vektoregyenletei

Feleltessük meg az 1–8. feladatokban megadott görbéket az (a)–(h) ábrákon láthatóakkal!



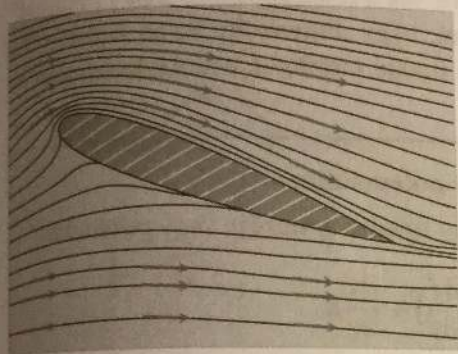
1.  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$
2.  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, -1 \leq t \leq 1$
3.  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$
4.  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}, -1 \leq t \leq 1$

$$36. f(x, y, z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}, \quad \mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + t^{5/2}\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

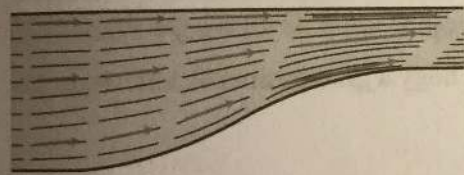
## 16.2.

## Vektormezők, cirkuláció, munka, áramlás

Amikor olyan jelenségeket tanulmányozunk, amelyek vektorokkal jellemezhetőek, akkor a korlátos, zárt intervallumok feletti integrálok helyett görbék vagy felületek mentén integrálunk. Ebben az alfejezetben görbék mentén vett integrálokkal foglalkozunk. Ilyen integrállal számítható pl. a munka amit egy test elmozdításával végzünk egy görbe mentén változó erővel (mint pl. amit egy rakéta úrbe való kilövésakor végzünk a Föld gravitációs mezője ellenében), vagy amit a vektortér végez, miközben egy részecskét mozgat a téren át (pl. a munka, amit egy gyorsítóban a részecskék energiájának megnövelésére fordítunk).



16.7. ÁBRA Sebességvektorok egy repülőgépszárny körül egy szélcsatornában. Az áramlás vonalait kerozinfüsttel tették láthatóvá.

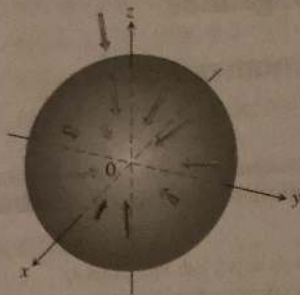


16.8. ÁBRA Az áramlási vonalak egy szűkülő csatornában. A szűk részen a víz felgyorsul, ezért a sebességvektorok hosszabbak.

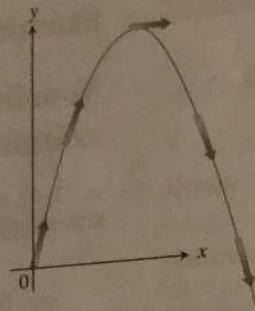
### Vektormezők

Tegyük fel, hogy a síknak vagy a térnek egy részét áramló folyadék tölti ki. Képzeljük úgy, hogy a folyadék sok kicsi mozgó részecskéből áll, és mindegyiknek minden pillanatban van egy  $\mathbf{v}$  sebességvektora. Ha ezeket a vektorokat képzeljük el, akkor a tér minden pontjához tartozik egy más-más irányú és más-más hosszúságú vektor. Így a mozgó folyadék definiál egy **vektormezőt**. A 16.7. ábrán a levegő sebességvektorait láthatjuk egy szélcsatornában egy repülőgépszárny körül. A 16.8. ábra áramló víz sebességvektorait mutatja egy beszűkülő csatornában. Egy adott testre ható gravitációs erőt is szemléltethetünk vektormezővel (16.9. ábra), vagy akár mágneses erőteret, elektromos erőteret is.

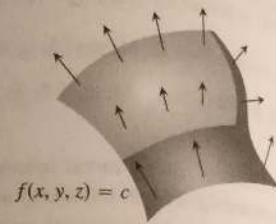
Általában, **vektormezőnek** egy olyan függvényt nevezünk, ami a sík vagy a tér egy tartományának pontjaihoz vektorokat rendel. (Ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a vektormező helyvektorokhoz rendel vektorokat, tehát egy vektor-vektor függvény.) A vektormezőt a fizikában, ill. a mérnöki gyakorlatban szokás még **erőtérnek**, **áramlási mezőnek** stb. is nevezni, attól függően, milyen tulajdonságát akarjuk inkább hangsúlyozni. Ha a háromdimenziós tér pontjaihoz rendelünk háromdimenziós vektorokat, és a térben már rögzítve van egy derékszögű koordináta-rendszer a szokásos  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  alapvektorokkal, akkor a vektormezőt a



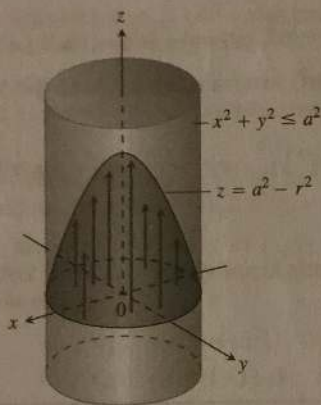
16.9. ÁBRA A gravitációs vektormező vektorai a tér forrása felé mutatnak, vagyis a teret létrehozó tömeg felé.



16.10. ÁBRA Egy hajítás  $v(t)$  sebességvektorai vektormezőt definiálnak a pályagörbe mentén.



16.11. ÁBRA A  $\nabla f$  gradiensmező egy  $f(x, y, z) = c$  felületen.



16.12. ÁBRA Folyadék áramlása egy hosszú hengerszerű csőben. A  $v = (a^2 - r^2)k$  vektorok kezdőpontjai a hengerben az  $xy$ -síkon vannak, végpontjuk  $z = a^2 - r^2$  paraboloidon.

következésképpen adhatjuk meg:

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Az  $M, N, P$  skalár függvények a vektormező **koordinátafüggvényei** (más szóval **komponensfüggvényei** vagy **komponensei**  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  irányában). A vektormező **folytonos**, ha a koordinátafüggvényei folytonosak, és **differenciálható**, ha a koordinátafüggvényei differenciálhatóak. A kétdimenziós vektormezőket hasonlóan adhatjuk meg:

$$F(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}.$$

Egy hajítás pályagörbéjének minden pontjához hozzárendelhetjük a sebességvektort. Egy skalár függvény értelmezési tartományának minden olyan pontjához hozzárendelhetjük a gradiensvektort, ahol az létezik. Ilyen függvények illusztrációit láthatjuk a 16.10–16.15. ábrákon.

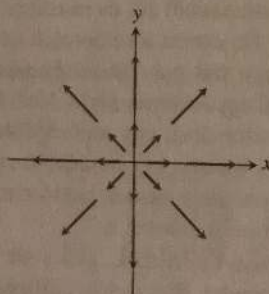
Megfigyelhetjük, hogy a szokásos ábrázolása ezeknek a függvényeknek eltér attól, ahogy eddig függvényeket ábrázoltunk. Itt a független változó vektor (pont helyvektora), és ennek a végéhez illesztjük a függvényérték-vektor kiindulópontját. (Ha a sík pontjaihoz kétdimenziós vektorokat rendelve „hagyományos” módon akarnánk a függvényt szemléltetni, négy dimenzióra lenne szükség. Az itt alkalmazott szemléltetés jól kifejezi a fizikai tartalmat, és tulajdonképpen ez a szemléltetés egyik legfőbb célja.)

**DEFINÍCIÓ Gradiensmező (vagy potenciáltér)**

Egy differenciálható  $f(x, y, z)$  függvény **gradiensmezője** vagy **potenciáltere** a

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

gradiensvektort rendeli az  $(x, y, z)$  ponthoz.



16.13. ÁBRA A sugaras vektormező  $F = xi + yj$ . Figyeljük meg a jelölésbeli konvenciót: a vektor kiindulópontja van abban a pontban, ahol  $F$ -et számoljuk.

**1. PÉLDA Gradiensmező meghatározása**

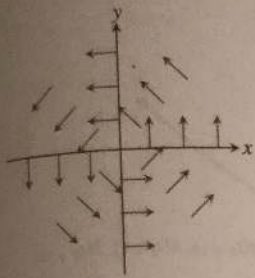
Adjuk meg az  $f(x, y, z) = xyz$  függvény gradiensmezőjét (potenciáltérét)!

**Megoldás.** Az  $f$  függvény gradiensmezője  $F = \nabla f = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ . □

Látni fogjuk a következő alfejezetben, hogy a gradiensmezők különleges szerepet játszanak a mérnöki gyakorlatban.

**Erő által végzett munka egy görbe mentén a térben, görbementi integrál**

Tegyük fel, hogy az  $F = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$  vektormező, azaz erőter képviseli az erőt a tér egy tartományán (pl. gravitációs mező vagy elekt-

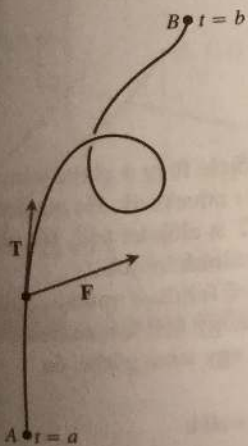


16.14. ÁBRA Egységvektorok „forgó” vektormezője:  
 $F = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) / (x^2 + y^2)^{1/2}$ .  
 A mező nincs definiálva az origóban.



A szél sebessége, m/s  
 0 2 4 6 8 10 12 14 16+

16.15. ÁBRA NASA Seasat műholdja radarral 350 000 szélmerést végzett az óceánok felett. A nyilak az irányt mutatják, a hosszuk pedig a szél sebességére utal. Érdekes megfigyelni a komoly vihart Grönland déli részénél.



romágneses mező), és az

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

egy sima görbe a tartományban. Ekkor az  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$  skalárszorzat az  $\mathbf{F}$  komponense a görbe egységnyi hosszú, érintőirányú vektorának irányában. Az  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$  integrálját a görbén az  $\mathbf{F}$  erőter munkájának hívjuk a görbe mentén, az  $a$  és  $b$  paraméterértékek között.

**DEFINÍCIÓ Munka sima görbe mentén**

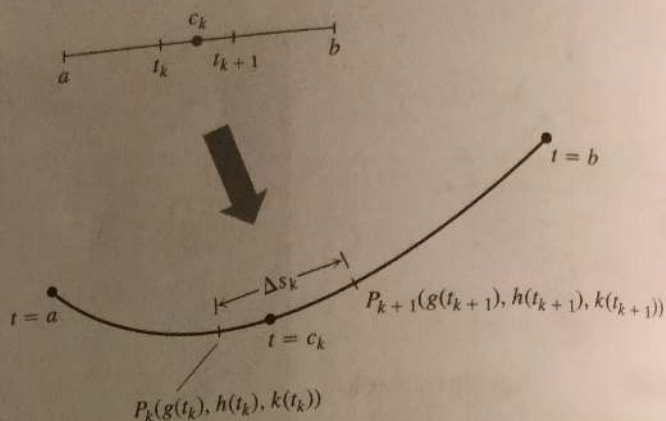
Az  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  erőter által végzett munka az  $\mathbf{r}(t)$  sima görbe mentén  $t = a$ -tól  $t = b$ -ig

$$W = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds. \quad (16.4)$$

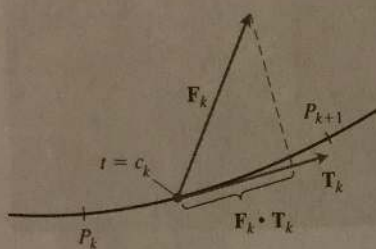
16.16. ÁBRA Az  $\mathbf{F}$  erő által végzett munka az  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$  skalárfüggvény integrálja a görbe mentén A-tól B-g.

Hasonlóképpen magyarázzuk a (16.4) egyenlőséget, mint azt tettük a 6. fejezetben a  $W = \int_a^b F(x)dx$  képlet levezetésénél. A munka az erőnek az út irányába eső nagysága szorozva az út hosszával. A rektifikálható (véges ívhosszal rendelkező) görbét rövid részívekre osztjuk, és egy-egy ilyen darabon, az erőter konstansnak feltételezve, számítjuk a munkát minden kis részíven, majd összeadjuk ezeket. A munka ezeknek az integrálközelítő összegeknek a határértéke lesz, ahogy a részívek hossza tart a nullához, és így számuk a végtelenhez. Sima görbe esetén a felosztást úgy is csinálhatjuk, hogy az  $[a, b]$  paraméterintervallumot osztjuk fel, és így minden osztóponthoz a paramétertartományban a görbén is tartozik egy osztópont, tehát a paraméterintervallum egy felosztása létrehozza





16.17. ÁBRA Minden felosztása az  $[a, b]$  paramétertartomány-nak egy felosztást indukál a  $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$  görbén.



16.18. ÁBRA A 16.17. ábra  $P_k P_{k+1}$  görbeívének kinagyított képe. Mutatja az egységnyi hosszúságú érintővektort és az erőt is a  $t = c_k$  paraméterű pontban.

(más szóval indukálja) a görbeív egy felosztását. Ezután a  $[t_k, t_{k+1}]$  paraméter-intervallumon választunk egy  $c_k$  pontot. Az  $\mathbf{r}(t_k)$  helyvektor hegye a  $P_k$  pontba mutat, és  $\Delta s_k$  a  $P_k P_{k+1}$  ív ívhossza (16.17. ábra).

Ha  $\mathbf{F}_k$  jelöli  $\mathbf{F}$  helyettesítési értékét a görbe  $t = c_k$  paraméterű pontjában, és  $\mathbf{T}_k$  jelöli a görbe egységnyi hosszú érintővektorát ebben a pontban, akkor  $\mathbf{F}$ -nek  $\mathbf{T}$  irányú komponense  $t = c_k$ -nál  $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k$ . Így az  $\mathbf{F}$  erő által végzett munka a  $P_k P_{k+1}$  ívdarab mentén körülbelül

$$\left( \begin{array}{l} \text{Erő komponense a} \\ \text{mozgás irányában} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{l} \text{megtett} \\ \text{távolság} \end{array} \right) = \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k.$$

A végzett munka egy közelítése a görbe mentén  $t = a$ -tól  $t = b$ -ig

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k.$$

Ahogy a felosztás normája  $[a, b]$ -n nullához tart, a görbén indukált felosztás normája is nullához tart és az összegek az

$$\int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

integrálhoz tartanak. Az így kiszámított érték előjele függ a görbe irányításától, azaz attól, hogyan haladunk a görbén, miközben  $t$  növekszik. Ha megfordítjuk a mozgás irányát, megfordítjuk  $\mathbf{T}$  irányát, így  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$  is előjelet vált. Ha zárt görbe mentén integrálunk, akkor az integrált **körintegrálnak** hívjuk.

A 16.2. táblázat a (16.4) egyenlet hat különböző felírását mutatja. Különböző kinézetük ellenére a 16.2 táblázat képleteit ugyanúgy kell kiszámítani. A táblázatban  $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  egy sima görbe, és

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = dg\mathbf{i} + dh\mathbf{j} + dk\mathbf{k}$$

a differenciálja.

### Munka kiszámítása integrállal

Ahhoz, hogy a végzett munkát kiszámoljuk egy sima görbe mentén, a következő lépéseket kell végrehajtanunk:

1. fejezzük ki  $\mathbf{F}$ -et a görbén, mint a  $t$  paraméter függvényét,
2. határozzuk meg  $d\mathbf{r}/dt$ -t,
3. integráljuk az  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$  kifejezést  $t = a$ -tól  $t = b$ -ig!

$W = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$	A definíció
$= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	Differenciál alak
$= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$	Kifejtve, hogy tartalmazza $dt$ -t, hangsúlyozza a $t$ paramétert, és a $d\mathbf{r}/dt$ sebességvektort
$= \int_a^b \left( M \frac{dg}{dt} + N \frac{dh}{dt} + P \frac{dk}{dt} \right) dt$	Hangsúlyozza a koordinátafüggvényeket
$= \int_a^b \left( M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} + P \frac{dz}{dt} \right) dt$	Rövidíti $\mathbf{r}$ komponenseit
$= \int_a^b M dx + N dy + P dz$	$dt$ -vel „egyszerűsítve”, a leggyakrabban használt alak

16.2. TÁBLÁZAT Az  $\mathbf{F}$  erőter görbementi integráljának hat különböző alakja.

## 2. PÉLDA Változó erőter munkája egy térgörbe mentén

Mekkora munkát végez az  $\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$  erőter az  $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  görbe mentén a  $(0, 0, 0)$  ponttól az  $(1, 1, 1)$  pontig (16.19. ábra)?

**Megoldás.** Először írjuk fel  $\mathbf{F}$ -et a görbén:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k} \\ &= \underbrace{(t^2 - t^2)}_0 \mathbf{i} + (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Ezután meghatározzuk  $d\mathbf{r}/dt$ -t:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}.$$

Végül felírjuk  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$ -t, és integráljuk  $t = 0$ -tól  $t = 1$ -ig.

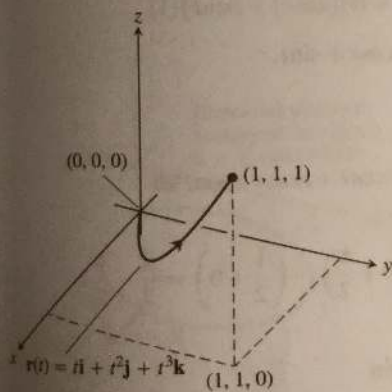
$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= [(t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}] \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) \\ &= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8, \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} \text{Munka} &= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8) dt \\ &= \left[ \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9 \right]_0^1 = \frac{29}{60}. \quad \square \end{aligned}$$

## Integrál áramlási mezőben, cirkuláció

Nemcsak erőternek tekinthetjük az  $\mathbf{F}$  vektormezőt, hanem például áramló folyadék sebességvektormezőjének, más szóval áramlási mezőjének is a tér egy



16.19. ÁBRA A 2. példa görbéje.

tartományán definiálva (pl. egy folyammederben, vagy egy hidroelektromos generátor turbinakamrájában). Ebben az esetben  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$  integrálja az áramlást adja meg a görbe mentén.

**DEFINÍCIÓ Áramlási integrál, cirkuláció**

Ha  $\mathbf{r}(t)$  egy sima görbe egy folytonos  $\mathbf{F}$  áramlási mezőben, akkor az áramlás a görbe mentén  $t = a$ -tól  $t = b$ -ig

$$\text{áramlás} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds. \quad (16.5)$$

Ezt az integrált ebben az esetben **áramlási integrálnak** hívják. Ha a görbe zárt, akkor ezt a zárt görbe menti integrált **cirkulációnak** nevezik.

Az áramlási integrálokat ugyanúgy számoljuk, mint a munkát.

**3. PÉLDA Áramlás egy csavarvonal mentén**

Egy áramló folyadék áramlási mezője  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ . Adjuk meg az áramlást az  $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$  csavarvonal mentén!

**Megoldás.** Megadjuk  $\mathbf{F}$ -et a görbe mentén:

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k} = (\cos t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}.$$

Ezután meghatározzuk  $d\mathbf{r}/dt$ -t:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Majd integráljuk  $\mathbf{F} \cdot (d\mathbf{r}/dt)$ -t  $t = 0$ -tól  $t = \pi/2$ -ig.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= (\cos t)(-\sin t) + (t)(\cos t) + (\sin t)(1) \\ &= -\sin t \cos t + t \cos t + \sin t, \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} \text{áramlás} &= \int_{t=0}^{t=\pi/2} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{\pi/2} (-\sin t \cos t + t \cos t + \sin t) dt \\ &= \left[ \frac{\cos^2 t}{2} + t \sin t \right]_0^{\pi/2} = \left( 0 + \frac{\pi}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

**4. PÉLDA Cirkuláció egy kör mentén**

Mennyi az  $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  vektormező cirkulációja az  $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  kör mentén?

**Megoldás.** A körön  $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} = (\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$  és

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}.$$

Ekkor

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin t \cos t + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_1,$$

így

$$\begin{aligned} \text{cirkuláció} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t) dt = \\ &= \left[ t - \frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi. \quad \square \end{aligned}$$

### Fluxus síkgörbén

Ha az  $xy$ -sík egy zárt görbével határolt részét tekintjük, és azt akarjuk kiszámítani, hogy milyen gyorsan áramlik be ide vagy innen ki a folyadék, akkor az  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  skalár kifejezést integráljuk a  $C$  görbe mentén.  $\mathbf{n}$  a görbére merőleges, kifelé mutató egységvektor, és  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  az áramlási mező  $\mathbf{n}$  irányú komponense. Ez az integrál  $\mathbf{F}$  fluxusa a  $C$  görbén.

#### DEFINÍCIÓ Fluxus egy zárt síkgörbén

Ha  $C$  egy zárt, sima görbe egy  $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$  folytonos vektormező értelmezési tartományában, és  $\mathbf{n}$  a kifelé mutató, görbére merőleges egységvektor a  $C$  pontjaiban, akkor  $\mathbf{F}$  fluxusa  $C$ -n

$$\mathbf{F} \text{ fluxusa } C\text{-n} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (16.6)$$

Jegyezzük meg a cirkuláció és a fluxus közötti különbséget. A cirkuláció  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$  ívhossz szerinti integrálja, a fluxus  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  ívhossz szerinti integrálja. Az egyik integrandus  $\mathbf{F}$  érintőirányú komponense, a másik a kifelé mutató normális irányú komponens. Ha a zárt görbével határolt felületre ugyanannyi folyadék folyik be, mint ki, akkor a fluxus a zárt görbén nulla. (Fluxust számíthatunk nem zárt görbe mentén is, de akkor más szempontok alapján kell a normálist irányítani.)

A (16.6) integrált a következőképpen számíthatjuk ki. Tekintjük a görbe egy sima paraméterezését,

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad a \leq t \leq b,$$

ami pontosan egyszer járja körbe a görbét miközben  $t$  növekszik  $a$ -tól  $b$ -ig. A kifelé mutató  $\mathbf{n}$  normálist úgy határozzuk meg, hogy az érintő irányú  $\mathbf{T}$  egységvektort vektoriálisan szorozzuk  $\mathbf{k}$ -val. De melyik mutat kifelé,  $\mathbf{T} \times \mathbf{k}$  vagy  $\mathbf{k} \times \mathbf{T}$ ? Ez attól függ, hogy az általunk választott paraméterezéssel a görbét az óramutató járásával ellentétesen vagy megegyezően járjuk körül. Ha megegyezően, akkor  $\mathbf{k} \times \mathbf{T}$ , ha ellentétesen, akkor  $\mathbf{T} \times \mathbf{k}$  a helyes választás (16.20. ábra). Bár az ívhossz szerinti integrál értéke, amit a fluxus definiálásánál a (16.6) egyenlőség-nél felírtunk, nem függ attól, hogy hogyan járjuk körbe a görbét, a továbbiakban a számításoknál óramutató járásával ellentétes körüljárást feltételezünk.

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = \left( \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} \right) \times \mathbf{k} = \frac{dy}{ds} \mathbf{i} - \frac{dx}{ds} \mathbf{j}.$$

Ha  $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$ , akkor

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = M(x,y) \frac{dy}{ds} - N(x,y) \frac{dx}{ds}.$$

Következésképp

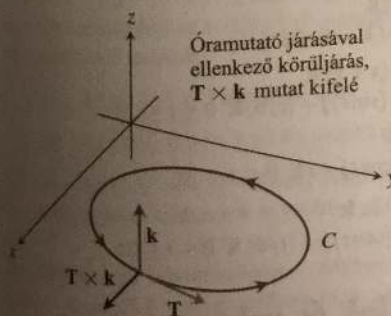
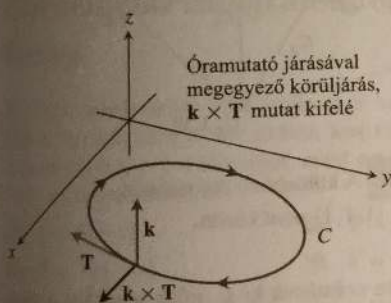
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_C \left( M \frac{dy}{ds} - N \frac{dx}{ds} \right) ds = \oint_C M \, dy - N \, dx.$$

Az utolsó integrálra egy  $\odot$  irányított kört tettünk, ami azt fejezi ki, hogy zárt görbe mentén az óramutató járásával ellentétes irányban integrálunk. Az integrál kiszámításához az  $M$ ,  $N$ ,  $dx$ ,  $dy$  kifejezéseket kell felírunk, mint  $t$  függvényét, nem kell ismernünk sem  $\mathbf{n}$ -et, sem  $ds$ -t.

#### Fluxus számítása egy sima, zárt síkgörbén

$$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \text{ fluxusa } C\text{-n} = \oint_C M \, dy - N \, dx. \quad (16.7)$$

Az integrál a  $C$  görbe bármilyen sima paraméterezésével számítható, ha azzal a  $C$  görbét pontosan egyszer járjuk körbe az óramutató járásával ellentétes irányban.



16.20. ÁBRA Ahhoz, hogy megadjunk egy kifelé mutató normálvektort, miközben az óramutató járásával ellentétes irányban járjuk be a görbét, az  $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$  szorzatot számoljuk. Az óramutató járásával megegyező körüljárás esetén  $\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{T}$ .

**5. PÉLDA Fluxus számítása körön**

Adjuk meg  $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  fluxusát az  $xy$ -síkban fekvő  $x^2 + y^2 = 1$  körön!

**Megoldás.** A kör  $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  paraméterezésével pontosan egyszer járjuk körbe a kört, az óramutató járásával ellentétes irányban. Ezért ezt a paraméterezést használhatjuk a (16.7) képletben.

$$M = x - y = \cos t - \sin t, \\ N = x = \cos t,$$

$$dy = d(\sin t) = \cos t \, dt \\ dx = d(\cos t) = -\sin t \, dt$$

Így

$$\text{Fluxus} = \int_C M \, dy - N \, dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t) \, dt \quad (16.7) \text{ képlet} \\ = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

A fluxus a körön  $\pi$ . Mivel ez pozitív, a nettó áramlás a körön keresztül kifelé irányul (a kifelé mutató normálvektorokkal a kifelé áramlást definiáltuk pozitív irányúnak). Ha a nettó áramlás befelé irányul, azaz több folyik befelé, mint kifelé, akkor a fluxus negatív. □

## 16.2. Feladatok

### Vektormező, gradiensmező

Az 1-4. feladatokban adjuk meg a függvény gradiensmezőjét!

1.  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

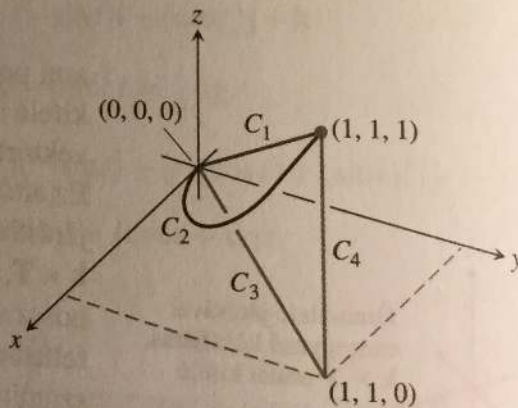
2.  $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3.  $g(x, y, z) = e^2 - \ln(x^2 + y^2)$

4.  $g(x, y, z) = xy + yz + xz$

5. Adjunk egy  $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$  alakú képletet arra a vektormezőre, ami minden ponthoz olyan vektort rendel, ami az origó irányába mutat, a hossza pedig fordítottan arányos a pont origótól való távolságának négyzetével! (A mező nincs definiálva az origóban.)

6. Adjunk egy  $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$  alakú képletet arra a vektormezőre, ami az origóban  $\mathbf{0}$ , és minden más  $(a, b)$  pontban  $\mathbf{F}$  az  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$  kör érintőjével párhuzamos, az óramutató járásával megegyező irányba mutat, hossza pedig  $|\mathbf{F}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .



16.21. ÁBRA A különböző útvonalak a  $(0, 0, 0)$  és az  $(1, 1, 1)$  pont között.

A 13-16. feladatokban számítsuk ki az erőter munkáját a megadott görbe mentén, a  $t$  paraméter növekvő értékeinek irányában!

13.  $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$   
 $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1$

14.  $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$   
 $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

### Munka

A 7-12. feladatokban adjuk meg az  $\mathbf{F}$  erőter munkáját az  $(1, 1, 1)$  ponttól az  $(0, 0, 0)$  pontig.

- gradiensmezo iram...
- (a) A 42. feladat gorbéjén egyszer körbe, felunor...  
óramutató járásával megegyező körüljárással.
- (b) Az  $(1, 1, 1)$  pontból a  $(2, 1, -1)$  pontba egyenes sza-  
kasz mentén!

## További példák és feladatok

45. **Munka és terület:** Tegyük fel, hogy  $f(t)$  egy differen-  
ciálható pozitív függvény, ha  $a \leq t \leq b$ . Legyen  $C: \mathbf{r}(t) =$   
 $= t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$ ,  $a \leq t \leq b$  az integrálási út, és  $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$  a vektormező.  
Van valamilyen kapcsolat az

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

48.  $\mathbf{F} = \frac{1}{1+x^2}\mathbf{i} + \frac{1}{1+y^2}\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$
49.  $\mathbf{F} = (y + yz \cos xyz)\mathbf{i} + (x^2 + xz \cos xyz)\mathbf{j} +$   
 $+ (z + xy \cos xyz)\mathbf{k}$ ;  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  
 $0 \leq t \leq 2\pi$
50.  $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + ze^{x}\mathbf{k}$ ;  $\mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ ,  $1 \leq t \leq 4$
51.  $\mathbf{F} = (2y + \sin x)\mathbf{i} + (z^2 + (1/3)\cos y)\mathbf{j} + x^4\mathbf{k}$ ;  
 $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}$ ,  
 $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$
52.  $\mathbf{F} = (x^2y)\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ ;  $\mathbf{r}(t) =$   
 $= (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (2 \sin^2 t - 1)\mathbf{k}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

## 16.3.

### Útfüggetlenség, potenciálfüggvény, konzervatív vektormező

A gravitációs vagy elektromos térben a munka mennyisége, amivel egy tömeget vagy egy töltést az egyik pontból a másikba mozgatunk, csak a kiindulási és a végponttól függ, és nem függ a két pont közötti úttól. Ebben az alfejezetben azzal foglalkozunk, hogy mit jelent a vektormező szempontjából az integrálnak az úttól való függetlensége.

#### Útfüggetlenség

Ha  $A$  és  $B$  két pont egy térbeli nyílt  $D$  halmazban, akkor az  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  munka, amivel egy részecskét a  $D$ -n definiált  $\mathbf{F}$  erőter az  $A$  pontból a  $B$  pontba visz, rendszerint függ az úttól, amin a részecske az  $A$ -ból  $B$ -be jutott.

**DEFINÍCIÓ Útfüggetlenség, konzervatív erőter**

Legyen  $\mathbf{F}$  egy erőter a tér egy nyílt  $D$  halmazán definiálva, és tegyük fel, hogy bármilyen két  $A$  és  $B$  pontra  $D$ -ben igaz, hogy az  $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  munka ugyanannyi minden  $A$ -ból  $B$ -be vezető út mentén, ami  $D$ -n belül halad. Ekkor az  $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  integrál **útfüggetlen  $D$ -ben**, és az  $\mathbf{F}$  erőter **konzervatív erőter  $D$ -n**.

A „konzervatív” elnevezés onnan ered, hogy olyan erőterekről van szó, ahol érvényes az energia megmaradásának elve.

Bizonyos differenciálhatósági feltételek mellett, ami a gyakorlatban általában teljesül, egy  $\mathbf{F}$  tér akkor és csak akkor konzervatív, ha gradiens tere egy  $f$  skalár függvénynek, azaz ha  $\mathbf{F} = \nabla f$  valamilyen  $f$ -re. Ennek az  $f$  függvénynek külön neve van.

**DEFINÍCIÓ Potenciálfüggvény**

Ha  $\mathbf{F}$  egy  $D$ -n definiált erőter, és  $\mathbf{F} = \nabla f$  valamilyen  $f$  skalár függvényre  $D$ -n, akkor  $f$ -et  **$\mathbf{F}$  potenciálfüggvényének** hívjuk.

Az elektromos potenciál egy olyan skalár függvény, aminek a gradiens mezője egy elektromos tér. A gravitációs potenciál egy olyan skalár függvény, aminek a gradiens mezője egy gravitációs tér stb. Ahogy látni fogjuk, ha egy erőternek megtaláltuk a potenciálfüggvényét, akkor bármilyen út mentén  $A$ -ból  $B$ -be

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A). \quad (16.8)$$

Ha arra gondolunk, hogy  $\nabla f$  többváltozós függvények esetén ugyanaz, mint  $f'$  az egyváltozós függvények esetében, akkor a (16.8) egyenlőség nem más, mint a

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

Newton–Leibniz-formula megfelelője vektorterekre.

Az, hogy egy erőter konzervatív, az előzőekkel összhangban, ekvivalens azaz, hogy minden zárt görbe mentén vett integrál nulla. Természetesen ahhoz, hogy a (16.8) egyenlőség fennálljon, a tartományra, az erőterre és görbékre bizonyos feltételeknek teljesülniük kell. Ezeket tárgyaljuk az elkövetkezőkben.

**Tulajdonságok, amelyeket mostantól fogva mindig feltételezünk: Összefüggő, egyszeresen összefüggő tartomány**

Ezentúl minden görbéről feltesszük, hogy **szakaszonként sima görbe**, azaz véges sok sima görbéből áll, amelyek végpontjaiknál csatlakoznak egymáshoz, ahogy azt a 13.1. alfejezetben tárgyaltuk. Szintén feltesszük, hogy  $\mathbf{F}$ -nek folytonos parciális deriváltjai vannak. Ha  $\mathbf{F} = \nabla f$ , akkor az előbbi feltétel azt eredményezi, hogy  $f$  vegyes másodrendű parciális deriváltjai megegyeznek, ami egy könnyen ellenőrizhető tulajdonsága a konzervatív erőtereknek.

Feltesszük továbbá, hogy  $D$  nyílt halmaz a térben. Ez azt jelenti, hogy minden pontjához van olyan gömb, aminek az adott pont a középpontja, és a gömb teljes egészében  $D$ -ben van. Feltesszük, hogy  $D$  **összefüggő**, ami azt jelenti, hogy bármely két pontja összeköthető egy olyan sima görbével, ami teljes egészében  $D$ -ben halad. Végül,  $D$ -ről feltesszük, hogy **egyszeresen összefüggő**, ami azt jelenti, hogy minden hurok, ami  $D$ -ben halad, összehúzható egy pontra úgy, hogy közben nem hagyja el  $D$ -t. (Ha  $D$  egy olyan tartomány, amiből „kihúztunk” egy egyenes szakaszt akkor már nem egyszeresen összefüggő, mert a szakaszt megkerülő zárt görbe nem húzható úgy össze egy pontra, hogy mindig a tartományban maradjon.)

Összefüggőség és egyszeresen összefüggőség nem ugyanazt jelenti, és egyik sem következik a másikból. Az összefüggőre úgy gondolhatunk, mint ami egy darabból van, az egyszeresen összefüggő az, amiben nincsenek lyukak, amire egy „hurok felakadhat”. A teljes tér összefüggő és egyszeresen összefüggő. Ennek a fejezetnek néhány állítása nem áll, ha mindazok a feltételek, amiket eddig felsoroltunk, nem teljesülnek az állításban szereplő görbékre, tartományokra, függvényekre.

### Vonalintegrálok konzervatív erőterben

A következő tétel egy kényelmes módot ad vonalintegrálok kiszámítására konzervatív erőterekben.

#### 1. TÉTEL A vonalintegrálok alaptétele

1. Legyen  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  egy vektortér, amelynek komponensei folytonosak a tér egy nyílt  $D$  tartományán. Akkor és csak akkor létezik egy olyan differenciálható  $f$  függvény  $D$ -n, hogy

$$\mathbf{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

ha  $D$  minden  $A$  és  $B$  pontjára az  $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  független az  $A$ -t és  $B$ -t összekötő úttól, feltéve, hogy  $D$ -ben halad.

2. Ha az integrál független az  $A$ -ból  $B$ -be vezető úttól, akkor

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

$\mathbf{F} = \nabla f$ -ből következik, hogy az integrál független az úttól. Tegyük fel, hogy  $A$  és  $B$   $D$ -nek két pontja, és  $C: \mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ ,  $a \leq t \leq b$ , egy sima görbe, ami  $D$ -ben halad, és összeköti  $A$ -t és  $B$ -t. A görbe mentén  $f$  differenciálható függvénye  $t$ -nek, és

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} && \text{Láncszabály, ha } x = g(t), \\ & && y = h(t), z = k(t) \\ &= \nabla f \cdot \left( \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) = \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. && \mathbf{F} = \nabla f \end{aligned}$$

Következésképp

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_a^b \frac{df}{dt} dt = \\ &= \left[ f(g(t), h(t), k(t)) \right]_a^b = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Azaz a vonalintegrál értéke csak  $f$ -nek az  $A$  és  $B$  pontbeli értékétől függ. Ez a bizonyítása a 2-es állításnak és az 1-es állításnak egyik irányba. Az 1-es állítást a másik irányba most nem bizonyítjuk.  $\square$

1. PÉLDA Konzervatív erőterben végzett munka meghatározása  
Mekkora munkát végez az

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} = \nabla(xyz)$$

erőtér az  $A(-1, 3, 9)$  és  $B(1, 6, -4)$  pontokat összekötő sima  $C$  görbe mentén?



**Megoldás.** Az  $f(x, y, z) = xyz$  függvénnyel

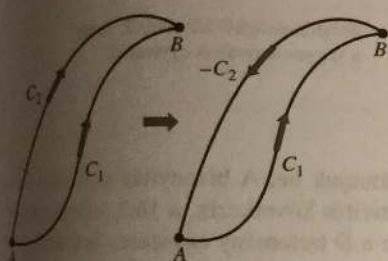
$$\begin{aligned} \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(B) - f(A) \\ &= xyz|_{(1,6,-4)} - xyz|_{(-1,3,9)} \\ &= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) \\ &= -24 + 27 = 3. \end{aligned}$$

□

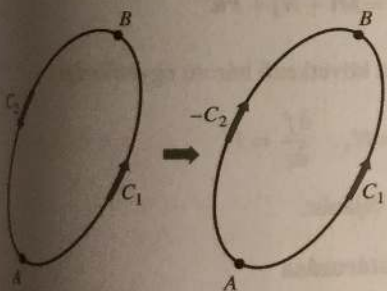
**2. TÉTEL Integrál zárt görbe mentén, konzervatív erőterben**

A következő állítások ekvivalensek:

- $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  minden zárt görbe mentén  $D$ -ben.
- Az  $\mathbf{F}$  erőter konzervatív.



**16.22. ÁBRA** Ha van két út  $A$ -ból  $B$ -be, egyiket megfordíthatjuk, hogy zárt görbe legyen.



**16.23. ÁBRA** Ha van két út  $A$ -ból  $B$ -be, egyiket megfordíthatjuk, hogy zárt görbe legyen.

**Az első állításból következik a második.** Azt akarjuk megmutatni, hogy  $D$ -nek bármely  $A$  és  $B$  pontjára  $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  ugyanazt az értéket veszi fel bármely  $C_1, C_2$  út esetén. Ha megfordítjuk az integrálás irányát  $C_2$ -n, és  $B$ -ből  $A$ -ba megyünk, akkor egyrészt  $C_2$ -n az integrál előjelet vált, másrészt egy zárt görbét hoztunk létre.

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Azaz az integrál  $C_1$ -en és  $C_2$ -n ugyanazt az értéket adja.

**A második állításból következik az első:** Meg akarjuk mutatni, ha  $\mathbf{F}$  konzervatív, akkor zárt görbe mentén vett integrálja nulla. Tekintsünk egy zárt görbét és azon két pontot,  $A$ -t és  $B$ -t. Ezek  $C$ -t két részre osztják, a  $C_1$  és  $C_2$  görbére. Ha az egyiket, pl.  $C_2$ -n visszafelé megyünk, egyrészt az integrál előjelet vált, másrészt ugyanazt az értéket veszi fel, mint  $C_1$ -en:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad \square$$

A következő diagram összegzi az 1. és 2. Tétel eredményeit:

$$\mathbf{F} = \nabla f \text{ } D\text{-n} \iff \mathbf{F} \text{ konzervatív } D\text{-n} \iff \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ } D \text{ minden zárt görbén}$$

Miután láttuk milyen egyszerű integrált számolni konzervatív erőterben, két kérdés maradt:

- Honnan lehet tudni, hogy egy erőter (vektormező) konzervatív?
- Ha  $\mathbf{F}$  konzervatív, hogyan találjuk meg a potenciálfüggvényét (olyan  $f$ -et, amire  $\nabla f = \mathbf{F}$ )?

**Konzervatív erőter potenciáljának meghatározása**

Azt, hogy az erőter konzervatív-e a következőképp ellenőrizhetjük. Ne felejtjük el, hogy a  $D$  tartomány összefüggő és egyszeresen összefüggő.

**Komponens-teszt a konzervativitás ellenőrzésére**

Legyen  $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$  egy olyan erőter, ahol a koordinátafüggvényeknek folytonos parciális deriváltjai vannak. Ekkor  $\mathbf{F}$  akkor és csak akkor konzervatív, ha

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (16.9)$$

Ha  $\mathbf{F}$  konzervatív, akkor a (16.9) egyenlőségek teljesülnek. Van olyan  $f$  potenciálfüggvény, hogy

$$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Következésképp

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial N}{\partial z}. \end{aligned}$$

Folytonosságból következik, hogy a vegyes deriváltak egyenlők

A többi egyenlőséget hasonlóképp láthatjuk be. A bizonyítás második fele az, hogy az egyenlőségekből a konzervativitás következik, a 16.7. alfejezetben tárgyalt Stokes-tétel következménye, ami a  $D$  tartomány egyszeres összefüggőségét követeli meg.  $\square$

Ha már tudjuk, hogy  $\mathbf{F}$  konzervatív, általában ismerni szeretnénk egy potenciálfüggvényét. Ehhez meg kell oldanunk a  $\nabla f = \mathbf{F}$  egyenletet, azaz a

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

egyenletet  $f$ -re. Ehhez integrálnunk kell a következő három egyenlőséget:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P.$$

A következő példában bemutatjuk ezt az eljárást.

**2. PÉLDA Potenciálfüggvény meghatározása**

Mutassuk meg, hogy az  $\mathbf{F} = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \sin y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$  vektormező konzervatív, és adjuk meg egy potenciálfüggvényét!

**Megoldás.** A (16.9) egyenlőségeket ellenőrizzük az

$$M = e^x \cos y + yz, \quad N = xz - e^x \sin y, \quad P = xy + z$$

függvényekre.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \sin y + z = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Ezek az egyenlőségek együtt azt jelentik, hogy van potenciálfüggvény. Ezt az  $f$  függvényt az

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + zy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \quad (16.10)$$

egyenlőségek integrálásával kapjuk meg. Az első egyenletet  $x$  szerint integráljuk, miközben  $y$ -t és  $z$ -t konstansként kezeljük:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z).$$

Az  $x$  szerinti integrálás konstansa függhet  $y$ -től és  $z$ -től. Kiszámítjuk  $\partial f/\partial y$ -t az így kapott  $f$  függvényből, és összevetjük azzal, amit a (16.10) egyenlőségből tudunk:

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y.$$

Így  $\partial g/\partial y = 0$ , azaz  $g$  csak  $z$ -től függhet:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z).$$

Számítsuk ki ebből  $\partial f/\partial z$ -t és vessük össze (16.10)-zel.

$$xy + \frac{dh}{dz} = xy + z, \quad \text{azaz} \quad \frac{dh}{dz} = z,$$

így

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C.$$

A potenciálfüggvény tehát

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C.$$

$C$ -től függően végtelen sok potenciálfüggvényünk van. □

### 3. PÉLDA Annak kimutatása, hogy $F$ nem konzervatív

Mutassuk meg, hogy  $F = (2x - 3)\mathbf{i} - z\mathbf{j} + (\cos z)\mathbf{k}$  nem konzervatív!

**Megoldás.** A (16.9) egyenlőségből adódik:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1.$$

Ez a kettő nem egyenlő, így  $F$  nem konzervatív. □

### Egzakt differenciálkifejezések (differenciálformák)

Ahogy később látni fogjuk, sokszor kényelmes a vonalintegrált „differenciál” alakban kifejezni:

$$\int_A^B M dx + N dy + P dz,$$

amit már a 16.2. alfejezetben említettünk. Ezeket az integrálokat viszonylag könnyű számítani, ha  $M dx + N dy + P dz$  egy  $f$  függvény teljes differenciálja. Ebben az esetben

$$\begin{aligned} \int_A^B M dx + N dy + P dz &= \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(B) - f(A). \quad \text{1. Tétel} \end{aligned}$$

Azaz

$$\int_A^B df = f(B) - f(A)$$

pontosan úgy, mint egyváltozós esetben.

**DEFINÍCIÓ Egzakt differenciálkifejezések (differenciálformák)**

Egy  $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz$  alakú kifejezést **differenciálkifejezésnek**, vagy **differenciálformának** nevezünk. A differenciálforma **egzakt** a tér  $D$  tartományán, ha

$$Mdx + Ndy + Pdz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

valamilyen  $f$  skalár függvényre.

**A  $Mdx + Ndy + Pdz$  differenciálforma egzaktóságának ellenőrzése**

A  $Mdx + Ndy + Pdz$  differenciálforma akkor és csak akkor egzakt, ha

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \quad (16.11)$$

Ez egyenértékű azzal, hogy  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  konzervatív.

**4. PÉLDA Differenciálforma egzaktóságának megmutatása**

Mutassuk meg, hogy az  $y dx + x dy + 4dz$  egzakt forma, és számítsuk ki az

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y dx + x dy + 4dz$$

integrált az  $(1, 1, 1)$  és  $(2, 3, -1)$  pontok közötti szakaszon!

**Megoldás.** Legyen  $M = y$ ,  $N = x$ ,  $P = 4$ , és ellenőrizzük a (16.11) egyenlőségeket:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Ezek az egyenlőségek azt jelentik, hogy  $y dx + x dy + 4dz$  egzakt, így

$$y dx + x dy + 4dz = df$$

fennáll valamilyen  $f$  függvényre.  $f$ -et egy konstans erejéig meghatározhatjuk a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4. \quad (16.12)$$

egyenletekből. Az elsőből

$$f(x, y, z) = xy + g(y, z).$$

A másodikból

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x, \quad \text{azaz} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Következésképp  $g$  csak  $z$ -től függ,

$$f(x, y, z) = xy + h(z).$$

(16.12) harmadik egyenletéből

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{dh}{dz} = 4, \quad \text{azaz} \quad h(z) = 4z + C.$$

Így

$$f(x, y, z) = xy + 4z + C.$$

Az integrál értéke pedig

$$f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1) = 2 + C - (5 + C) = -3. \quad \square$$

- (b) Az  $x$ -tengely  $(-1, 0)$ -ból  $(1, 0)$ -ba.  
 (c) Az  $x$ -tengely  $(-1, 0)$ -ból  $(1, 0)$ -ba.  
 (d) Az  $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\sin^3 t)\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  asztroid mentén óramutató járásával ellentétes irányban  $(1, 0)$ -tól vissza  $(1, 0)$ -ba.

(a) **Egzakt differenciálforma:** Mi  $a$ -nak,  $b$ -nek,  $c$ -nek az értéke, ha a következő differenciálkifejezés egzaktnak van?

$$(ay^2 + 2czx)dx + y(bx + cz)dy + (ay^2 + cx^2)dz$$

**Gradiens mező:** A  $b$  és  $c$  paraméterek milyen értékeire lesz  $\mathbf{F}$  irrotációs mező?

$$\mathbf{F} = (y^2 + 2czx)\mathbf{i} + y(bx + cz)\mathbf{j} + (y^2 + cx^2)\mathbf{k}$$

irrotációs gradiensmező?

gravitációs erőter egy potenciálfüggvényét, ahol  $G$ ,  $m$ , és  $M$  konstansok.

(b) Legyen  $P_1$  és  $P_2$  két pont rendre  $s_1$ , ill.  $s_2$  távolságra az origótól. Mutassuk meg, hogy az (a) pontban adott erőter által végzett munka, miközben egy részecskét  $P_1$ -ből  $P_2$ -be visz,

$$GmM \left( \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} \right).$$

## 16.4.

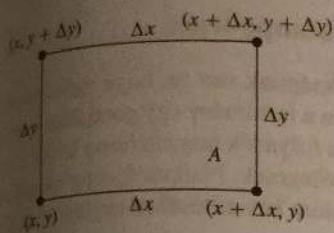
### Green-tétel a síkban

A 16.2. alfejezet 16.2. táblázatából tudjuk, hogy minden  $\int_C M dx + N dy$  integrál felírható, mint egy  $\int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$  áramlási integrál. Ha az integrál független az úttól, akkor a vektormező konzervatív (a tartományra vonatkozó bizonyos feltételek mellett), és akkor a potenciálfüggvényből az integrálok könnyen számíthatók. Ebben az alfejezetben olyan vektormezővel foglalkozunk, amelyek nem konzervatívak. A Green-tétel segítségével a kétdimenziós vektormezők görbementi integráljait, zárt görbék esetén, átírhatjuk kettős integrállá, ami gyakran leegyszerűsíti a számításokat.

Mi sebességvektorterek terminológiáját használjuk, mert azt könnyű elképzelni, de a Green-tétel állításai természetesen bármely más vektormező esetén is érvényesek, ha egyébként a tartományra és a függvényekre tett feltételek teljesülnek.

#### Divergencia

A Green-tételhez két új fogalomra van szükségünk. Az első a vektormező *divergenciája* egy pontban, amit a fizikusok és a mérnökök *fluxussűrűségnek* is hívnak. Ez a következő:



16.24 ÁBRA A vektormező  $(x, y)$  pontbeli divergenciájának (fluxussűrűségének) definíciójában szereplő téglalap.

Tegyük fel, hogy  $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$  egy áramló folyadék sebességvektormezője a síkban, és  $M$ -nek és  $N$ -nek az első parciális deriváltjai folytonosak egy  $T$  tartományon. Legyen  $(x, y)$  a  $T$  tartomány egy pontja, és  $A$  legyen egy olyan kis téglalap, aminek egyik sarka  $(x, y)$ , és teljes egészében  $T$ -ben van (16.24. ábra). A téglalap oldalai párhuzamosak a tengelyekkel, és  $\Delta x, \Delta y$  hosszúak. A folyadék az alsó oldalon keresztül körülbelül

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\Delta x = -N(x, y)\Delta x$$

gyorsasággal folyik kifelé a téglalpból. Ugyanis az áramlási sebességvektor  $\mathbf{F}$  komponense a kifelé mutató normálvektor irányában az  $(x, y)$  pontban  $-N(x, y)$ , és ezt kell szorozni az ívhosszal,  $\Delta x$ -szel. Ha a sebesség pl. méter per másodperc, akkor a kifolyási sebesség méterszer méter per másodperc, ami négyzetméter per másodperc, hiszen síkban vagyunk. A kifolyási sebességet a többi oldalon is hasonlóképp kapjuk.

- Kifolyási sebesség:**
- Felül:  $\mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot \mathbf{j}\Delta x = N(x, y + \Delta y)\Delta x$
  - Alul:  $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\Delta x = -N(x, y)\Delta x$
  - Jobbra:  $\mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{i}\Delta y = M(x + \Delta x, y)\Delta y$
  - Balra:  $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{i})\Delta y = -M(x, y)\Delta y$

Összeadva a szemközti oldalakat:

$$\text{Alul + felül: } (N(x, y + \Delta y) - N(x, y))\Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x,$$

$$\text{Jobbra + balra: } (M(x + \Delta x, y) - M(x, y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y.$$

Összeadva ezeket a mennyiségeket:

$$\text{Fluxus a határon} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y.$$

Ha a téglalap  $\Delta x\Delta y$  területével osztunk, akkor a fluxussűrűség egy közelítését kapjuk.

$$\frac{\text{Fluxus a határon}}{\text{téglalap területe}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right).$$

Végül, ha  $\Delta x$  és  $\Delta y$  tartanak nullához, az  $\mathbf{F}$  vektormező fluxussűrűségét, vagy ahogy a matematikában hívjuk, a divergenciáját kapjuk az  $(x, y)$  pontban. Jelölése  $\text{div } \mathbf{F}$ .

**DEFINÍCIÓ Divergencia (fluxussűrűség)**

Az  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  vektormező **divergenciája (fluxussűrűsége)** az  $(x, y)$  pontban

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}. \quad (16.13)$$

Szemléletesen, ha például valamilyen gáz az  $(x_0, y_0)$  pontban éppen kiterjed, akkor az áramlás sebességvektorai elfelé mutatnak a ponttól, és mivel a gáz kifelé folyik az  $(x_0, y_0)$ -t tartalmazó kicsi téglalpból, a  $\mathbf{F}$  divergenciája pozitív. Ha a gáz összehúzódik, a divergencia negatív lesz (16.25. ábra).

**1. PÉLDA Divergencia meghatározása**

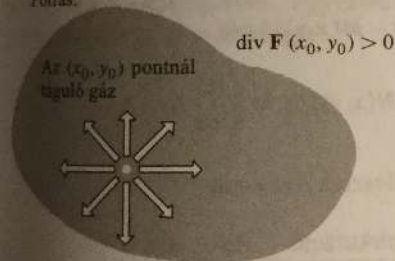
Adjuk meg  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (xy - y^2)\mathbf{j}$  divergenciáját!

**Megoldás.** A (16.13) képletet használjuk:

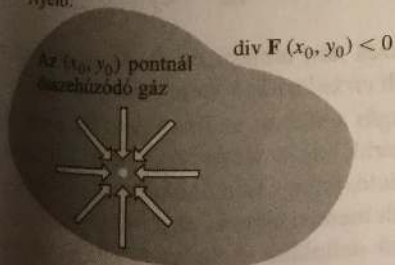
$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2) \\ &= 2x + x - 2y = 3x - 2y. \end{aligned}$$

□

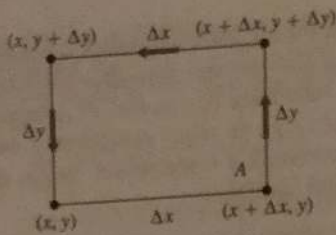
Forrás:



Nyelő:



16.25 ÁBRA Ha a gáz  $(x_0, y_0)$ -ban kiterjedően van, az áramlási térnek itt pozitív a divergenciája, ha éppen összehúzódik, akkor pedig negatív.



16.26. ÁBRA A téglalap, aminek segítségével a rotációt (cirkuláció sűrűséget) definiáljuk a vektormező  $(x, y)$  pontjában.

### Tengely körüli forgás: a rotáció k-komponense

A másik dolog, amire a Green-tételhez szükségünk van az, hogy mérni tudjuk, hogy síktartományon áramló folyadék esetén a tartomány egy pontjában hogyan forog egy lapátkerék. Ez azt fejezi ki, hogy a folyadék hogyan forog körbe olyan tengelyek körül amelyek a tartományra merőlegesek. Fizikusok ezt a mennyiséget *cirkulációsűrűségnek* is nevezik. A fogalom bevezetéséhez térjünk vissza az

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

sebességmezőhöz és az A téglalaphoz. Ezt a téglalapot újrarajzoltuk a 16.26. ábrán.

F-nek az óramutató járásával ellentétes irányú cirkulációja az A tartomány határán úgy adódik ki, mint az áramlások összege a négy oldal mentén. Az alsó él mentén az áramlás körülbelül

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i} \Delta x = M(x, y) \Delta x.$$

Ezen az oldalon az érintő iránya  $\mathbf{i}$ , így ez a mennyiség az  $\mathbf{F}(x, y)$  sebesség  $\mathbf{i}$  irányú összetevője, szorozva az ívhosszal. A többi oldalon is hasonlóképpen járunk el.

- Felül:  $\mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot (-\mathbf{i}) \Delta x = -M(x, y + \Delta y) \Delta x$
- Alul:  $\mathbf{F}(x, y) \cdot (\mathbf{i}) \Delta x = M(x, y) \Delta x$
- Jobbra:  $\mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{j} \Delta y = N(x + \Delta x, y) \Delta y$
- Balra:  $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j}) \Delta y = -N(x, y) \Delta y$

Összeadva a szemközti oldalakat:

$$\text{Alul + felül: } -(M(x, y + \Delta y) - M(x, y)) \Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x,$$

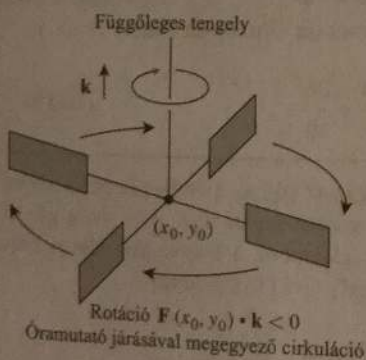
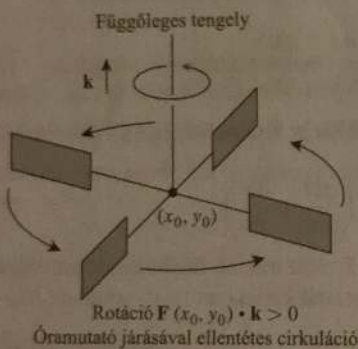
$$\text{Jobbra + balra: } (N(x + \Delta x, y) - N(x, y)) \Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y.$$

Összeadva ezeket a mennyiségeket, és elosztva  $\Delta x \Delta y$ -nal

$$\frac{\text{téglalap kerülete menti cirkuláció}}{\text{téglalap területe}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Azt a határértéket, ahová ez a kifejezés tart, amikor  $\Delta x$  és  $\Delta y$  is tartanak a nullához, az  $\mathbf{F}$  vektormező  $(x, y)$  pontbeli *cirkulációsűrűségének* nevezzük.

A cirkulációsűrűség pozitív, ha a forgás a síkban az óramutató járásával ellentétes az  $xy$ -síkra merőleges tengely körül, lefelé nézve az  $xy$ -síkra, a  $\mathbf{k}$  vektor hegye irányából (16.27. ábra). A cirkulációsűrűség tulajdonképpen a  $\mathbf{k}$ -komponense egy sokkal általánosabban definiált mennyiségnek, az  $\mathbf{F}$  vektormező rotációjának, amit a 16.7. alfejezetben fogunk definiálni. A Green-tételhez csak erre a  $\mathbf{k}$ -komponensre lesz szükségünk.



16.27. ÁBRA Ha egy összenyomhatatlan folyadék áramlik a síkon, akkor a rotáció  $\mathbf{k}$ -komponense azt méri, hogy milyen gyorsan forog a folyadék egy pontban. A  $\mathbf{k}$ -komponens pozitív, ha a forgás óramutató járásával ellentétes, negatív, ha azzal megegyező irányú.

#### DEFINÍCIÓ A rotáció $\mathbf{k}$ -komponense (cirkulációsűrűség)

Egy  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  vektormező rotációjának  $\mathbf{k}$ -komponense (cirkulációsűrűsége) az  $(x, y)$  pontban a

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad (16.14)$$

skalár mennyiség.

Ha víz áramlik az  $xy$ -sík egy tartományán vékony rétegben, akkor a rotáció  $\mathbf{k}$ -komponense az  $(x_0, y_0)$  pontban azt mutatja meg, hogy milyen irányban és milyen gyorsan forogna egy kis lapátkerék, ha a tengelyét az  $(x_0, y_0)$  pontba az  $xy$ -síkra merőlegesen állítanánk (16.27. ábra).

**2. PÉLDA A rotáció k-komponensének meghatározása**

Adjuk meg az

$$\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - y)\mathbf{i} + (xy - y^2)\mathbf{j}$$

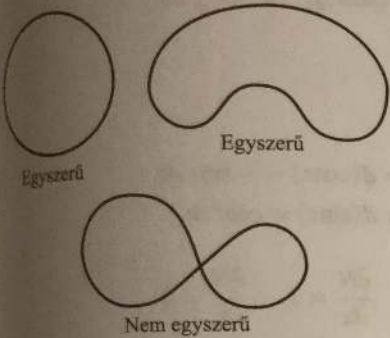
vektormező rotációjának  $\mathbf{k}$ -komponensét!

**Megoldás.** A (16.14) képlet alapján:

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy - y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = y + 1. \quad \square$$

**A Green-tétel két formája**

A Green-tétel egyik alakja azt mondja, hogy bizonyos feltételek mellett a sík egyszerű, zárt görbéjén számított fluxust (amit mi kifelé mutató normálvektorral definiáltunk) úgy is kiszámíthatjuk, hogy a zárt görbe által határolt tartományon integráljuk a vektormező divergenciáját (16.28. ábra).



16.28. ÁBRA A Green-tétel bizonyításánál megkülönböztetünk egyszerű és nem egyszerű, zárt görbét. Egyszerű görbe nem metszi át saját magát.

**3. TÉTEL Green-tétel normálvektoros alakja (fluxusra vonatkozó)**

Az  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  vektormező (kifelé mutató normálvektorral számított) fluxusa egy egyszerű, zárt  $C$  görbén egyenlő  $\text{div } \mathbf{F}$  integráljával azon a  $T$  tartományon, amit a  $C$  görbe határol. Képlettel:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_C M \, dy - N \, dx = \iint_T \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (16.15)$$

fluxus divergencia integrálja

A Green-tétel másik alakja azt mondja, hogy egy egyszerű, zárt görbe mentén, az óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkulációja egy vektormezőnek számítható úgy, hogy a rotáció  $\mathbf{k}$ -komponensét integráljuk a zárt görbe által határolt tartományon.

**4. TÉTEL Green-tétel érintővektoros alakja (cirkulációra vonatkozó)**

Az  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  vektormező óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkulációja egy egyszerű, zárt  $C$  görbe mentén egyenlő  $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$  integráljával a zárt görbe által határolt  $T$  tartományon. Képlettel:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_T \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (16.16)$$

óramutató járásával ellentétes  
körüljárással számolt cirkuláció rotáció integrálja

A Green-tétel két formája ekvivalens. A (16.15) egyenlőséget alkalmazva az  $\mathbf{G}_1 = N\mathbf{i} - M\mathbf{j}$  mezőre a (16.16) egyenlőséget, a (16.16) egyenlőséget alkalmazva a  $\mathbf{G}_2 = -N\mathbf{i} + M\mathbf{j}$  mezőre a (16.15) egyenlőséget kapjuk.

**Matematikai feltételek**

A Green-tételhez néhány feltételnek teljesülnie kell. Először is,  $M$ -re és  $N$ -re kellenek olyan feltételek, hogy az integrálok létezzenek. A szokásos feltételek, hogy parciális deriváltjaik legyenek folytonosak egy olyan tartomány minden pontjában, ami  $C$ -t és  $T$ -t tartalmazza, elegendők. Másodszor, feltételeink vannak a  $C$  görbére. Annak egyszerű, zárt görbének kell lennie, olyan ívekből összenak a  $C$  görbére. Amelyeken  $M$  és  $N$  integrálhatóak. A szokásos feltétel az, hogy ezek a részívek legyenek sima görbék. A Green-tételnek az a bizonyítása, amit itt most majd közlünk, a  $T$  tartomány alakjára is tesz megszorításokat. Olyan bizonyításokat, amelyek kevesebb feltételt használnak, magasabb szintű könyvekben



találhatunk. (Mint minden más tételt, a Green-tételt is csak abban az esetben használjuk, ha biztosan tudjuk, hogy a megkövetelt feltételek teljesülnek. Ha akár csak egyetlen pont is van, ahol ezek nem teljesülnek, hamis eredményre juthatunk.) Először lássunk egy példát!

### 3. PÉLDA A Green-tétel érvényességének illusztrációja

Mutassuk meg a Green-tétel érvényességét az

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

vektormezőre, ha a zárt görbe a

$$C: \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

körvonal!

**Megoldás.** A tétel jelöléseivel:

$$M = \cos t - \sin t, \quad dx = d(\cos t) = -\sin t \, dt, \\ N = \cos t, \quad dy = d(\sin t) = \cos t \, dt,$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0.$$

A (16.15) egyenlőség két oldala:

$$\oint_C M \, dy - N \, dx = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t \, dt) - (\cos t)(-\sin t \, dt) = \\ = \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$$

$$\iint_T \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_T (1 + 0) \, dx \, dy = \\ = \iint_T dx \, dy = \text{egységkör területe} = \pi.$$

A (16.16) egyenlőség két oldala:

$$\oint_C M \, dx + N \, dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(-\sin t \, dt) - (\cos t)(\cos t \, dt) = \\ = \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + 1) \, dt = 2\pi$$

$$\iint_T \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy = \iint_T (1 - (-1)) \, dx \, dy = 2 \iint_T dx \, dy = 2\pi. \quad \square$$

### A Green-tétel alkalmazása vonalintegrálok kiszámítására

Ha egy olyan zárt görbén kell integrálnunk, amelyik több egymáshoz csatlakozó darabból áll, amelyeket különböző paraméterezéssel tudunk csak megadni, akkor a vonalintegrál számítása meglehetősen hosszadalmas. Előfordul azonban, hogy a Green-tétel feltételei teljesülnek, és a görbe által határolt tartományra a kettős integrált könnyen fel tudjuk írni.

4. PÉLDA **Vonalintegrál számítása Green-tétellel**

Számítsuk ki a

$$\oint_C xy \, dy - y^2 \, dx$$

integrált, ahol  $C$  az a négyzetvonal, amit az első síknegyedben a koordinátanegyelyek és az  $x = 1, y = 1$  egyenesek szakaszai alkotnak!

**Megoldás.** Bármelyik alakját használhatjuk a Green-tételnek, hogy a vonalintegrált a négyzeten való integrállá írjuk át.

1. A fluxusra vonatkozó alak, (16.15) egyenlőség:  $M = xy, N = y^2$  és  $C$ , ill.  $T$  a négyzetvonal, ill. a négyzet belseje.

$$\begin{aligned} \oint_C xy \, dy - y^2 \, dx &= \iint_T (y + 2y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 3y \, dx \, dy = \\ &= \int_0^1 [3xy]_{x=0}^{x=1} \, dy = \int_0^1 3y \, dy = \frac{3}{2} [y^2]_0^1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. A cirkulációra vonatkozó alak, (16.16) egyenlőség:

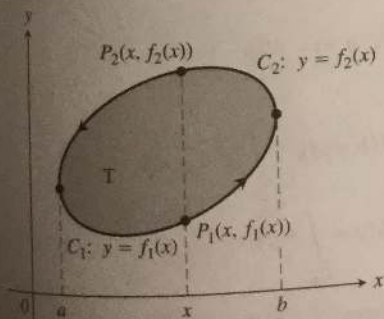
$$\oint_C -y^2 \, dx + xy \, dy = \iint_T (y - (-2y)) \, dx \, dy = \frac{3}{2}. \quad \square$$

5. PÉLDA **Fluxus meghatározása**

Számítsuk ki az  $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$  vektormező fluxusát (kifelé mutató normálissal) az  $x = \pm 1, y = \pm 1$  egyenesek által adott négyzetvonalon!

**Megoldás.** A fluxus vonalintegrállal való meghatározása négy integrál kiszámítását igényelné a négyzet négy oldalán. A Green-tétellel egyetlen kettős integrált számolunk.  $M = x, N = y^2$  választással

$$\begin{aligned} \text{Fluxus} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_C M \, dy - N \, dx = \\ &= \iint_T \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \quad \text{Green-tétel} \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + 2y) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 [x + 2xy]_{x=-1}^{x=1} \, dy = \\ &= \int_{-1}^1 (2 + 4y) \, dy = [2y + 2y^2]_{-1}^1 = 4. \quad \square \end{aligned}$$



**A Green-tétel bizonyítása speciális tartományokra.** Legyen a  $C$  egyszerű, zárt görbe az  $xy$ -síkban olyan, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyenesekkel legfeljebb két közös pontja van. Legyen a  $T$  tartomány az, amit  $C$  közrezár, és tegyük fel, hogy az  $M, N$  függvényeknek folytonos parciális deriváltjai vannak egy olyan tartományon, ami  $T$ -t és  $C$ -t tartalmazza. A Green-tétel cirkulációra vonatkozó változatát bizonyítjuk:

$$\oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_T \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dx \, dy. \quad (16.17)$$

A 16.29. ábra mutatja, hogyan bontjuk fel  $C$ -t két irányított részre:

$$C_1: y = f_1(x), \quad a \leq x \leq b, \quad C_2: y = f_2(x), \quad b \geq x \geq a.$$

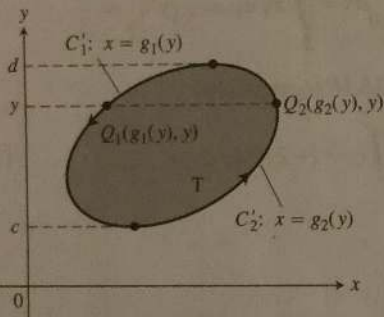
16.29. ÁBRA A határoló  $C$  görbét két részre bontjuk,  $C_1$ -re, ami az  $y = f_1(x)$  függvény grafikonja, és  $C_2$ -re, ami az  $y = f_2(x)$  függvény grafikonja.

Minden  $a$  és  $b$  közötti értékre a  $\partial M/\partial y$  függvényt integráljuk  $y$  szerint  $y = f_1(x)$ -től  $y = f_2(x)$ -ig, és azt kapjuk, hogy

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy = [M(x, y)]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} = M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)).$$

Ezután ezt integrálhatjuk  $x$  szerint  $a$ -tól  $b$ -ig:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx \\ &= - \int_a^b M(x, f_2(x)) dx - \int_a^b M(x, f_1(x)) dx \\ &= - \int_{C_2} M dx - \int_{C_1} M dx \\ &= - \oint_C M dx. \end{aligned}$$



Következésképp

$$\oint_C M dx = \iint_T \left( -\frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \tag{16.18}$$

A (16.18) egyenlőség a fele annak, amit bizonyítani akarunk. A másik felét úgy vezetjük le, hogy a  $\partial N/\partial x$  függvényt integráljuk  $x$  szerint, majd  $y$  szerint, ahogy a 16.30. ábra mutatja. Láthatjuk, hogy itt  $C$  szintén két irányított darabra van felbontva:  $C_1' : x = g_1(y), d \geq y \geq c$  és  $C_2' : x = g_2(y), c \leq y \leq d$ . A kétszeres integrál eredménye:

$$\oint_C N dy = \iint_T \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx dy. \tag{16.19}$$

A (16.18) és (16.19) egyenlőségeket összeadva a tétel állítását kapjuk.  $\square$

16.30. ÁBRA A határoló  $C$  görbét két részre bontjuk,  $C_1'$ -re, ami az  $x = g_1(y)$  függvény grafikonja, és  $C_2'$ -re, ami az  $x = g_2(y)$  függvény grafikonja.

### A bizonyítás kiterjesztése más tartományokra

A bizonyítás, amit az imént adtunk, nem érvényes olyan téglalaptartományra, ami a 16.31. ábrán látható, mert az  $x = a, x = b, y = c, y = d$  egyeneseknek nem csak két közös pontjuk van a határral. Ha a határoló görbét négy irányított szakaszra bontjuk

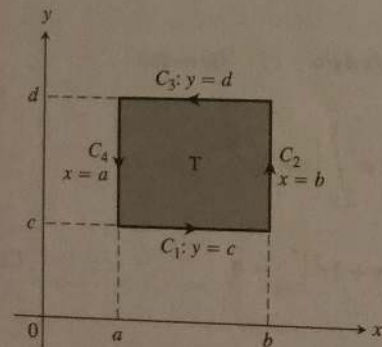
$$\begin{aligned} C_1 : y = c, a \leq x \leq b, & & C_2 : x = b, c \leq y \leq d, \\ C_3 : y = d, b \geq x \geq a, & & C_4 : x = a, d \geq y \geq c, \end{aligned}$$

az érvelésünket a következőképpen folytathatjuk. Úgy haladva, mint az előbb

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx dy &= \int_c^d (N(b, y) - N(a, y)) dy \\ &= \int_c^d N(b, y) dy + \int_d^c N(a, y) dy \\ &= \int_{C_2} N dy + \int_{C_4} N dy. \end{aligned} \tag{16.20}$$

Mivel  $y$  a  $C_1$  és  $C_3$  görbék mentén konstans,  $\int_{C_1} N dy = \int_{C_3} N dy = 0$ , így ezeket hozzáadhatjuk a (16.20) jobb oldalához anélkül, hogy az egyenlőség megszűnne.

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \oint_C N dy. \tag{16.21}$$



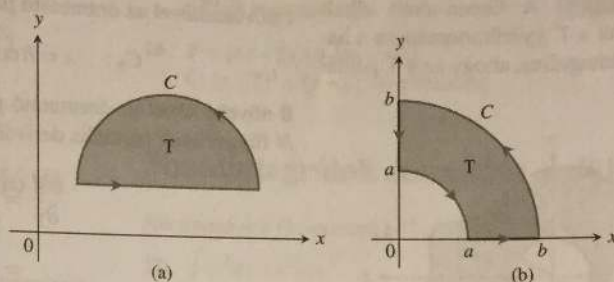
16.31. ÁBRA Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a Green-tételt téglalaponra, négy részre osztjuk a határt.

Hasonlóképp megmutatható, hogy

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y} dy dx = - \oint_C M dx. \quad (16.22)$$

A (16.22) egyenletet kivonva a (16.21) egyenletből, kapjuk, hogy

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_T \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$



16.32. ÁBRA Más tartományok, amelyekre a Green-tételt lehet alkalmazni.

Olyan tartományok, mint pl. a 16.32. ábrán láthatóak, minden nagyobb nehézség nélkül kezelhetők. Szintén működik az olyan patkó alakú tartományokra is, mint pl. a 16.33. ábrán, összetéve az  $R_1, R_2$  tartományokat és a határaikat. A Green-tétel érvényes  $C_1$ -re és  $T_1$ -re, valamint  $C_2$ -re és  $T_2$ -re:

$$\int_{C_1} M dx + N dy = \iint_{T_1} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\int_{C_2} M dx + N dy = \iint_{T_2} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

Amikor összeadjuk ezt a két integrált, az  $y$ -tengelyen levő szakaszokon az integrálok kiejtik egymást, következésképp

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_T \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy,$$

ahol  $C$  két egyenes szakaszból áll az  $x$ -tengely mentén,  $-b$ -től  $-a$ -ig, és  $a$ -tól  $b$ -ig, valamint két félkörből, a  $T$  tartomány pedig az, amit  $C$  közre zár.

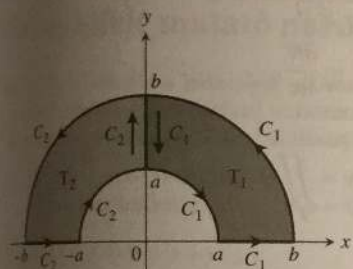
Az ötlet, hogy a vonalintegrált részvonalintegrálok összegére bontsuk, addig alkalmazható, amíg véges sok ilyen összetevőről van szó. A 16.34a ábrán  $C_1$ , az óramutató járásával ellentétesen irányítva, a határa  $T_1$ -nek, ami az első síknegyedben van, és ugyanígy a többi síknegyedre,  $C_i$  a határa a  $T_i$  tartománynak  $i = 2, 3, 4$ . A Green-tétel alapján

$$\oint_{C_i} M dx + N dy = \iint_{T_i} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (16.23)$$

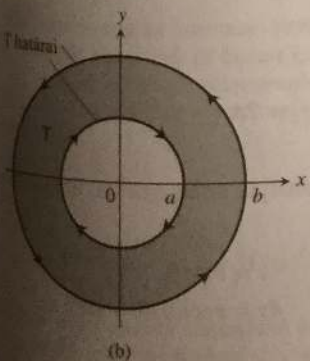
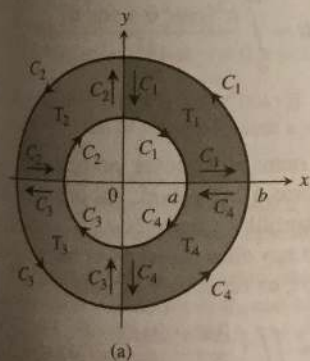
Ha összeadjuk a (16.23) egyenlőségeket  $i = 1, 2, 3, 4$ -re, akkor

$$\oint_{r=a}^r=b} M dx + N dy + \oint_{r=b} M dx + N dy = \iint_{\cup T_i} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad (16.24)$$

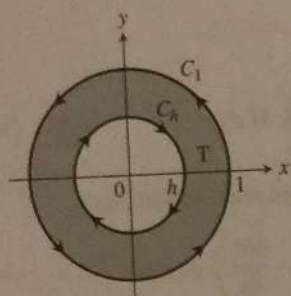
A (16.24) egyenlőség azt mondja, hogy  $(\partial N / \partial x) - (\partial M / \partial y)$  kettős integrálja a  $T$  gyűrűtartomány felett egyenlő  $M dx + N dy$  vonalintegráljával a  $T$  teljes határán, ha úgy haladunk, hogy a tartomány mindig a bal kezünk felé van (16.34b ábra).



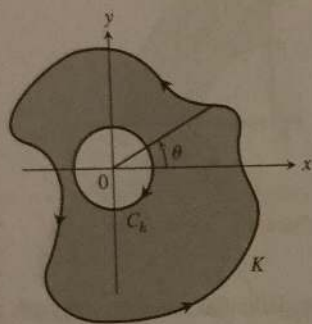
16.33. ÁBRA A  $T$  tartomány, amit két részre osztunk.



16.34. ÁBRA A  $T$  gyűrűtartomány 4 részre bontható. Polárkoordinátákkal a belső kör  $r = a$ , a külső kör  $r = b$ , a tartomány pedig  $a \leq r \leq b$ .



16.35. ÁBRA A Green-tételt alkalmazhatjuk a  $T$  gyűrűtartományra a határokon integrálva, ahogy az a 6. példában van.



16.36. ÁBRA A tartomány, amit  $C_h$  és  $K$  határolnak.

6. PÉLDA A Green-tétel érvényességének ellenőrzése gyűrűtartományon  
Mutassuk meg a Green-tétel érintővektoros alakjának érvényességét ((16.24) egyenlet) a  $T: h^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 < h < 1$  gyűrűtartományon (16.35. ábra), ha

$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad N = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Megoldás. A  $T$  tartomány határa

$$C_1: x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$t$  növekedtével az óramutató járásával ellentétes irányú körüljárással, és

$$C_h: x = h \cos \theta, \quad y = -h \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$\theta$  növekedtével az óramutató járásával megegyező irányú körüljárással. Az  $M, N$  függvények parciális deriváltjai folytonosak  $T$ -ben. Továbbá:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{(x^2 + y^2)(-1) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}, \end{aligned}$$

így

$$\iint_T \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \iint_T 0 dx dy = 0.$$

Az  $M dx + N dy$  integrálja a határon

$$\begin{aligned} \oint_C M dx + N dy &= \oint_{C_1} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + \oint_{C_h} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt - \int_0^{2\pi} \frac{h^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{h^2} d\theta \\ &= 2\pi - 2\pi = 0. \end{aligned}$$

Az  $M$  és  $N$  függvények a 6. példában nem folytonosak az origóban, így a Green-tételt nem alkalmazhatjuk a  $C_1$  körre a belsejével. Az origót ki kell hagyni, ahogy ki is hagyjuk, amikor nem tekintjük  $C_h$  belsejét.

A 6. példában helyettesíthetnénk a  $C_1$  kört egy ellipszissel, vagy bármely más egyszerű  $K$  zárt görbével, ami körülveszi  $C_h$ -t, az eredmény ugyanaz lenne:

$$\oint_K (M dx + N dy) + \oint_{C_h} (M dx + N dy) = \iint_T \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

amiből arra következtethetünk, hogy

$$\oint_K (M dx + N dy) = 2\pi$$

minden ilyen  $K$  görbére. Könnyen magyarázhatjuk az eredményt, ha polárkoordinátákra váltunk:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ dx &= -r \sin \theta d\theta + \cos \theta dr, & dy &= r \cos \theta d\theta + \sin \theta dr. \end{aligned}$$

Így

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta}{r^2} = d\theta,$$

és  $\theta$   $2\pi$ -vel növekszik, ha egyszer körülmegyünk  $K$ -n az óramutató járásával ellentétes irányban.

40. **Konzervatív terek cirkulációja:** Ad a Green-tétel valamilyen információt konzervatív terek cirkulációjáról? Összhangban van ez valami mással, amit már tanultunk? Válaszunkat indokoljuk!

C: annak a tartománynak a határa, amelyet a görbék határolnak.  
 $y = 1 + x^4$ , felülről az  $y = 2$  görbék határolnak.

44.  $F = xe^y \mathbf{i} + 4x^2 \ln y \mathbf{j}$ .

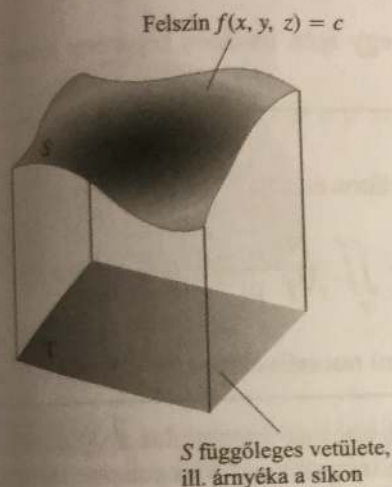
C: háromszög, melynek csúcsai:  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 4)$ .

## 16.5.

### Felület felszíne és felületi integrál

Tudjuk, hogyan kell integrálni egy (kétféle) függvényt egy síktartományon, de hogyan lehet függvényt integrálni egy görbült felületen? Egy ilyen ún. felületi integrált úgy számítunk ki, hogy átalaktjuk kettős integrállá egy olyan koordinátasíkbeli tartományon, amelyik a felület alatt fekszik (16.38. ábra). Felületi integrálokat használunk pl. ha azt akarjuk meghatározni, hogy mennyi folyadék folyik át egy hártán, vagy mekkora erő hat felfelé egy ejtőernyőre.

#### Felület felszíne

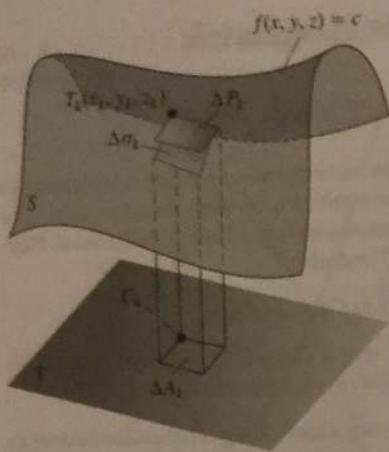


**16.38. ÁBRA** Amint hamarosan látni fogjuk, egy  $g(x, y, z)$  függvény  $S$  felület feletti integrálját ki lehet számítani, mint kettős integrált a felület valamelyik koordinátasíkra eső vetületén.

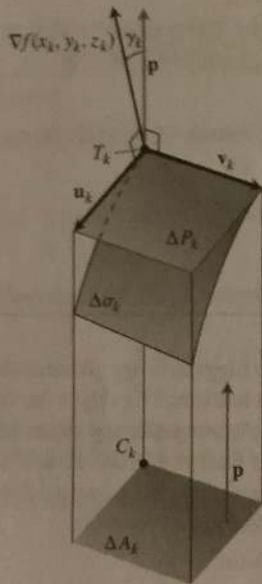
A 16.39. ábra egy felületet mutat az alatta levő síkra eső vetülete fölött. A felület az  $f(x, y, z) = c$  egyenlőséggel van definiálva. Ha a felület sima ( $\nabla f$  sehol nem a nulla vektor  $S$ -en), akkor definiálhatjuk és ki is számíthatjuk a felszínét a  $T$  vetületén vett kettős integrállal. Feltesszük, hogy a felület olyan, hogy a vetületének minden pontja egyetlen pontnak felel meg a felületen, azaz  $T$ -nek minden pontjához egyetlen olyan  $(x, y, z)$  van, hogy  $f(x, y, z) = c$ .

A terület definíciójához az első lépés, hogy a  $T$  tartományt kis  $A_k$  téglalapokra osztjuk fel. Minden ilyen kis téglalap felett egy felületdarab fekszik, amelynek  $\Delta\sigma_k$  területét a  $T_k(x_k, y_k, z_k)$  ponthoz tartozó érintősíkban levő paralelogramma  $\Delta P_k$  területével közelítjük. A  $P_k$  paralelogramma pontosan  $A_k$  felett van. A  $T_k(x_k, y_k, z_k)$  pont  $A_k$  egyik sarka fölött van, a 16.39. ábrán a bal hátsó  $C_k$  sarok fölött. Ha az érintősík párhuzamos  $T$  síkjával, akkor a két paralelogramma egybevágó, és területük azonos, más esetben  $P_k$  területe nagyobb, mint  $A_k$ -é.

A 16.40. ábrán kinagyítva láthatjuk a  $\sigma_k$  felületdarabot, a  $P_k$  paralelogrammát és az  $A_k$  téglalapot, amelyeknek területei rendre  $\Delta\sigma_k$ ,  $\Delta P_k$  és  $\Delta A_k$ . Az ábra mutatja a  $\nabla f(x_k, y_k, z_k)$  gradiensvektort és a  $T$ -re merőleges  $\mathbf{p}$  egységvektort. Az ábra  $\nabla f$  és  $\mathbf{p}$   $\gamma_k$  szögét is mutatja. Az ábrán látható többi vektor,  $\mathbf{u}_k$  és  $\mathbf{v}_k$ , a  $P_k$  paralelogramma élei mentén fekszenek. Így  $\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k$  és  $\nabla f$  is merőlegesek az érintősíkra. A vektorgeometriából tudjuk (F.9. függelék), hogy az  $\mathbf{u}_k$ ,  $\mathbf{v}_k$  vektorok



16.39. ÁBRA Az  $S$  felület és a vetülete egy alatta levő síkra. Az érintősík  $P_k$  paralelogrammája a  $\sigma_k$  felületdarab közelítése.



16.40. ÁBRA Az előző ábra egy darabjának kinagyítása. Az  $\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k$  vektor (itt nincs mutatva) párhuzamos  $\nabla f$ -fel, mert mindkettő merőleges az érintősíkra.

által meghatározott paralelogramma vetületének területe egy  $\mathbf{p}$  normálvektori síkban  $|(\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{p}|$ . A mi esetünkben ez azt jelenti, hogy

$$|(\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{p}| = \Delta A_k.$$

Tudjuk, hogy  $|\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k|$  éppen a  $\Delta P_k$  terület, így az utóbbi egyenlőség a következőket jelenti:

$$\underbrace{|\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k|}_{\Delta P_k} \cdot \underbrace{|\mathbf{p}|}_1 \cdot \underbrace{|\cos(\mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k \text{ és } \mathbf{p} \text{ közötti szög})|}_{\text{Ugyanaz, mint } |\cos \gamma_k|, \text{ mert } \nabla f \text{ és } \mathbf{u}_k \times \mathbf{v}_k \text{ mindkettő merőlegesek az érintősíkra}} = \Delta A_k,$$

azaz

$$\Delta P_k |\cos \gamma_k| = \Delta A_k,$$

vagyis

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|},$$

feltéve, hogy  $\cos \gamma_k \neq 0$ . Ha  $\nabla f$  nem párhuzamos az alapsíkkal, akkor  $\cos \gamma_k \neq 0$  és  $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$ .

Mivel  $\Delta P_k$   $\Delta \sigma_k$  egy közelítése, és az egymást át nem fedő  $\sigma_k$ -k egyesítése az  $S$  felület, a

$$\sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|} \tag{16.26}$$

összeg annak a közelítésének tűnik, amit  $S$  felszínének akarunk hívni. Az is látszik, hogy ha finomítjuk  $T$  felosztását, a közelítés egyre jobb lesz. A jobb oldal a

$$\iint_T \frac{1}{\cos \gamma} dA \tag{16.27}$$

kettős integrál integrálközelítő összege. Ezért az  $S$  felület felszínét ezzel a kettős integrállal definiáljuk, amennyiben ez létezik. Minden  $f(x, y, z) = c$  felület esetén  $|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\nabla f| |\mathbf{p}| |\cos \gamma|$ , így

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|}.$$

Ezt a (16.27) egyenlőségbe helyettesítve egy igen hasznos képlethez jutunk a felszín számításához.

**Képlet a felszín számításához**

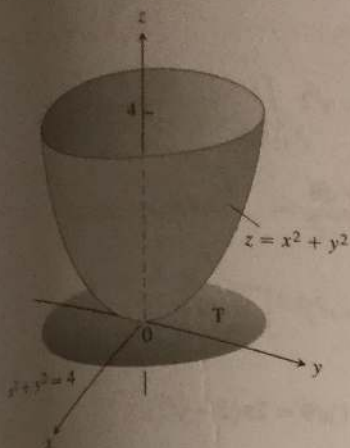
Az  $f(x, y, z) = c$  felület felszíne egy korlátos és zárt  $T$  síktartomány felett

$$\text{Felületdarab felszíne} = \iint_T \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA, \tag{16.28}$$

ahol  $\mathbf{p}$  a  $T$  síkjának egy egységnyi hosszú normálvektora, és  $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$ .

Azaz a felszín egy  $T$  feletti kettős integrál, ahol az integrandus a  $\nabla f$  abszolút értékének és  $\nabla f$   $T$  síkja normálvektorának irányába eső komponense abszolút értékének hányadosa.

A (16.28) egyenlőséget azzal a feltétellel kaptuk, hogy  $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$  és  $f$  folytonos. Ha az integrál létezik, akkor ezt az értéket tekintjük a felület felszínének  $T$  felett. (Ne felejtjük el, hogy a vetítésnél  $T$  minden pontjába a felületnek egyetlen pontját vetítjük. A 11. feladatban látni fogjuk, hogy a képlet nagyon leegyszerűsödik, ha a felület  $z = f(x, y)$  alakban van megadva.



16.41. ÁBRA A parabolikus felület felszíne az 1. példában.

### 1. PÉLDA Felület felszínének kiszámítása

Mekkora a felszíne az  $x^2 + y^2 - z = 0$  paraboloid azon darabjának, amit a  $z = 4$  sík vág le belőle?

**Megoldás.** Először felvázoljuk az  $S$  felületet és alatta a  $T$  tartományt az  $xy$ -síkon (16.41. ábra). A felület az  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$  szintfelület, és  $T$  az  $x^2 + y^2 \leq 4$  körlap az  $xy$ -síkon. A  $T$ -re merőleges egységvektor  $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ . A felület bármely  $(x, y, z)$  pontjában

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$|\nabla f| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

$$|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1.$$

Ebben a tartományban  $dA = dx dy$ . Így

$$\text{Felület felszíne} = \iint_T \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA \quad (16.28) \text{ egyenlőség}$$

$$= \iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta \quad \text{Polárkoordinátáson}$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi \left[ \frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (17^{3/2} - 1) d\theta = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1). \quad \square$$

### 2. PÉLDA Felület felszínének kiszámítása

Mekkora a felszíne annak a felületnek, ami az  $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$  félgömbből az  $x^2 + y^2 = 1$  henger belsejébe esik?

**Megoldás.** Az  $S$  felület az  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2$  szintfelület része. Az  $xy$ -síkra való vetülete a  $T: x^2 + y^2 \leq 1$  körlap, és ennek minden pontjára a felület egyetlen pontjának vetülete esik. A  $\mathbf{p} = \mathbf{k}$  egységvektor merőleges  $T$ -re. A felület minden pontjában

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

$$|\nabla f| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2}$$

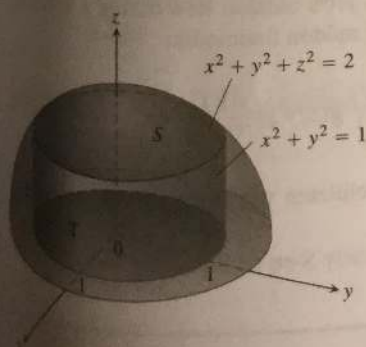
$$|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = |2z| = 2z.$$

Következésképp

$$\text{Felület felszíne} = \iint_T \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \iint_T \frac{2\sqrt{2}}{2z} dA = \sqrt{2} \iint_T \frac{dA}{z}. \quad (16.29)$$

Mit csináljunk  $z$ -vel? Mivel  $z$  a gömbfelület pontjának koordinátája, kifejezhetjük  $x$ -szel és  $y$ -nal, mint

$$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$$



16.42. ÁBRA A félgömbből a henger által kivágott rész vetülete az  $xy$ -síkon  $T: x^2 + y^2 \leq 1$  körlap (2. példa).



Folytatjuk a (16.29) integrál számítását:

$$\begin{aligned} \text{Felület felszíne} &= \sqrt{2} \iint_T \frac{dA}{z} = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dA}{\sqrt{2-x^2-y^2}} = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r \, dr \, d\theta}{\sqrt{2-r^2}} = \quad \text{Polárkoordinátáson} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[ -(2-r^2)^{1/2} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}-1) d\theta = 2\pi(2-\sqrt{2}). \quad \square \end{aligned}$$

### Felületi integrálok

Most rátérünk arra, hogyan számítunk integrált felület mentén, felhasználva azt a gondolatot, ahogy felszínt számítottunk.

Tegyük fel, hogy elektromos töltés oszlik el egy  $f(x, y, z) = c$  felületen, amit a 16.43. ábra mutat. A  $g(x, y, z)$  függvény adja a töltés nagyságát egységnyi területre vonatkoztatva (azaz a töltéssűrűséget). A teljes töltést az  $S$  felületen a következőképp számítjuk ki.

Felosztjuk a felület  $T$  vetületét az alapsíkon a felület alatt kis téglalapokra, ahogy azt a felszínszámításnál is tettük. Ekkor minden  $A_k$  téglalap felett van egy  $\sigma_k$  felületdarab, aminek  $\Delta\sigma_k$  területét az érintősík paralelogrammájának  $\Delta P_k$  területével közelítjük (16.43. ábra). Ha a felosztás elég finom, és a felületdarabon a töltés sűrűsége csak kevéssel különbözik az egyik csúcspontban levő értéktől, és a felületdarab felszíne is kevéssel különbözik a paralelogramma területétől, akkor a  $\sigma_k$  felületdarabon levő teljes töltést a  $g(x_k, y_k, z_k) \Delta P_k$  szorzat jól közelíti. A felületen levő teljes töltésmennyiség egy közelítése ekkor:

$$\text{Teljes töltés} = \sum g(x_k, y_k, z_k) \Delta P_k = \sum g(x_k, y_k, z_k) \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|}.$$

Ha a felületet definiáló  $f$  függvény első parciális deriváltjai folytonosak, és a  $g$  függvény is folytonos  $S$  felett, akkor a jobb oldalon levő összeg a következő integrált közelíti, ha a felosztás a szokott módon finomodik:

$$\iint_T g(x, y, z) \frac{dA}{|\cos \gamma|} = \iint_T g(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA. \quad (16.30)$$

Ezt az integrált hívjuk a  $g$  függvény  $S$  felületen vett integráljának, és úgy számítjuk, mint kettős integrált  $T$ -n.

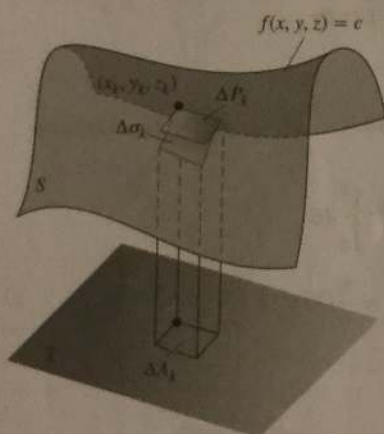
Ahogy sejtjük is, a (16.30) képlet bármely  $S$ -en értelmezett  $g$  függvény integráljára vonatkozik.

#### DEFINÍCIÓ Felületi integrál

Ha  $T$  az  $f(x, y, z) = c$  egyenlőséggel definiált  $S$  felület vetülete, és  $g$  egy folytonos függvény, ami  $S$  pontjaiban definiálva van, akkor az

$$\iint_T g(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA \quad (16.31)$$

integrált  $g$   $S$ -en vett integráljának nevezzük, magát az integrált felületi integrálnak hívjuk.



16.43. ÁBRA Ha tudjuk, hogy  $g(x, y, z)$  elektromos töltés oszlik el egy felületen, akkor a teljes töltést egy megfelelő integrállal számíthatjuk ki.

A (16.31) integrálnak a kifelésből alkalmas irányban kiválasztott jelölést van. Ha  $g$  értéke azonosan 1, akkor az integrál a felület felület. Ha  $g$  a vékony felületen való anyag sűrűsége (sűrűséggyűrűs vonatkozásban), akkor az integrál a felület tömegét adja. Az  $(\nabla f)/|\nabla f \cdot \mathbf{p}| dA$  kifejezés rövidíthetjük  $dy$ -vel.

**A felületdifferenciál, és a felületi integrál differenciális alakja**

$$d\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA \qquad \iint_S f d\mathbf{n} \qquad (16.32)$$

felületdifferenciál                      felületi integrál differenciális alakja

A felületi integráloknek ugyanolyan tulajdonságuk vannak, mint más kettes integrálok. A tartomány additívitás alakja a következő:

$$\iint_S f d\mathbf{n} = \iint_K f d\mathbf{n} + \iint_L f d\mathbf{n} + \dots + \iint_N f d\mathbf{n}$$

Ha  $S$  felületből véges sok darabból áll, egymáshoz nem felelő véges felületdarabok (azaz ha  $S$  darabokból áll), akkor az  $S$ -en vett felületi integrál számítható, mint a darabokra vett integrálok összege. Így pl. egy kockafelületen vett integrál számítható úgy, hogy az oldalakra külön-külön kiszámítjuk, majd az eredményeket összeadjuk.

### 3. PÉLDÁK Felületi integrál

Integráljuk a  $g(x, y, z) = xyz$  függvényt annak a kockának a felületén, amelyet az első oktetánsból az  $x = 1, y = 1, z = 1$  síkok vágnak ki!

**Megoldás.** Integráljuk  $xyz$ -t mind a hat oldal felületén, és azután adjuk össze az eredményeket. A koordinátasíkokon  $xyz = 0$ , így az integrálok nullák. Az egész felületre tehát

$$\iint_{\text{Kocka felületén}} xyz d\mathbf{n} = \iint_{A \text{ oldal}} xyz d\mathbf{n} + \iint_{B \text{ oldal}} xyz d\mathbf{n} + \iint_{C \text{ oldal}} xyz d\mathbf{n}$$

Az  $A$  oldalon  $f(x, y, z) = z = 1$  az  $xy$ -síkon  $T_{xy}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  egyenlőséggel leírható. Ez az felület, ill. tartományja

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}, \quad \nabla f = \mathbf{k}, \quad |\nabla f| = 1, \quad |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,$$

$$d\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \mathbf{k} dx dy = dx dy,$$

$$xyz = xy(1) = xy$$

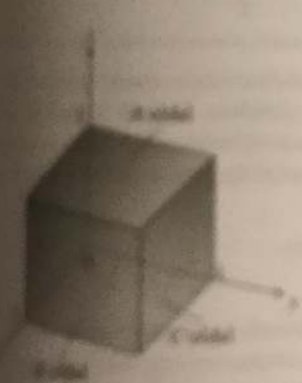
$$\iint_{A \text{ oldal}} xyz d\mathbf{n} = \iint_K xy dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy = \int_0^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{4}$$

A szimmetria tulajdonságok alapján a  $B$  és  $C$  oldalakon az integrál szintén  $1/4$ .

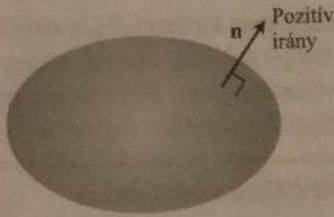
$$\iint_{\text{Kocka felületén}} xyz d\mathbf{n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \square$$

### Irányítás

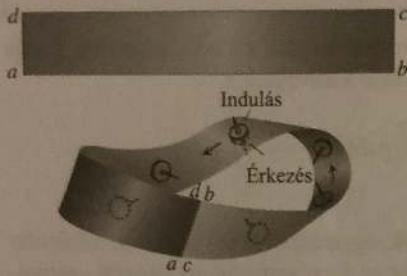
Egy síkos felületet irányíthatónak vagy kétoldalasnak nevezünk, ha létezik egy olyan vektormező, ami a felület egységnyi hosszú, a helytől független folytonosan változó normálvektorából áll.



A kocka a 3. példában.



16.45. ÁBRA Sima, zárt felületek a térben irányíthatóak. A kifelé mutató normálvektor definiálja a pozitív irányt minden pontban.



16.46. ÁBRA Egy Möbius-szalagot úgy csinálhatunk, hogy egy  $abcd$  papírsík egyik végén egyet csavarunk, és úgy ragasztjuk össze, hogy az  $a$  csúcs  $c$ -hez kerüljön, a  $b$  csúcs pedig  $d$ -hez. A Möbius szalag nem irányítható, egy-oldalú felület.

Egy irányítható felület minden részfelülete is irányítható. A gömbök és más sima, zárt felületek a térben (olyan sima felületek, amelyek testeket határolnak) irányíthatóak.

Ha  $\mathbf{n}$ -et megválasztottuk, akkor azt mondjuk, hogy **irányítottuk a felületet**, és a felületet az egységnyi hosszú normálisainak mezőjével együtt **irányított felületnek** nevezzük. Minden pontban az  $\mathbf{n}$  iránya a pozitív irány (16.45. ábra). Tradicionálisan az  $\mathbf{n}$  vektort egy zárt felületen kifelé mutatónak választjuk.

A Möbius-szalag (16.46. ábra) nem irányítható. Bárhol is kezdünk egy normálvektormezőt létesíteni (ami rajszögekkel van az ábrán ábrázolva), folytonosan haladva úgy jutunk vissza a kiindulóponthoz, hogy a normálvektorok ellenkező irányba mutatnak. Egy vektor nem mutathat kétfelé, így a vektorok nem változhatnak folytonosan az egész felületen.

### Vektormező felületmenti integrálja

Tegyük fel, hogy  $\mathbf{F}$  egy folytonos vektormező, ami definiálva van egy irányított felületen. Jelölje  $\mathbf{n}$  az irányított normálvektormezőt a felületen (ami egységvektorokból áll). Az  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  szorzat integrálját az  $S$  felületen az  $\mathbf{F}$  függvény felületmenti integráljának, vagy más szóval fluxusának nevezzük az  $S$  felületen pozitív irányban.

#### DEFINÍCIÓ Felületmenti integrál, másszóval fluxus

Egy háromdimenziós  $\mathbf{F}$  vektormező **felületmenti integrálja** az irányított  $S$  felület mentén  $\mathbf{n}$  irányában

$$\text{Felületmenti integrál} = \text{Fluxus} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (16.33)$$

Ez a definíció teljesen megegyezik a kétdimenziós esetre adott definíciójával a fluxusnak, bár azt ott kizárólag zárt görbékre, és nem irányított görbékre definiáltuk, sőt nem is említettük, hogy a normálvektorokat lehetne másképp is választani, mint kifelé. A kétdimenziós  $\mathbf{F}$  mező fluxusa a síkban a zárt  $C$  görbén kifelé mutató normálisokkal:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

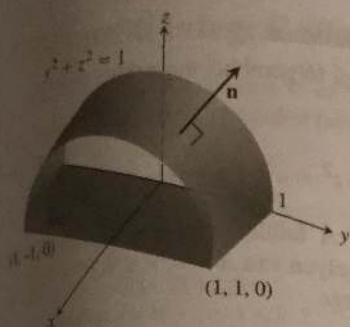
Ha  $\mathbf{F}$  egy áramló folyadék sebességvektormezője a háromdimenziós térben, akkor a fluxus az  $S$  felületen átáramló folyadékmennyiség nettó sebessége, azaz annyi, amennyi a folyadék mennyiségének megváltozása egy időegység alatt a felület pozitív oldalán. Ha egy zárt felületen ugyanannyi folyadék folyik be, mint ki, akkor a felületmenti integrál értéke, vagyis a fluxus, nulla.

Ha  $S$  egy része egy  $g(x, y, z) = c$  szintfelületnek, akkor  $\mathbf{n}$  a következő két mező közül választható

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|} \quad (16.34)$$

attól függően, melyik oldalt szeretnénk pozitívnak tekinteni. A megfelelő felületmenti integrál

$$\begin{aligned} \text{Felületmenti integrál} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\ &= \iint_T \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\pm \nabla g}{|\nabla g|} \right) \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|} \, dA \quad (16.32) \text{ és } (16.34) \text{ egyenlőség} \\ &= \iint_T \mathbf{F} \cdot \frac{\pm \nabla g}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|} \, dA. \end{aligned} \quad (16.35)$$



16.47 ABRA Felületmenti integrál számítása kifelé mutató normálissal. A felület területe 2 (4. példa).

#### 4. PÉLDA Felületmenti integrál (fluxus) meghatározása

Határozzuk meg az  $\mathbf{F} = yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$  mező felületmenti integrálját a hengerből kifelé irányított normálissal az  $y^2 + z^2 = 1$ ,  $0 \leq z$  hengerfelület azon darabján, amelyet az  $x = 0$ ,  $x = 1$  síkok vágnak ki belőle!

**Megoldás.**  $S$ -en a kifelé irányított normálvektormezőt számolhatjuk  $g(x, y, z) = y^2 + z^2$  gradienséből (16.47. ábra):

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2y\mathbf{i} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{2\sqrt{1}} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

(Ezek a vektorok valóban elfelé mutatnak az  $x$ -tengelytől.) Mivel  $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ ,

$$d\sigma = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{k}|} dA = \frac{2}{|2z|} dA = \frac{1}{z} dA.$$

Mivel  $z \geq 0$ , az abszolútértékjel elhagyható.

$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  a felületen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= (yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \\ &= y^2z + z^3 = z(y^2 + z^2) = \\ &= z. \end{aligned} \quad y^2 + z^2 = 1$$

Következésképp a felületmenti integrál (fluxus)  $S$ -en kifelé mutató normálissal

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_S (z) \left( \frac{1}{z} dA \right) = \iint_{T_{xy}} dA = (T_{xy} \text{területe}) = 2. \quad \square$$

### Vékony héjak tömege és nyomatékai

Vékony anyagi héjakat, mint pl. edényeket, fémdobokat, kupolákat felületekkel modellezünk. Tömegük és nyomatékaik a 16.3. táblázatban szereplő képletek alapján számíthatók.

**Tömeg:**  $M = \iint_S \delta(x, y, z) d\sigma$  ( $\delta(x, y, z)$  = sűrűség az  $(x, y, z)$  pontban tömeg egységnyi területre)

**Statikai nyomatékok (első momentum) a koordinátasíkokra vonatkoztatva:**

$$M_{yz} = \iint_S x\delta d\sigma, \quad M_{xz} = \iint_S y\delta d\sigma, \quad M_{xy} = \iint_S z\delta d\sigma$$

**Tömegközéppont koordinátái:**

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \quad \bar{y} = M_{xz}/M, \quad \bar{z} = M_{xy}/M$$

**Tehetetlenségi nyomaték a koordinátatengelyekre vonatkoztatva:**

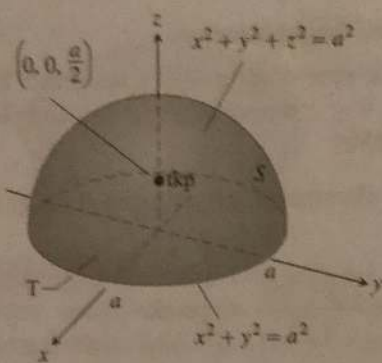
$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\delta d\sigma, \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\delta d\sigma,$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\delta d\sigma, \quad I_L = \iint_S r^2\delta d\sigma,$$

$r(x, y, z)$  = az  $(x, y, z)$  pont távolsága az  $L$  egyenestől.

**Tehetetlenségi sugár az  $L$  egyenesre vonatkoztatva:**  $R_L = \sqrt{I_L/M}$

16.3. TÁBLÁZAT Tömeg és nyomatékképletek igen vékony héjakra.



**16.48. ÁBRA** A vékony félgömbhéj tömegközéppontja a szimmetriatengelyen van, félúton az alap és a csúcs között (5. példa).

**5. PÉLDA Tömegközéppont meghatározása**

Hol van az  $a$  sugarú és konstans  $\delta$  sűrűségű félgömbhéj tömegközéppontja?

**Megoldás.** A félgömbhéjat az

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

függvénnyel modellezzük (16.48. ábra). A felület szimmetriája azt sugallja, hogy a tömegközéppont a szimmetriatengelyen van,  $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ . Már csak  $\bar{z} = M_{xy}/M$ -t kell meghatározni. A héj tömege

$$M = \iint_S \delta \, d\sigma = \delta \iint_S d\sigma = (\delta)(S \text{ területe}) = 2\pi a^2 \delta.$$

$M_{xy}$  meghatározásához  $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ -t veszünk, és

$$|\nabla f| = |2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2a$$

$$|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = |2z| = 2z$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \frac{a}{z} dA.$$

Ezután

$$M_{xy} = \iint_S z\delta \, d\sigma = \delta \iint_T z \frac{a}{z} dA = \delta a \iint_T dA = \delta a(\pi a^2) = \delta \pi a^3$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}.$$

A héj tömegközéppontja  $(0, 0, a/2)$ . □

**16.5. Feladatok**

**Felület felszíne**

1. Mekkora a felszíne annak a felületnek, amelyet  $z = 2$  sík vág le az  $x^2 + y^2 - z = 0$  paraboloidból?
2. Mekkora a felszíne annak a felületnek, amelyet  $z = 2$  és  $z = 6$  síkok váganak ki az  $x^2 + y^2 - z = 0$  paraboloidból?
3. Mekkora a felszíne annak a felületnek, amelyet az  $x + 2y + 2z = 5$  síkból váganak ki az  $x = y^2$  és  $x = 2 - y^2$  hengerek?
4. Mekkora a felszíne az  $x^2 - 2z = 0$  felület azon darabjának, amely az  $x = \sqrt{3}, y = 0, y = x$  egyenesek által határolt  $xy$ -síkbeli háromszög felett van?
5. Mekkora a felszíne az  $x^2 - 2y - 2z = 0$  felület azon darabjának, amely az  $x = 2, y = 0, y = 3x$  egyenesek által határolt  $xy$ -síkbeli háromszög felett van?
6. Mekkora a felszíne az  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ , gömbből a  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  kúp által kivágott rész tetejének?
7. Mekkora a területe annak az ellipszisnek, amelyet a  $z = cx$  ( $c$  konstans) síkból vág ki az  $x^2 + y^2 = 1$  henger?
8. Mekkora a felszíne az  $x^2 + z^2 = 1$  henger  $x = \pm 1/2, y = \pm 1/2$  síkok között fekvő felső darabjának?
9. Mekkora a felszíne az  $x = 4 - y^2 - z^2$  paraboloid azon darabjának, amelyik az  $yz$ -síkbeli  $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$  körgyűrű felett van?

11. Mekkora a felszíne az  $x^2 - 2 \ln x + \sqrt{15}y - z = 0$  felület azon darabjának, amelyik az  $T: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$   $xy$ -síkbeli négyzet felett fekszik?

12. Mekkora a felszíne az  $2x^{3/2} + y^{3/2} - z = 0$  felület azon darabjának, amelyik az  $T: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$   $xy$ -síkbeli négyzet felett fekszik?

**Felületi integrálok**

13. Integráljuk a  $g(x, y, z) = x + y + z$  függvényt annak a kockának a felületén, amelyet az  $x = a, y = a, z = a$  síkok váganak le az első tényolcadból!
14. Integráljuk a  $g(x, y, z) = y + z$  függvényt annak az éknek a felületén, amelyik az első tényolcaddban van és a koordinátasíkok, valamint az  $x = 2, y + z = 1$  síkok határolják!
15. Integráljuk a  $g(x, y, z) = xyz$  függvényt annak a téglatestnek a felületén, amelyet az  $x = a, y = b, z = c$  síkok váganak le az első tényolcadból!
16. Integráljuk a  $g(x, y, z) = xyz$  függvényt annak a téglatestnek a felületén, amelyet az  $x = \pm a, y = \pm b, z = \pm c$  síkok határolnak!
17. Integráljuk a  $g(x, y, z) = x + y + z$  függvényt a  $2x + 2y + z = 2$  sík első tényolcaddal.

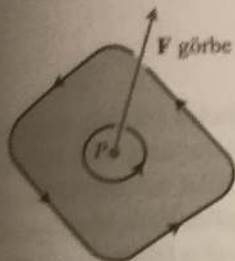
56. Adjuk meg a paraméteres egyenletét annak a felületnek, amelyet úgy kapunk, hogy az  $x = y^2, y \geq 0$  görbét megforgatjuk az  $x$ -tengely körül!

57. (a) Emlékezzünk az  $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$  ellipszis  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$  paraméterezésére. A

57. (Az előző feladat folytatása.) Adjuk meg a Descartes-féle koordinátákkal adott egyenletét az  $x^2 + y^2 - z^2 = 25$  hiperboloid érintősíkjának abban az  $(x_0, y_0, 0)$  pontban, ahol  $x_0^2 + y_0^2 = 25$ .

58. **Kétköpenyű hiperboloid:** Adjuk meg a  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  kétköpenyű hiperboloid egy paraméterezését!

## 16.7. Stokes-tétel



16.59. **ÁBRA** A circulásvektor a háromdimenziós áramlási tér egy  $P$  pontjában. Az ábra mutatja a pozitív circulás irányát.

Ahogy a 16.4. alfejezetben láttuk, a kétdimenziós  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$  vektormező circulásűrűsége (örvénysűrűsége) az  $(x, y)$  pontban a  $\partial N/\partial x - \partial M/\partial y$  skálár mennyiség volt. Már ott is emlegettük, hogy ez egy vektor  $\mathbf{k}$ -komponense. Három dimenzióban egy adott síkban levő adott  $P$  pont körüli circulás egy vektorral van jellemezve. A vektor merőleges a síkra a  $P$  pontban, és olyan irányú, hogy ha a hegye felől nézve a síkra a circulációt pozitív körüljárású görbén számoljuk, akkor nemnegatív circulációt kapunk (16.59. ábra). A vektor hossza a circulásűrűséget adja, így a sík irányától függően változik. Be lehet látni, hogy a leghosszabb ilyen vektor az  $(x, y, z)$  pontban az  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  vektormező esetén a **rotációsvektor**

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (16.44)$$

Ezt az információt a Stokes-tételből nyerjük, ami a Green-tétel általánosítása három dimenzióra.

Vegyük észre, hogy  $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = (\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$  összhangban van a korábbi definíciókkal, amikor a mező kétdimenziós  $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$  vektormező. A (16.44) képlet  $\mathbf{F}$  rotációjának definíciójában egy rövid, jól megjegyezhető alakba is írható, ha a  $\nabla$  operátort használjuk:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (16.45)$$

$\mathbf{F}$  rotációja  $\nabla \times \mathbf{F}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \text{rot } \mathbf{F}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \quad (16.46)$$

**1. PÉLDA**  $\mathbf{F}$  rotációjának meghatározása  
Adjuk meg  $\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$  rotációját!

**Megoldás.**

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} = && (16.46) \text{ egyenlőség} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(4z) \right) \mathbf{i} - \left( \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y) \right) \mathbf{j} + \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial x}(4z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) \right) \mathbf{k} = \\ &= (0 - 4)\mathbf{i} - (2x - 0)\mathbf{j} + (0 + 1)\mathbf{k} = \\ &= -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

A  $\nabla$  operátorral már korábban is találkoztunk. Most a vektorértékű  $\mathbf{F}$  függvénnyel „vektoriálisan szoroztuk”, de korábban, a skalárértékű  $f(x, y, z)$  függvénnyel „mintha skalárként szoroztuk volna” koordinátánként, és az eredmény a gradiensvektor lett:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

### Stokes-tétel

A Stokes-tétel azt mondja ki, hogy bizonyos feltételek mellett, amelyek a gyakorlatban általában teljesülnek, egy irányított felületet határoló zárt görbén vett cirkuláció, amennyiben a görbén a körüljárás a felület normálvektormezőjének irányából nézve az óramutató járásának irányával ellentétes, megegyezik a rotáció felületre merőleges komponensének integráljával a felületen (16.60. ábra).



16.60. ÁBRA Az irányított felület normálvektormezőjének irányából nézve az óramutató járásával ellentétes a határoló görbe körüljárási iránya.

#### 5. TÉTEL Stokes-tétel

Az  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  vektormező cirkulációja egy irányított  $S$  felület  $C$  határológörbéjén a felület  $\mathbf{n}$  normálvektormezőjének irányából nézve óramutató járásával ellentétes körüljárással egyenlő a  $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  függvény  $S$  felületmenti integráljával.

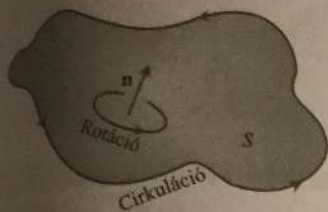
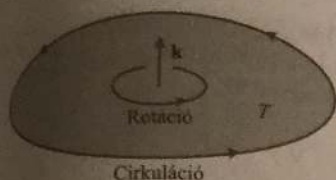
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (16.47)$$

cirkuláció rotáció integrálja

Természetesen az állítás csak bizonyos matematikai feltételek mellett igaz. A vektormezőre, a felületre és a határára is bizonyos kikötéseket kell tenni, pl. már csak azért is, hogy a szóbanforgó integrálok létezzenek. A legtöbbször egyszerűen azt tesszük fel, hogy a képletben előforduló összes függvény (beleértve a görbét és felületet definiálókat is) rendelkezzen folytonos deriválttal.<sup>1</sup> Vegyük észre, hogy a (16.47) egyenlőségből az is következik, hogy ha  $S_1$  és  $S_2$  két irányított felület ugyanazzal a  $C$  határológörbével, akkor

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \, d\sigma = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, d\sigma.$$

<sup>1</sup> Figyelem: Az integráltranszformációs képleteknél az adott feltételeknek minden pontban teljesülniük kell. Egyetlen pont kivétel is elronthatja az egyenlőség érvényességét!



16.61. ÁBRA A Green-tétel és a Stokes-tétel összehasonlítása.

Ha  $C$  egy görbe az  $xy$ -síkban, óramutató járásával ellentétes körüljárással, és  $T$  az  $xy$ -sík  $C$  által határolt tartománya, akkor

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right).$$

Ezeket az adatokat a Stokes-tételbe helyettesítve

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_T \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy,$$

ami nem más, mint az érintővektoros formája a Green-tételnek (16.61. ábra). Tehát a Green-tételt is felírhatjuk operátoros formában a kétdimenziós vektormezőkre

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_T \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA. \quad (16.48)$$

## 2. PÉLDA A Stokes-tétel ellenőrzése félgömbön

Számítsuk ki a (16.47) egyenlőség mindkét oldalán álló kifejezést, ha az  $S$  felület az  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $z \geq 0$  félgömbfelület, a normálisok felfelé mutatnak, a határoló görbe így  $C: x^2 + y^2 = 9$ , a vektormező pedig  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ .

**Megoldás.** Felülről nézve óramutató járásával ellentétes körüljárással  $C: \mathbf{r}(\theta) = (3 \cos \theta)\mathbf{i} + (3 \sin \theta)\mathbf{j}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

$$d\mathbf{r} = (-3 \sin \theta d\theta)\mathbf{i} + (3 \cos \theta d\theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} = (3 \sin \theta)\mathbf{i} - (3 \cos \theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -9 \sin^2 \theta d\theta - 9 \cos^2 \theta d\theta = -9 d\theta.$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -9 d\theta = -18\pi.$$

A rotáció integrálja pedig:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ &= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (-1 - 1)\mathbf{k} = -2\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{3}$$

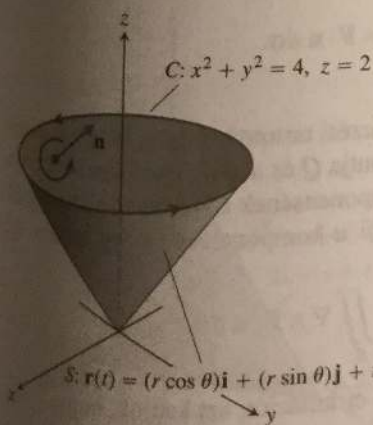
$$d\sigma = \frac{3}{z} dA$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\frac{2z}{3} \frac{3}{z} dA = -2dA.$$

és

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{x^2 + y^2 \leq 9} -2dA = -18\pi.$$

Tehát a két integrál megegyezik.  $\square$



16.62. ÁBRA A kúp és a görbe a 4. példában.

## 3. PÉLDA Cirkuláció meghatározása

Számítsuk ki az  $\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$  vektormező cirkulációját a  $z = 2$  sík és a  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  kúp metszetgörbéje mentén, felülről nézve óramutató járásával ellentétes irányítású körüljárással (16.62. ábra)!



**Megoldás.** A Stokes-tétel lehetővé teszi, hogy a kúpon integráljunk. A görbe körüljárása miatt, a kúp normálisainak befelé-felfelé kell mutatniuk. Ez azt jelenti,  $\mathbf{n}$  z-koordinátája pozitív. A kúp paraméterezése:

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Ebből nyerjük:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|} = \frac{-(r \cos \theta)\mathbf{i} - (r \sin \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}}{r\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-(\cos \theta)\mathbf{i} - (\sin \theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

16.6. alfejezet  
4. példa

$$d\sigma = r\sqrt{2} dr d\theta$$

16.6. alfejezet, 4. példa

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k} = \\ &= -4\mathbf{i} - 2r \cos \theta \mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

1. példa

Következésképp

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(4 \cos \theta + 2r \cos \theta \sin \theta + 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(4 \cos \theta + r \sin 2\theta + 1), \end{aligned}$$

a cirkuláció pedig

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}}(4 \cos \theta + r \sin 2\theta + 1)(r\sqrt{2} dr d\theta) = 4\pi. \quad \square \end{aligned}$$

### $\nabla \times \mathbf{F}$ szemléltetése lapátkerékkel

Tegyük fel, hogy  $\mathbf{v}(x, y, z)$  egy áramló folyadék sebessége, aminek sűrűsége az  $(x, y, z)$  pontban  $\delta(x, y, z)$ , és legyen  $\mathbf{F} = \delta \mathbf{v}$ . Ekkor

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

a folyadék cirkulációja a zárt  $C$  görbén. A Stokes-tétel szerint a cirkuláció egyenlő  $\nabla \times \mathbf{F}$  felületmenti integráljával a  $C$  által kifeszített  $S$  felületen.

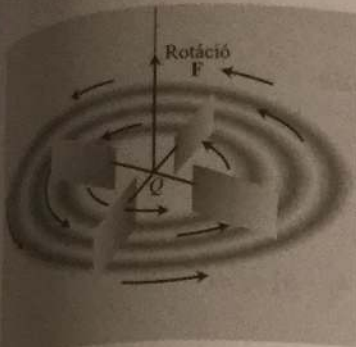
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Tegyük fel, rögzítünk egy  $Q$  pontot  $\mathbf{F}$  értelmezési tartományában, és egy  $\mathbf{u}$  irányt  $Q$ -ban. Legyen  $C$  egy  $\rho$  sugarú kör, középpontja  $Q$  és a síkja merőleges  $\mathbf{u}$ -ra. Ha  $\nabla \times \mathbf{F}$  folytonos  $Q$ -ban, akkor  $\nabla \times \mathbf{F}$   $\mathbf{u}$ -komponensének  $C$ -vel határolt körlapon vett integráljának középpértéke  $\nabla \times \mathbf{F}$   $Q$ -beli  $\mathbf{u}$ -komponenséhez fog tartani, ha  $\rho \rightarrow 0$ .

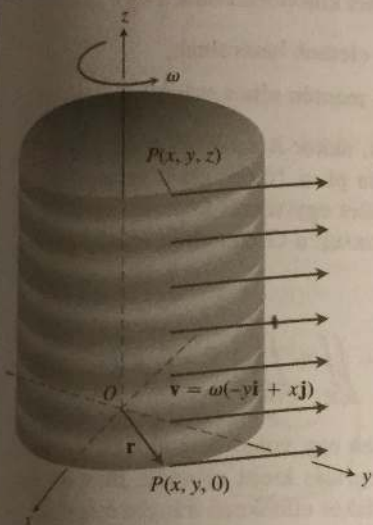
$$(\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u})_Q = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} d\sigma.$$

Ha ebbe az egyenlőségbe behelyettesítjük a cirkulációt, azt kapjuk, hogy

$$(\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u})_Q = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (16.49)$$



16.63. ÁBRA  $\text{rot } \mathbf{F}$  lapátkerek-szemléltetése.



16.64. ÁBRA Egy egyenletesen forgó áramlás konstans szögsebességgel pozitív forgásirányban (4. példa).

A (16.49) egyenlőség bal oldala akkor maximális, ha  $\mathbf{u}$  ugyanolyan irányú, mint  $\nabla \times \mathbf{F}$ . Ha  $\rho$  kicsi, a (16.49) egyenlőség jobb oldala megközelítőleg

$$\frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

ami a  $C$ -n vett cirkuláció osztva a körlemez területével (örvénysűrűség). Tegyük fel, hogy egy kicsi  $\rho$  sugarú lapátkereket helyezünk el  $Q$ -ba, aminek tengelye  $\mathbf{u}$  irányú. A kis kerék forgási sebessége a cirkulációtól (örvényléstől) függ, nagyobb cirkulációnál gyorsabb. Akkor fog a leggyorsabban forogni, ha tengelye  $\nabla \times \mathbf{F}$  irányába esik (16.63. ábra).

4. PÉLDA  $\nabla \times \mathbf{F}$  viszonya a cirkulációhoz

Egy állandó sűrűségű folyadék forog a  $z$ -tengely körül  $\mathbf{v} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$  sebességgel, ahol  $\omega$  pozitív konstans, úgynevezett *szögsebesség* (16.64. ábra). Ha  $\mathbf{F} = \mathbf{v}$ , adjuk meg  $\nabla \times \mathbf{F}$ -et, és viszonyítsuk a cirkulációsűrűséghez!

**Megoldás.** Mivel  $\mathbf{F} = \mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= (0-0)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (\omega - (-\omega))\mathbf{k} = 2\omega\mathbf{k}. \end{aligned}$$

A Stokes-tétel szerint  $\mathbf{F}$  cirkulációja egy  $\rho$  sugarú  $C$  körön ami egy  $S$  körlapot határol egy  $\nabla \times \mathbf{F}$ -re merőleges síkban, mondjuk pl. az  $xy$ -síkban:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_S 2\omega\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = (2\omega)(\pi\rho^2).$$

Azaz

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = 2\omega = \frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

ami összecseng a (16.49) egyenlőséggel, ha  $\mathbf{u} = \mathbf{k}$ . □

5. PÉLDA Stokes-tétel alkalmazása

Alkalmazzuk a Stokes-tételt az  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  integrál kiszámítására, ha  $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$ , és  $C$  a  $2x + y + z = 2$  sík első tényolcadba eső részének határoló görbéje, felülről nézve óramutató járásával ellentétes irányítással (16.65. ábra)!

**Megoldás.** A sík az  $f(x,y,z) = 2$  szintfelülete az  $f(x,y,z) = 2x + y + z$  függvénynek. Az egységnyi normálvektor

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

éppen megfelelő irányú a körüljáráshoz. A Stokes-tétel alkalmazásához ki kell számítanunk

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = (x - 3z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}.$$

A síkon  $z = 2 - 2x - y$ , így

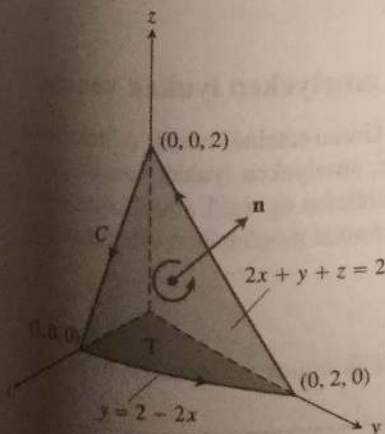
$$\nabla \times \mathbf{F} = (x - 3(2 - 2x - y))\mathbf{j} + y\mathbf{k} = (7x + 3y - 6)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

és

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x + 3y - 6 + y) = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x + 4y - 6).$$

A felületi területelem

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{k}|} dA = \frac{\sqrt{6}}{1} dx \, dy.$$

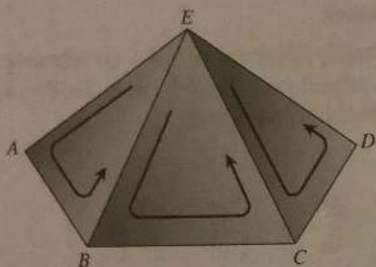


16.65. ÁBRA A sík felület (5. példa).

A cirkuláció

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \frac{1}{\sqrt{6}} (7x+4y-6) \sqrt{6} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (7x+4y-6) \, dy \, dx = -1. \end{aligned}$$

□



16.66. ÁBRA Egy poliéderfelület egy részlete.

**A Stokes-tétel bizonyítása poliéderfelületre.** Legyen  $S$  olyan felület, ami véges sok síktartományból áll (például 16.66. ábra). A Green-tételt alkalmazzuk minden egyes síkelemre. Kétféle síkelemet különböztetünk meg.

1. Amelyeket minden oldalról más elemek határolnak,
2. Amelyeknek egy vagy több élük mentén nincs másik kapcsolódó elem.

Ha az  $S$ -et határoló görbét  $\Delta$ -val jelöljük, akkor  $\Delta$  azokból az élekből áll, amelyekhez nem csatlakozik másik elem. Ha pl. a 16.66. ábrát vesszük, akkor az  $EAB, BCE, CDE$  háromszögek az  $S$  felület egy részét képezik, az  $ABCD$  poligon pedig a  $\Delta$  határ egy részét. Alkalmazzuk a Green-tételt mind a három háromszögre, és adjuk össze

$$\left( \oint_{EAB} + \oint_{BCE} + \oint_{CDE} \right) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left( \iint_{EAB} + \iint_{BCE} + \iint_{CDE} \right) \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad (16.50)$$

A bal oldali három vonalintegrál összesen egy vonalintegrál a kerület mentén, mert a csatlakozó éleken oda-vissza integrálás kiejti egymást. Pl. a  $BE$  szakaszon az  $ABE$  háromszögön való integrálásakor ellenkező irányba megyünk, mint amikor az  $EBC$  vonalon integrálunk. Tehát ezekre a háromszögekre azt kaptuk, hogy

$$\oint_{ABCDE} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{ABCDE} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

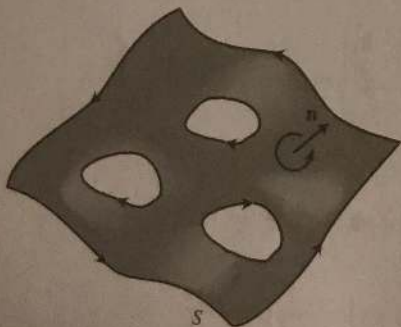
Ha a Green-tételt a síktartományokból álló felület minden elemére alkalmazzuk és összeadjuk az eredményeket, azt kapjuk, hogy

$$\oint_{\Delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma. \quad \square$$

Ez a Stokes-tétel bizonyítása poliéderfelületre. Általánosabb felületekre komolyabb könyvekben keressünk bizonyítást.

**A Stokes-tétel olyan felületekre, amelyeken lyukak vannak**

Hasonló megfontolással, mint azt a Green-tételnél tettük, a Stokes-tétel is kiterjeszhető olyan irányított felületekre, amelyeken lyukak vannak: A  $\nabla \times \mathbf{F}$  normálkomponensének integrálja az  $S$  felületen egyenlő a határokon számított vonalintegrálok összegével, ha a körüljárásukat megfelelően választjuk meg.



16.67. ÁBRA A Stokes-tétel olyan irányított felületekre is érvényes, amelyen lyukak vannak.

**Egy fontos azonosság**

A következő azonosságra gyakran van szükségünk matematikai és fizikai számításokban:

$$\text{rot grad } f = \mathbf{0} \quad \text{vagy} \quad \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}. \quad (16.51)$$

Ez az azonosság minden olyan  $f(x, y, z)$  függvényre fennáll, amelyeknek második parciális deriváltjai folytonosak. A bizonyítás:

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\mathbf{i} - (f_{zx} - f_{xz})\mathbf{j} + (f_{yx} - f_{xy})\mathbf{k}.$$

Ha a második parciális deriváltak folytonosak, akkor a vegyes parciális deriváltak egyenlők (2. Tétel), így ez a vektor a nullvektor.

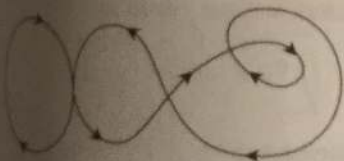
### Konzervatív vektormezők és a Stokes-tétel

A 16.3. alfejezetben megállapítottuk, hogy ha  $\mathbf{F}$  konzervatív egy nyílt  $D$  tartományon, az ekvivalens azzal, hogy ebben a tartományban haladó minden zárt görbén vett integrálja nulla. Ez egyszerűen összefüggő nyílt tartomány esetében azzal is ekvivalens, hogy  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ .

**6. TÉTEL. A zárt görbén vett integrál nulla volta, és a  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$  közötti összefüggés**

Ha  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  egy egyszerűen összefüggő  $D$  nyílt tartomány minden pontjában, akkor bármely a  $D$ -ben haladó szakaszonként sima, zárt  $C$  görbére érvényes, hogy

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

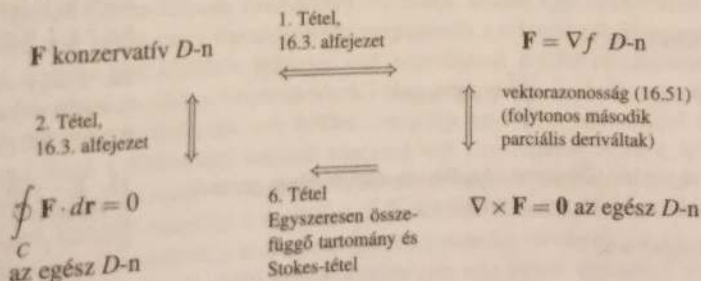


**A bizonyítás vázlata.** A tétel bizonyítását általában két lépésben végzik. Először egyszerű, zárt görbékre. A topológia egy tétele azt mondja ki, hogy egy egyszerűen összefüggő, nyílt tartományban minden differenciálható egyszerű, zárt  $C$  görbe határa egy irányítható sima  $S$  felületnek, ami szintén  $D$ -ben van. Következésképp, a Stokes-tétel szerint

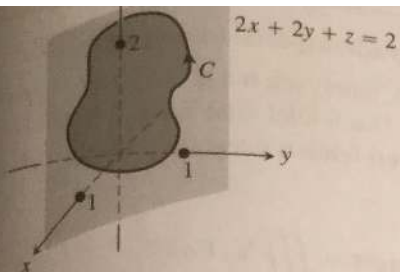
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0.$$

A második lépés olyan görbék vizsgálata, amelyek átmetszik magukat, mint pl. a 16.68. ábrán. Az ötlet az, hogy ezeket a görbéket egyszerű görbékre daraboljuk fel, ezekre alkalmazzuk a Stokes-tételt, majd az eredményeket összeadjuk.  $\square$

A következő diagram összegzi a konzervatív vektormezők tulajdonságait összefüggő és ugyanakkor egyszerűen összefüggő, nyílt tartományokon.



**FIG. 16.68A** Egy egyszerűen összefüggő, nyílt tartományban olyan differenciálható görbék, amelyek átmetszik magukat, felbonthatók olyan zárt részgörbékre, amelyekre a Stokes-tétel már érvényes.



$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

integrál nem nulla, ha  $C$  az  $xy$ -síkban az  $x^2 + y^2 = 1$  kör! (A 6. Tétel itt nem alkalmazható, mert  $\mathbf{F}$  értelmezési tartománya nem egyszeresen összefüggő, a teljes  $z$  tengely hiányzik belőle. Az adott  $C$  görbét nem lehet egy pontra összehúzni úgy, hogy közben mindig teljes egészében az értelmezési tartományban maradjon.)

16.8.

## A Gauss–Osztrogradszkij-tétel

A síkbeli Green-formula normálvektoros alakja szerint egy vektormező egyszerű, zárt görbe menti vonalintegrálja megegyezik a vektormező divergenciájának a görbe által körülzárt felületen vett integráljával. A tétel háromdimenziós általánosítása, a Gauss–Osztrogradszkij-tétel azt mondja ki, hogy egy térbeli vektormező zárt felületen vett felületi integrálja egyenlő a vektormező divergenciájának a felület által határolt térrészen vett integráljával. A 16.8. részben bebizonyítjuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt, és megnézzük, hogy hogyan lehet felületi integrált számolni a segítségével. Levezetjük Gauss törvényét az elektromos mező fluxusáról, a hidrodinamika folytonossági törvényét, végül a vektormezők integráljáról szóló tételek eredményét egy közös, egyesített elvként foglaljuk össze.

### Divergencia a háromdimenziós térben

Az  $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$  vektormező divergenciája a következő skalárfüggvény:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (16.52)$$

A  $\text{div } \mathbf{F}$  jelölést „ $\mathbf{F}$  divergenciájának” vagy „ $\text{div } \mathbf{F}$ ”-nek olvassuk. A  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  kiolvasva „nabla  $\mathbf{F}$ ”.

A háromdimenziós  $\text{div } \mathbf{F}$  fizikai értelmezése hasonló a kétdimenzióshoz. Ha  $\mathbf{F}$  egy áramló folyadék sebességmezője, akkor  $\text{div } \mathbf{F}$  értéke egy  $(x, y, z)$  pontban megmutatja, hogy a folyadéknak milyen bő forrása vagy nyelője az  $(x, y, z)$  pont. (Tehát, hogy az adott pontban keletkezik vagy eltűnik-e folyadék, és ha igen, milyen sebességgel?)

A divergencia az egységnyi térfogatra eső fluxus, vagy másképpen a pontbeli fluxussűrűség.

**1. PÉLDA A divergencia kiszámolása**

Számoljuk ki az  $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$  vektormező divergenciáját!

**Megoldás.**  $\mathbf{F}$  divergenciája

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2z - x - 1. \quad \square$$

**A Gauss–Osztrogradszkij-tétel**

A Gauss–Osztrogradszkij-tétel azt mondja ki, hogy megfelelő feltételek teljesülése esetén egy vektormezőnek egy zárt (kifelé irányított) felületen vett felületi integrálja egyenlő a vektormező divergenciájának a felület által határolt térrészen vett integráljával. A Gauss–Osztrogradszkij-tételt szokás Gauss-tételnek, vagy divergenciatételnek is nevezni.

**7. TÉTEL Gauss–Osztrogradszkij-tétel (divergenciatétel)**

Legyen  $S$  egy irányított felület, amelynek  $\mathbf{n}$  a kifelé mutató egységvektorokból álló normálmezője, és  $D$  a felület által határolt tartomány. Ekkor az  $\mathbf{F}$  vektormezőnek az  $S$ -en vett felületi integrálja egyenlő  $\nabla \cdot \mathbf{F}$   $D$ -n vett integráljával:

$$\underbrace{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma}_{\text{felületi integrál}} = \underbrace{\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV}_{\text{a divergencia integrálja}}. \quad (16.53)$$

**2. PÉLDA A Gauss–Osztrogradszkij-tétel két oldala**

Számoljuk ki a (16.53) egyenlőség két oldalán szereplő mennyiségeket, ha a vektormező  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  és a zárt felület az  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  gömbhéj!

**Megoldás.** Az  $S$  gömb kifelé mutató normálmezőjét az  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$  függvény gradiensmezőjének normálásával kapjuk:

$$\mathbf{n} = \frac{2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}.$$

Így

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a,$$

mivel a gömb felszínén  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Tehát a (16.53) képlet bal oldala:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_S a d\sigma = a \iint_S d\sigma = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3.$$

$\mathbf{F}$  divergenciája

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3,$$

így (16.53) jobb oldala:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_D 3 dV = 3 \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right) = 4\pi a^3. \quad \square$$

### 3. PÉLDA Felületmenti integrál (fluxus) kiszámolása

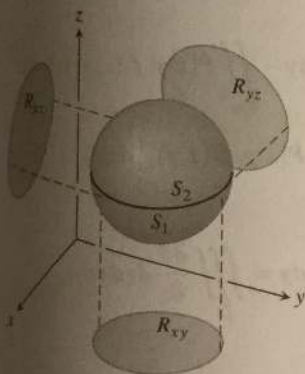
Számoljuk ki az  $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$  vektormező felületmenti integrálját a pozitív térfogadból az  $x = 1, y = 1$  és  $z = 1$  síkok által kivágott kocka felszínén!

**Megoldás.** Ahelyett, hogy a felületi integrált a kocka hat oldalán kiszámolt integrál összegeként keressük, integráljuk inkább a

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

divergenciát a kocka belsején:

$$\begin{aligned} \text{felületi integrál} &= \iint_{\text{kocka felszíne}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\text{kocka belseje}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV && \text{Gauss–Osztrogradskij-tétel} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x+y+z) dx dy dz = \frac{3}{2}. && \text{rutinszámolás} \quad \square \end{aligned}$$



### A Gauss–Osztrogradskij-tétel bizonyítása speciális tartományokra

A bizonyításhoz tegyük fel, hogy  $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$  első parciális deriváltjai folytonosak,  $D$  egy konvex tartomány lyukak és buborékok nélkül, mint például egy gömb, kocka vagy ellipszoid, és hogy az  $S$  felszíne néhány, külön-külön síma felületből áll. Jelöljük  $D$ -nek az  $xy$ -síkra való vetületét  $R_{xy}$ -nal, és tegyük fel azt is, hogy minden olyan egyenes, amely merőleges az  $xy$ -síkra, és azt  $R_{xy}$ -nak belső pontjában metszi, pontosan két pontban metszi  $S$ -t. Ez a két metszéspont két részre bontja  $S$ -t, egy alsó  $S_1$  és egy felső  $S_2$  részre:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ (x, y, z) \in S \mid z = f_1(x, y), (x, y) \in R_{xy} \right\}, \\ S_2 &= \left\{ (x, y, z) \in S \mid z = f_2(x, y), (x, y) \in R_{xy} \right\}, \end{aligned}$$

ahol  $f_1 \leq f_2$ . Feltesszük, hogy  $D$  az  $yz$ - és  $zx$ -síkokra merőleges irányokból is hasonlóan viselkedik. (Lásd a 16.69. ábrát.)

Jelölje az  $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$  egységnormális  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  és  $\mathbf{k}$  bázisvektorokkal bezárt szögét  $\alpha, \beta$  és  $\gamma$ . Ekkor  $\mathbf{n}$  komponensei  $\alpha, \beta$  és  $\gamma$  koszinuszai lesznek (16.70. ábra), hiszen  $\mathbf{n}$  egységvektor. Tehát

$$\begin{aligned} n_1 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{n}| |\mathbf{i}| \cos \alpha = \cos \alpha, \\ n_2 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{n}| |\mathbf{j}| \cos \beta = \cos \beta, \\ n_3 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{n}| |\mathbf{k}| \cos \gamma = \cos \gamma. \end{aligned}$$

Így

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j} + (\cos \gamma)\mathbf{k}$$

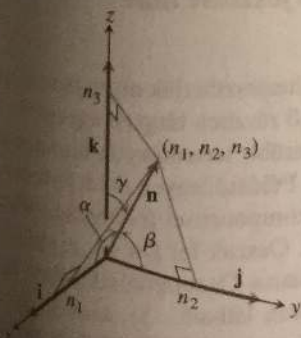
és

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = M \cos \alpha + N \cos \beta + P \cos \gamma.$$

Kiírva a komponenseket, a Gauss–Osztrogradskij-tétel így szól:

$$\iint_S (M \cos \alpha + N \cos \beta + P \cos \gamma) d\sigma = \iiint_D \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

16.69. ÁBRA A Gauss–Osztrogradskij-tételt először ilyen speciális tartományokra bizonyítjuk, majd kiterjesztjük általánosabb tartományokra is.



16.70. ÁBRA Az  $\mathbf{n}$  egységnormális komponensei az  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  és  $\mathbf{k}$  bázisvektorokkal bezárt  $\alpha, \beta$  és  $\gamma$  szögek koszinusza.

Így a gömbfelületen

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{y}\mathbf{j} + \mathbf{z}\mathbf{k}}{a^3} \cdot \frac{\mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{y}\mathbf{j} + \mathbf{z}\mathbf{k}}{a} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2},$$

és a felületi integrál

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} d\sigma = \frac{1}{a^2} (4\pi a^2) = 4\pi.$$

Tehát  $\mathbf{F}$  felületi integrálja egy tetszőleges sugarú, origó közepű gömbhéjon  $4\pi$ .  $\square$

### Az elektrosztatika Gauss-törvénye

Érdemes még tovább tanulmányozni a 4. példát. Az elektrosztatikából tudjuk, hogy az origóba helyezett  $q$  pontszerű töltés által létrehozott elektromos mező

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}|^2} \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}\mathbf{i} + \mathbf{y}\mathbf{j} + \mathbf{z}\mathbf{k}}{\rho^3},$$

ahol  $\mathbf{r}$  az  $(x, y, z)$  pont helyvektora,  $\rho = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\epsilon_0$  pedig egy fizikai konstans. A 4. példában bevezetett  $\mathbf{F}$ -et használva

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{F}.$$

A 4. példában kiszámolt eredmény szerint egy tetszőleges, origó közepű gömbhéjon  $\mathbf{E}$  felületi integrálja, azaz az elektromos mező fluxusa  $q/\epsilon_0$ . Azonban ez az eredmény nem csak gömbökre igaz. Egy tetszőleges, az origót körbefogó zárt felület mentén (amelyre a Gauss-Osztrogradskij-tétel feltételei teljesülnek) az integrál szintén  $q/\epsilon_0$ . Ennek igazolásához tekintsünk egy olyan nagy  $S_a$  origó közepű gömbfelületet, hogy az általa határolt tartomány tartalmazza  $S$ -t. Mivel

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0,$$

ha  $\rho > 0$ , az  $S$  és  $S_a$  által határolt  $D$  tartományon  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  integrálja nulla. Így a Gauss-Osztrogradskij-tétel szerint

$$\iint_{D \text{ határa}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0,$$

és így az  $S$ -en vett felületi integrálnak meg kell egyeznie az  $S_a$ -n vett felületi integrállal, amely  $q/\epsilon_0$ . A most bebizonyított állítást *Gauss-törvénynek* nevezzük, és az itteninél általánosabb töltéeloszlásokra is igaz.

Gauss törvénye: 
$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

### A hidrodinamika folytonossági törvénye

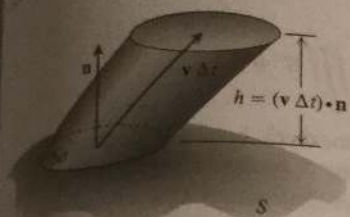
Legyen  $D$  egy  $S$  irányított zárt felület által közrefogott tartomány. Tegyük fel, hogy  $\mathbf{v}(x, y, z)$  egy  $D$ -n átfolyó folyadék sebességmezője,  $\delta = \delta(t, x, y, z)$  a folyadék sűrűsége  $(x, y, z)$ -ben a  $t$  időpillanatban, és  $\mathbf{F} = \delta \mathbf{v}$ . A hidrodinamika **folytonossági törvénye** azt mondja ki, hogy ekkor

$$\nabla \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0.$$

Ha a szereplő függvények folytonosan deriválhatóak, akkor a folytonossági törvény könnyen levezethető a Gauss-Osztrogradskij-tételből.

16.75. ÁBRA A folyó folyadék vallum alatt egy tölt meg, amely alap mag





ABRA A  $\Delta\sigma$  felületdarabon átfolyó folyadék egy rövid  $\Delta t$  időintervallum alatt egy olyan ferde „hengert” alkot meg, amelynek térfogata körülbelül  $\Delta V \approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta\sigma \Delta t$ .

Először lássuk be, hogy az

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

azt méri, hogy milyen sebességgel csökken a  $D$  tartományban levő folyadék tömege. (A csökkenést méri, mivel  $\mathbf{n}$  kifelé mutat.) Ehhez válasszunk egy piciny  $\Delta\sigma$  felületdarabot  $S$ -ről (16.75. ábra). Egy rövid  $\Delta t$  időintervallum alatt a  $\Delta\sigma$ -n átfolyó folyadék  $\Delta V$  térfogata körülbelül egyenlő egy olyan ferde henger térfogatával, amelynek alapterülete  $\Delta\sigma$ , és a magassága  $(\mathbf{v}\Delta t) \cdot \mathbf{n}$ , ahol  $\mathbf{v}$  a folyadék sebességvektora a  $\Delta\sigma$  felületdarab egy pontjában. Tehát

$$\Delta V \approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta\sigma \Delta t.$$

Az átfolyó folyadék tömege körülbelül

$$\Delta m \approx \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta\sigma \Delta t,$$

így  $\Delta t$  időegység alatt  $D$ -ből

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta\sigma$$

tömegű folyadék távozik. Ha összeadjuk az összes  $S$ -t alkotó felületdarabra az azon át kiáramló folyadék tömegét, megkapjuk a  $\Delta t$  idő alatt az  $S$ -en át kiáramló folyadék tömegének

$$\frac{\sum \Delta m}{\Delta t} \approx \sum \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta\sigma$$

közelítését. Végül ha  $\Delta\sigma \rightarrow 0$  és  $\Delta t \rightarrow 0$ , akkor megkapjuk a  $D$ -ben levő folyadék tömegének  $S$ -en át történő csökkenési sebességét:

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Ez a mi folyadékunk esetén

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Most vegyünk egy  $B$  tömör gömböt a folyam  $Q$  pontja körül.  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  átlagos értéke  $B$ -ben

$$\frac{1}{(B \text{ térfogata})} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} dV.$$

A divergencia folytonossága miatt valamely  $P \in B$  pontban  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  fel is veszi ezt az értéket. Így, ha  $S$  jelöli  $B$  határát, akkor

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{F})(P) &= \frac{1}{(B \text{ térfogata})} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \frac{1}{(B \text{ térfogata})} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \frac{(\text{az } S\text{-en keresztüli tömegcsökkenés sebessége})}{(B \text{ térfogata})}. \end{aligned} \quad (16.59)$$

A jobb oldali hányados az egységnyi térfogatra jutó tömegcsökkenést jelenti. Most vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha rögzített  $Q$  középpont mellett a  $B$  gömb sugarával nullához tartunk. A (16.59) egyenlőség bal oldala  $(\nabla \cdot \mathbf{F})(Q)$ -hoz tart, a jobb oldal határértéke  $(-\partial\delta/\partial t)(Q)$ . Ennek a két függvénynek az egyenlősége a folytonossági törvény:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{\partial\delta}{\partial t}.$$

A folytonossági törvény „megmagyarázza”  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  jelentését:  $\mathbf{F}$  divergenciája valamely pontban az áramló anyag sűrűségének pontbeli csökkenési sebességével egyenlő.

Ezek alapján a

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

Gauss–Osztrogradszkij-tétel úgy is értelmezhető, hogy a teljes  $D$  tartományból eltűnő anyag tömege egyenlő a tartomány  $S$  határán kiáramló anyag tömegével. Így a Gauss–Osztrogradszkij-tétel tömegmegmaradásként is interpretálható (lásd a 31. feladatot).

### Az integráltételek egyesítése

Egy kétdimenziós  $\mathbf{F} = M(x,y)\mathbf{i} + N(x,y)\mathbf{j}$  vektormezőt tekinthetünk egy olyan háromdimenziós vektormezőnek, melynek  $\mathbf{k}$ -komponense nulla. Ekkor  $\nabla \cdot \mathbf{F} = (\partial M/\partial x) + (\partial N/\partial y)$ , és a Green-tétel normálvektoros alakja így írható:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_T \left( \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx dy = \iint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dA.$$

Hasonlóan  $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = (\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ , és ezzel a Green-tétel érintővektoros alakja így alakul:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_T \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \iint_T \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA.$$

Most, hogy a Green-tétel két formáját átalakítottuk, vizsgáljuk meg a Stokes-tétellel, illetve a Gauss–Osztrogradszkij-tétellel való hasonlóságukat.

#### A Green-tétel és a háromdimenziós általánosításai

Green-tétel, normálvektoros alak:  $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dA$

Gauss–Osztrogradszkij-tétel:  $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV$

Green-tétel, érintővektoros alak:  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_T \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} dA$

Stokes-tétel:  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma$

Láthatjuk, hogy a Stokes-tétel a síkbeli Green-tétel normálvektoros (cirkulációra vonatkozó) alakját terjeszti ki egy háromdimenziós térben elhelyezkedő felületre. Mindkét tétel azt mondja ki, hogy  $\text{rot } \mathbf{F}$  normálkomponensének integrálja valamely felületen egyenlő  $\mathbf{F}$ -nek a felület határán vett cirkulációjával.

Hasonlóan, a Gauss–Osztrogradszkij-tétel a síkbeli Green-tétel normálvektoros (fluxusra vonatkozó) alakját általánosítja egy térbeli tartományra. Mindkét tétel szerint  $\text{div } \mathbf{F}$  valamely tartományon vett integrálja egyenlő  $\mathbf{F}$ -nek a tartomány határán vett integráljával.

Töprengjünk tovább erről a négy tételről, próbáljuk meg egy közös, *univerzális tétellel* összefogni őket. Ehhez idézzük fel az 5.3. részben tárgyalt Newton–Leibniz-formulát. A Newton–Leibniz-formula szerint ha  $f(x)$  differenciálható  $(a,b)$ -n és folytonos  $[a,b]$ -n, deriváltja pedig integrálható  $[a,b]$ -n, akkor

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a).$$

Legyen  $\mathbf{F}(x) = f(x)\mathbf{i}$  az  $[a,b]$  intervallumon, ekkor  $(df/dx) = \nabla \cdot \mathbf{F}$ . Legyen  $\mathbf{n}$  az  $[a,b]$  intervallum határán definiált kifelé mutató egységnormálmező, azaz  $\mathbf{n}(a) = -\mathbf{i}$  és  $\mathbf{n}(b) = \mathbf{i}$  (16.76. ábra). Ekkor



16.76. ÁBRA A kifelé mutató egységnormálisok az egydimenziós térben fekvő  $[a,b]$  intervallum határán.

$$\begin{aligned}
 f(b) - f(a) &= f(b)\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + f(a)\mathbf{i} \cdot (-\mathbf{i}) = \\
 &= \mathbf{F}(b) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(a) \cdot \mathbf{n} = \\
 &= \mathbf{F}\text{-nek } [a, b] \text{ határán vett integrálja.}
 \end{aligned}$$

Ezekkel a jelölésekkel a Newton–Leibniz-tétel így szól:

$$\mathbf{F}(b) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(a) \cdot \mathbf{n} = \int_{[a, b]} \nabla \cdot \mathbf{F} dx.$$

A Newton–Leibniz-tétel, a Green-tétel normálvektoros alakja és a Gauss–Osztrogradszkij-tétel mind azt mondja, hogy ha egy  $\mathbf{F}$  vektormezőre alkalmazzuk a divergencia operátort ( $\nabla \cdot$ ) és ezt integráljuk valamely tartományon, akkor az integrál értéke megegyezik  $\mathbf{F}$  normálkomponensének a tartomány határán vett integráljával. (A Newton–Leibniz-tétel esetén a tartomány határa két pont, ezért integrál helyett összeg szerepel.)

A Stokes-tétel és a Green-tétel érintővektoros alakja (a megfelelő irányítások mellett) arról szól, hogy ha az  $\mathbf{F}$  vektormezőre alkalmazzuk a rotáció operátort ( $\nabla \times$ ), akkor a keletkező vektormező normálkomponensének egy felületen vett integrálja megegyezik  $\mathbf{F}$ -nek a felületet határoló, zárt görbementi vonalintegráljával.

A tételek ily módon történő interpretációjának a szépsége az, hogy a két tételecsoport eredményeit egy egységes elvként foglalhatjuk össze:

Egy vektormezőn ható differenciáloperátor valamely tartományon vett integrálja egyenlő a vektormező differenciáloperátorhoz tartozó komponensének a tartomány határán vett integráljával.

## 8. Feladatok

### Divergenciaszámolás

16.11. feladatban szereplő vektormező divergenciáját számold ki az 1–4. feladatban szereplő vektormező divergenciájához hasonlóan.

16.14. ábrán definiált vektormező.

16.13. ábrán definiált identikus vektormező.

16.9. ábrán definiált gravitációs mező.

16.12. ábrán definiált sebességmező.

16.11. feladatban szereplő vektormező divergenciájához hasonlóan.

8. **Gömb:**  $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$ ,  
 $D$ : az  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  tömör gömb.

9. **Gömbcikk:**  $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$ ,  
 $D$ : az első tényolcadnak az  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  gömb által határolt része.

10. **Henger:**  $\mathbf{F} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2z)\mathbf{j} + 4x^2y^3\mathbf{k}$ ,  
 $D$ : az első tényolcadnak az  $x^2 + y^2 = 4$  henger és a  $z = 3$  sík által határolt része.

11. **Ék:**  $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ ,  
 $D$ : az első tényolcadból az  $y + z = 4$  sík és a  $4x^2 + y^2 = 16$  elliptikus henger által kivágott „ék”.