

1) Adott ATM: $\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} \begin{cases} sX(s) - x(0) = A X(s) + B U(s) \\ Y(s) = C X(s) + D U(s) \end{cases}$

$\downarrow$ kis rendezéssel

$\underbrace{sI}_{n \times n \text{ mátrix}} X(s) - \underbrace{A}_{n \times n \text{ mátrix}} X(s) = x(0) + B U(s)$

$(sI - A) X(s) = x(0) + B U(s) \quad / \text{balról} \cdot (sI - A)^{-1}$

$(I) \quad X(s) = (sI - A)^{-1} (x(0) + B U(s))$

$\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}}$

$x(t) = e^{At} \cdot x(0) + e^{At} \cdot B * u(t) \quad \leftarrow X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} B U(s)$

$\underbrace{\text{Kerületi értéktől függő tag.}}_{At} \quad \underbrace{\text{Inputtól függő tag.}}_{At}$

Pl:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

a) Számítsuk ki $H(s)$ -t, és $h(t)$ -t!

$$H(s) = C (sI - A)^{-1} B + D$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & -1 \\ 5 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{(s+4)(s-2)+5} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -5 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2+2s-3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3s \\ 6s+9 \end{bmatrix} = \frac{9s+18}{s^2+2s-3} = H(s) \quad \rightarrow \text{Inverz } \mathcal{L} \text{ miatt par. törtet bontunk.}$$

$$\frac{9s+18}{(s+3)(s-1)} = \frac{\frac{9(-3)+18}{-3-1}}{s+3} + \frac{\frac{9+18}{1+3}}{s-1} = \frac{\frac{9}{4}}{s+3} + \frac{\frac{27}{4}}{s-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} h(t) = \frac{9}{4} \cdot e^{-3t} + \frac{27}{4} \cdot e^t$$

b) Legyen $u(t) = e^{-5t}$, $x(0) = 0$ | $x(t) = ?$, $y(t) = ?$

$$x(t) = e^{At} \cdot B * e^{-5t} \quad \leftarrow \text{Na ezt így nem akarjuk kiszámolni...}$$

$\downarrow \mathcal{L}\{\} (* \rightarrow \cdot)$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B \cdot \frac{1}{s+5} = \frac{1}{(s+3)(s-1)} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -5 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s+5} =$$

$$= \frac{1}{(s+3)(s+1)(s+5)} \begin{bmatrix} 3s \\ 6s+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3s}{(s+5)(s+3)(s-1)} \\ \frac{6s+9}{(s+5)(s+3)(s-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{15}{12}}{s+5} + \frac{\frac{9}{8}}{s+3} + \frac{\frac{3}{24}}{s-1} \\ \frac{-\frac{21}{12}}{s+5} + \frac{\frac{9}{8}}{s+3} + \frac{\frac{15}{24}}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{15}{12} \cdot e^{-5t} + \frac{9}{8} e^{-3t} + \frac{3}{24} e^t \\ -\frac{21}{12} \cdot e^{-5t} + \frac{9}{8} e^{-3t} + \frac{15}{24} e^t \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t) = -1x_1(t) + 2x_2(t) = \dots$$

c) Legyen $u(t) = 0$, $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $x(t) = ?$, $y(t) = ?$

Most a kezdeti értéktől függő $e^{At} \cdot x(0)$ -t számoljuk.

Nyilván Laplace...

$$x(t) = e^{At} \cdot x(0) \xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot x(0) = \frac{1}{(s+3)(s-1)} \begin{bmatrix} s-2 & 1 \\ -5 & s+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+3)(s-1)} \begin{bmatrix} -s+3 \\ s+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-s+3}{(s+3)(s-1)} \\ \frac{s+9}{(s+3)(s-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{6}{4}}{s+3} + \frac{\frac{2}{4}}{s-1} \\ \frac{-\frac{6}{4}}{s+3} + \frac{\frac{10}{4}}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$X(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}\{\}} x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^t \\ -\frac{3}{2} e^{-3t} + \frac{5}{2} e^t \end{bmatrix}$$

(Fun fact: a matrix SE^i -i: $-3, 1$)

Általános p. nevezőjének gyökei $\rightarrow$ pólusok
SPOILER:

Ezeken dől majd el hogy a rendszer stabil-e

$$y(t) = -1 \cdot x_1(t) + 2x_2(t) = -\frac{12}{4} e^{-3t} + \frac{18}{4} e^t$$

d) Legyen $u(t) = e^{-5t}$, $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x(t) = ?$

Ekkor $x(t) = x_{\text{homogén}}(t) + x_{\text{partikulár}}(t)$

2) Legyen A diag. mátrix (später. könnyebb a megoldás)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [15 \ 10 \ 20] x(t)$$

$$x(t) = e^{At} \cdot x(0) + e^{At} B * u(t)$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

innenből már egyenlő...

Ha adott:

$$\dot{x}_1(t) = 8x_1(t) + 10x_2(t) + 3u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -1x_1(t) + 6x_2(t) + 20u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Átírás
A B C D
formára

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 20 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y = \underbrace{[1 \ -1]}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

D: R.I.P.

3. előlevesre u(t)-ra

$$x_1(0) = k_1$$

$$x_2(0) = k_2$$

$$x(0) = x_0$$