

1)  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $A = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   $C = [2 \quad 1]$   
 $y = Cx$

a) BIBO stabil-e?

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} s+10 & -1 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+10)(s+5)} [2 \quad 1] \begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ 0 & s+10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+10)(s+5)} [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ s+10 \end{bmatrix} = \frac{s+12}{(s+5)(s+10)} \xrightarrow{\text{Parci tört}} \frac{\frac{7}{5}}{s+5} - \frac{\frac{2}{5}}{s+10}$$

$$h(t) = \frac{7}{5} e^{-5t} - \frac{2}{5} e^{-10t} \quad \leftarrow \text{Ez abszolút integrálható-e?}$$

④, ughogy nem kell!

INVERT ZFZ

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt = \int_0^{\infty} \left| \frac{7}{5} e^{-5t} - \frac{2}{5} e^{-10t} \right| dt \leq \int_0^{\infty} \left( \frac{7}{5} e^{-5t} + \frac{2}{5} e^{-10t} \right) dt =$$

$$= \left[ \frac{7}{5} \cdot \frac{e^{-5t}}{-5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{e^{-10t}}{-10} \right]_{t=0}^{t=\infty} = (0+0) - \left( -\frac{7}{25} + -\frac{2}{50} \right) = \frac{32}{100} = \boxed{0,32 = M} < \infty$$

A rendszer BIBO stabil.

b) Aszimptotikusan stabil-e?

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda+10 & -1 \\ 0 & \lambda+5 \end{bmatrix} = (\lambda+10)(\lambda+5) = 0$$

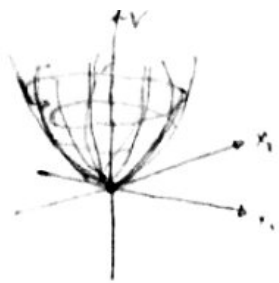
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -10 & \Rightarrow & \text{Re}(\lambda_1) = -10 < 0 \\ \lambda_2 &= -5 & \Rightarrow & \text{Re}(\lambda_2) = -5 < 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{A rendszer} \\ \text{Aszimptotikusan} \\ \text{stabil.} \end{array}$$

ASZIMPT. STABIL RENDSZER



$$\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$$

A mátrix SE-jével valóds tevé



$V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható

$$V(x) > 0, \text{ ha } x \neq 0$$

$$V(x) = 0, \text{ ha } x = 0$$

$$\frac{dV}{dt} \leq 0$$

Ha  $\exists$  ilyen  $V$  fű, a rendszer  $\alpha$  rendszer STABIL

Ha nem jellel:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \begin{cases} < 0, \text{ ha } x \neq 0 \\ = 0, \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

Ha ez is teljesül, akkor ASZIMPTOTIKUSAN STABIL

Ilyen  $V$  fű-t találni "nehéz".

LT1 Rendszer erején kvadrátikus alakokkal lehet ilyen  $V$  fű-t találni:

$$V(x) = x^T P x, \quad P \text{ pozitív definit mátrix, } P = P^T$$

$$\frac{dV(x)}{dt} \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$\frac{dV(x)}{dt} \stackrel{\text{Ljapunov}}{=} x^T (A^T P + P A) x \iff \text{neg. definit, ha } A^T P + P A \text{ neg. definit.}$$

c)  $V(x) = x^T P x = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  Ljapunov fű-e?

1)  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

2)  $V$  folytonosan differenciálható?

$$V(x) = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 15x_1 + x_2 \\ x_1 + 15x_2 \end{bmatrix} = 15x_1^2 + 2x_1x_2 + 15x_2^2$$

3)  $V(x) > 0, x \neq 0 \wedge V(0) = 0$

$P$  pozitív definit mátrix,

mert  $\lambda_1(P) = 16$   
 $\lambda_2(P) = 14$

$\forall \lambda_i > 0 \Rightarrow P \text{ poz. def.} \Rightarrow V(x) \text{ poz. def.}$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 30x_1 + 2x_2 \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 2x_1 + 30x_2$$

folytonos  $\rightarrow V$  folyt. differenciálható.

$$3) \frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 30x_1 \cdot \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_1 + 2x_1 \dot{x}_2 + 30x_2 \cdot \dot{x}_2 =$$

$$= 30x_1(-10x_1 + x_2) + 2x_2(-10x_1 + x_2) + 2x_1(-5x_2) + 30x_2(-5x_2) =$$

Kvadrátikus alak, mivel kell belátni h. neg. definit

$$= -300x_1^2 + 30x_1x_2 - 20x_1x_2 + 2x_2^2 - 10x_1x_2 - 150x_2^2 = -300x_1^2 - 148x_2^2 < 0, \text{ ha } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0, \text{ ha } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$