

Tartalomjegyzék

Folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszerek különböző leírási módjai (magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek, átviteli függvény, súlyfüggvény, állapotter-modell).....	4
Időtartomány:.....	4
Operátortartomány:.....	4
Állapottér modell:	4
Rendszerparaméterek:	4
Az átviteli függvény kiszámítása ÁTM-ből:.....	5
Folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszerek irányíthatósága és megfigyelhetősége.....	5
Megfigyelhetőség:	5
Irányíthatóság:	6
Folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszerek együttes irányíthatósága és megfigyelhetősége	6
Ekvivalens ÁTM tulajdonságok:.....	6
Definíció:	7
1. Lemma:	7
Controller form realizáció:	7
Observer form realizáció:	8
Definíciók:	8
2. lemma:.....	8
1. Tétel:	8
2. Tétel:	8
3. Tétel:	8
3. Lemma:	9
Folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszerek stabilitása.....	9
Stabilitás fogalma:.....	9
Tétel:.....	9
Nemlineáris rendszerek stabilitása:.....	9
Ljapunov-függvény:.....	9
Ljapunov stabilitási tétele:	9
LTI rendszerek – BIBO és Aszimptotikus stabilitás:.....	10
Ljapunov kritérium LTI rendszerekre:	10
Az átviteli függvények értelmezése a frekvenciatartományban (erősítés, fázis), Bode- és Nyquist diagramok, rendszerek soros és párhuzamos kapcsolása, általános negatív visszacsatolás, minimum fázisú rendszerek.....	10

Átviteli függvények és stabilitás:	10
Erősítés és fázis:.....	10
Bode-diagram:	10
Nyquist-diagram:.....	10
Részrendszerek összekapcsolási módjai:	11
SISO-rendszerek irányításának alapjai: általános irányítási cél, rendszerinvertálás (és problémái), a visszacsatolás fogalma és típusai, az integrátor szerepe a szabályozási körben, PID-szabályozók	13
Az irányítási cél:.....	13
Kézenfekvőnek tűnő megoldás:	13
Bal- és jobb inverz:	13
Invertálási problémák:.....	13
Visszacsatolás:.....	14
Az integrátor szerepe:	14
PID szabályozó:	15
Pólusáthelyezéssel szabályozó	16
Általános problémafelvetés:	16
Statikus lineáris teljes állapot-visszacsatolás:	16
Pólusáthelyezéssel szabályozó tervezése:	17
Controller-form realizáció:.....	18
Pólusáthelyezéssel szabályozó controller-form esetén:	18
Állapotbecslő tervezése folytonos idejű LTI rendszerekhez, szeparációs elv	18
Problémák:.....	18
Cél:.....	18
Az állapot-megfigyelő algebrai alakja:.....	19
Az állapot-megfigyelő struktúrája:	19
Az állapot-megfigyelő kiszámítása:	19
Szeparációs elv:.....	19
Lineáris kvadratikus szabályozás (LQR)	20
LQR: Problémafelvetés:	20
Variációszámítás:	21
Euler-Lagrange egyenletek:	21
LQR Euler-Lagrange egyenletek.....	22
LQR: irányítható & megfigyelhető eset:	22
Stacionárius eset:	22
LQR és tulajdonságai:	23

Folytonos idejű rendszerek mintavételezése és diszkrétizálása, diszkrét idejű rendszerek leírása (állapottér-modell, impulzusátviteli operátor)	23
Mintavételezés:	23
A D/A átalakító működése:	23
CT-LTI rendszerek mintavételezése:	24
Mintavételezett állapotegyenletek:	24
Diszkrét idejű állapotegyenletek:	24
DT-LTI állapotegyenletek mintavételezett rendszerekhez:	24
DT-LTI ÁTM:.....	25
DT állapotegyenletek megoldása:.....	25
Impulzus átviteli operátor:.....	25
Impulzus átviteli operátor SISO eset:	25
DT-LTI rendszerek pólusai:	26
Diszkrét idejű irányíthatóság és megfigyelhetőség	26
Irányíthatóság:	26
Megfigyelhetőség:	27
Diszkrét idejű rendszerek stabilitása: diszkrét idejű állapotegyenlet megoldásainak stabilitása, diszkrét idejű LTI rendszerek aszimptotikus stabilitása, Ljapunov tétel diszkrét idejű lineáris rendszerekhez.....	27
Tétel:.....	27
Tétel:.....	27
Bemenet nélküli állapotegyenlet:	27
BIBO stabilitás	27
Diszkrét idejű Ljapunov-tétel:	28
Diszkrét idejű LQR szabályozás (bizonyítás nélkül), deadbeat-szabályozás	28
DT-LTI LQR szabályozás:	28
Deadbeat-szabályozás:.....	29
Diszkrét idejű sztochasztikus állapotter-modellek, Kálmán-szűrő.....	29
DT-LTI sztochasztikus I/O modell:	29
DT-LTI sztochasztikus ÁTM:.....	30
DT-LTI sztochasztikus differenciaegyenletek:	30
Állapotegyenlet megoldása:.....	30
Kálmán-szűrő:.....	31

Folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszerek különböző leírási módjai (magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek, átviteli függvény, súlyfüggvény, állapotér-modell)

Időtartomány:

Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlettel

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

adott kezdeti feltételekkel $y(0) = y_{00}, \frac{dy}{dt}(0) = y_{10}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(0) = y_{(n-1)0}$

Impulzusválasz függvénnyel

$$Y(s) = H(s)U(s) \rightarrow L^{-1} \rightarrow y(t) = (h * u)(t)$$

$$\text{azaz } y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Dirac- δ definíciójából adódik: $\int_0^\infty \delta(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_0^t \delta(t-\tau)h(\tau)d\tau = h(t)$

és $L(\delta)(s) = \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}dt = 1$, tehát h a rendszer Dirac- δ bemenetre adott válasza

Operátortartomány:

Átviteli függvénnyel

$$Y(s) = H(s)U(s) \text{ 0 kezdeti feltételekkel (!)}$$

- $Y(s)$ - A kimeneti jel Laplace transzformáltja
- $U(s)$ - A bemeneti jel Laplace transzformáltja
- $H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ - A rendszer átviteli függvénye, ahol $a(s), b(s)$ polinomok és $\deg(b(s))=m, \deg(a(s))=n$
 - Strictly proper átviteli függvény : $m < n$
 - Proper átviteli függvény : $m = n$
 - Improper átviteli függvény : $m > n$

Állapotér modell:

Általános alak:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

adott $x(t_0) = x(0)$ kezdeti feltétellel és $x(t) \in R^n, y(t) \in R^p, u(t) \in R^r$.

Rendszerparaméterek:

$$A \in R^{n \times n} \quad B \in R^{n \times r} \quad C \in R^{p \times n} \quad D \in R^{p \times r}$$

Az átviteli függvény kiszámítása ÁTM¹-ből:

Az ÁTM Laplace transzformáltja:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s)$$

Az ÁTM-hez tartozó átviteli függvény ($H(s)$) (A, B, C, D):

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszerek irányíthatósága és megfigyelhetősége

Megfigyelhetőség:

Problémafelvetés:

Adott: ÁTM (A, B, C) paraméterekkel; u és y jelek véges időintervallumon mért értékei

Kiszámítandó: az állapotváltozó vektor (x) értékei a véges időintervallumon
Elegendő kiszámítani $x(t_0) = x_0$

Szükséges és elégséges feltétel:

Egy ÁTM (A, B, C) mátrixokkal megfigyelhető pontosan akkor, ha az O_n megfigyelhetőségi mátrix teljes rangú

$$O_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Geometria értelmezés:

(A, C) nem megfigyelhető altere azon kezdeti értékek halmaza, amelyek a rendszer kimenetének ismeretében nem különíthetők el egymástól, azaz az ÁTM a nem megfigyelhető altér különböző pontjaiból, mint kezdeti értékekből indítva a rendszer ugyanazt a kimeneti függvényt adja.

A nem megfigyelhető altér bázisának kiszámítása: $\ker(O_n)$

¹ Állapottér Modell

Irányíthatóság:

Problémafelvetés:

Adott: ÁTM (A,B,C) paraméterekkel; $x(t_1)$ kezdeti és $x(t_2) \neq x(t_1)$ végállapot

Kiszámítandó: egy megfelelő u bemenő jel, amely a rendszer állapotát $x(t_1)$ -ből $x(t_2)$ -be juttatja véges idő alatt.

Szükséges és elégséges feltétel:

Egy ÁTM (A,B,C) mátrixokkal irányítható pontosan akkor, ha a C_n irányíthatósági mátrix teljes rangú

$$C_n = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

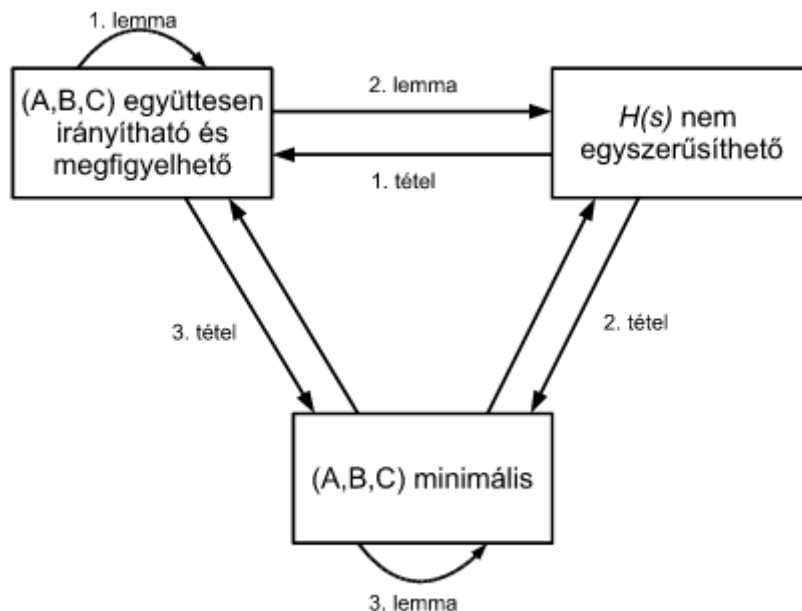
Geometriai értelmezés:

(A,B) irányíthatósági altere azon állapotok halmaza, amelyek véges időn belül elérhetők az állapottér origójából valamely u bemenet hatására, azaz az ÁTM állapotváltozóit az állapottér origójából indítva semmilyen bemenettel nem tudjuk „kivinni” az irányíthatósági altérből.

Az irányíthatósági altér bázisának kiszámítása: $\text{im}(C_n)$

Folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszerek együttes irányíthatósága és megfigyelhetősége

Ekvivalens ÁTM tulajdonságok:



Definíció:

Hankel mátrixnak nevezzük a következő blokkmátrixot

$$H[1, n-1] = \begin{bmatrix} CB & CAB & \cdot & \cdot & \cdot & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \vdots & \vdots & \vdots & CA^nB \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \cdot & \cdot & \cdot & CA^{2n-2}B \end{bmatrix}$$

A mátrix a CA^iB Markov paramétereket tartalmazza, amelyek invariánsak az állapottranszformációra

1. Lemma:

Ha egy rendszer átviteli függvénye $H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$, és ehhez található egy együttesen irányítható és megfigyelhető n -edrendű realizáció, akkor a H -hoz tartozó valamennyi n -edrendű realizáció is együttesen irányítható és megfigyelhető.

Controller form realizáció:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) \end{aligned}$$

ahol

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_n \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [b_1 \quad b_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad b_n], \quad D_c = D$$

az átviteli függvényben szereplő polinomok együtthatóival:

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} + D$$

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \text{ és } b(s) = b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n$$

Observer form realizáció:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_o x(t) + B_o u(t) \\ y(t) &= C_o x(t)\end{aligned}$$

ahol

$$A_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$C_o = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad D_o = D$$

az átviteli függvényben szereplő polinomok együtthatóival:

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} + D$$

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \text{ és } b(s) = b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n$$

Definíciók:Relatív prím polinomok

$a(s)$ és $b(s)$ relatív prímek, ha $a(s) = \prod (s - \alpha_i)$; $b(s) = \prod (s - \beta_i)$ és $\alpha_i \neq \beta_i$ bármilyen i, j -re. (Más szavakkal: a polinomoknak nincsen közös tényezőjük)

Nem egyszerűsíthető átviteli függvény

$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ nem egyszerűsíthető, ha $a(s)$ és $b(s)$ relatív prímek

Minimális realizáció

Egy n dimenziós (A, B, C) realizáció minimális, ha nem található nála kevesebb dimenziós realizáció

2. lemma:

Egy $H(s)$ átviteli függvény 'controller form' realizációja együttesen irányítható és megfigyelhető pontosan akkor, ha $a(s)$ és $b(s)$ relatív prímek ($H(s)$ nem egyszerűsíthető)

1. Tétel:

$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ nem egyszerűsíthető pontosan akkor, ha n -edrendű realizációi együttesen irányíthatók és megfigyelhetők

2. Tétel:

$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ nem egyszerűsíthető pontosan akkor, ha bármely (A, B, C) realizációja minimális, ahol $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$

3. Tétel:

Egy (A, B, C) realizáció minimális pontosan akkor, ha együttesen irányítható és megfigyelhető

3. Lemma:

Bármely két minimális realizáció áttanszformálható egymásba egy egyértelmű invertálható hasonlósági transzformációval

Folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszerek stabilitása

Stabilitás fogalma:

Egy rendszer stabilis, ha kitérés után a magára hagyott rendszer visszatér nyugalmi állapotába, tranziensei lecsengenek. (Másként: korlátos bemenetre a rendszer kimenete is korlátos - BIBO)

Tétel:

Egy SISO LTI² rendszer BIBO stabil pontosan akkor, ha

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt \leq M < \infty$$

ahol $M \in \mathbb{R}^+$ és h a rendszer súlyfüggvénye.

Nemlineáris rendszerek stabilitása:

Tekintsük a következő rendszert:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^n, \quad f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

egyensúlyi pont: $f(x^*) = 0$

x^* stabil egyensúlyi pont: bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$), hogy

$\|x^* - x(0)\| < \delta$ esetén $\|x^* - x(t)\| < \varepsilon$

x^* aszimptotikusan stabil egyensúlyi pont: x^* stabil, és $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$

x^* instabil egyensúlyi pont: nem stabil

x^* lokálisan (aszimptotikusan) stabil: x^* -nak van olyan U környezete, amelyen belül az (aszimptotikus) stabilitás feltételei teljesülnek

x^* globálisan (aszimptotikusan) stabil: $U = \mathbb{R}^n$

Ljapunov-függvény:

$V: X \rightarrow \mathbb{R}$ (radiálisan nem korlátos)

- $V > 0$, ha $x \neq x^*$, $V(x^*) = 0$
- V legalább egyszer folytonosan differenciálható
- V nem növekvő, azaz $\frac{d}{dt} V \leq 0$

Ljapunov stabilitási tétele:

Ha az $\dot{x} = f(x)$, $f(x^*) = 0$ rendszerhez létezik Ljapunov-függvény, akkor x^* stabil egyensúlyi állapot.

Ha a Ljapunov függvény tulajdonságai csak x^* egy U környezetében teljesülnek, akkor x^* lokálisan (aszimptotikusan) stabil egyensúlyi állapot.

² Lineáris időinvariáns

LTI rendszerek – BIBO és Aszimptotikus stabilitás:

LTI rendszereknél az aszimptotikus stabilitásból következik a BIBO stabilitás

Ljapunov kritérium LTI rendszerekre:

Egy lineáris rendszer állapotmátrixa (A) stabilitási mátrix pontosan akkor, ha bármely megadott Q pozitív definit szimmetrikus mátrixhoz létezik egy P pozitív definit szimmetrikus mátrix, hogy $A^T P + PA = -Q$

Q pozitív definit – Q valamennyi sajátértéke pozitív

Az átviteli függvények értelmezése a frekvenciatartományban (erősítés, fázis), Bode- és Nyquist diagramok, rendszerek soros és párhuzamos kapcsolása, általános negatív visszacsatolás, minimum fázisú rendszerek

Átviteli függvények és stabilitás:

$$\text{SISO eset: } H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{b(s)}{a(s)} =$$

$$\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{(s - \beta_1)(s - \beta_2) \dots (s - \beta_m)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)}$$

- Zérusok: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$
- Pólusok: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (megegyeznek A sajátértékeivel)

Aszimptotikus stabilitás $\Leftrightarrow \text{Re}(\lambda_i) < 0$

Erősítés és fázis:

átviteli függvény: $G(j\omega)$, $(G(s))$

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$y(t) \rightarrow y_0 \sin(\omega t + \beta)$$

erősítés: $k = \left| \frac{y_0}{u_0} \right| = |G(j\omega)|$ (frekvenciafüggő!)

fázis: $\Phi = \beta - \alpha = \angle G(j\omega [\text{rad}])$ (frekvenciafüggő!)

Bode-diagram:

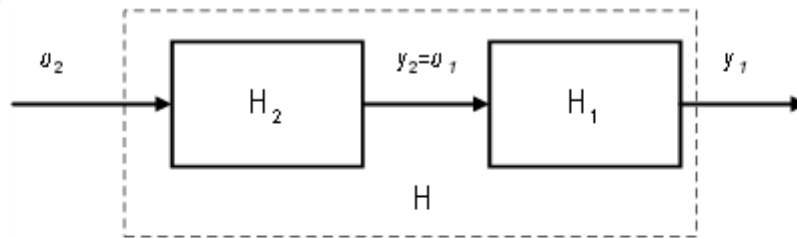
Egy egy bemenetű, egy kimenetű rendszer átviteli karakterisztikájának ábrázolására szolgál.

Nyquist-diagram:

Egy visszacsatolással rendelkező rendszer stabilitásának megállapítására használjuk.

Részrendszerek összekapcsolási módjai:

Soros kapcsolás:

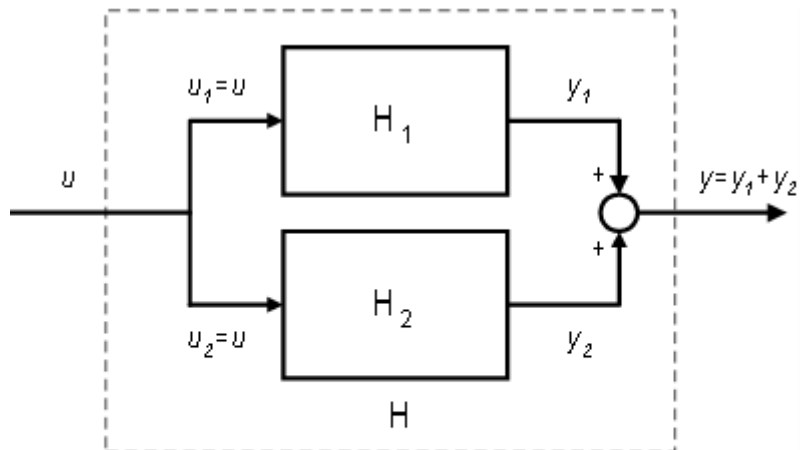


$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

azaz

$$h(t) = (h_1 * h_2)(t)$$

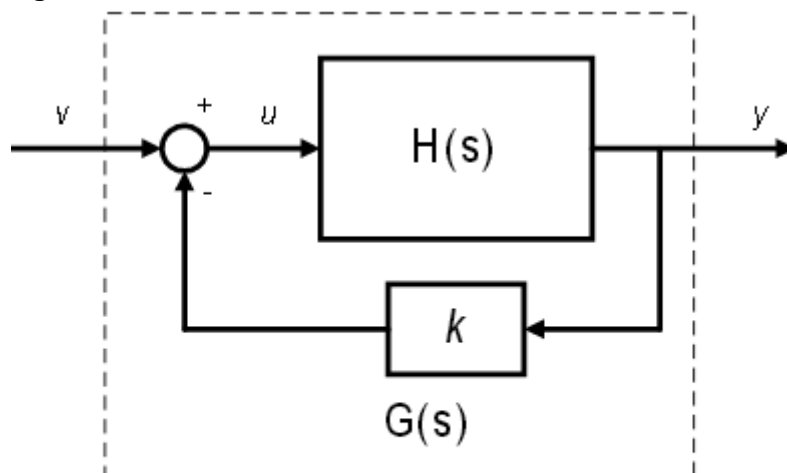
Párhuzamos kapcsolás:



$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

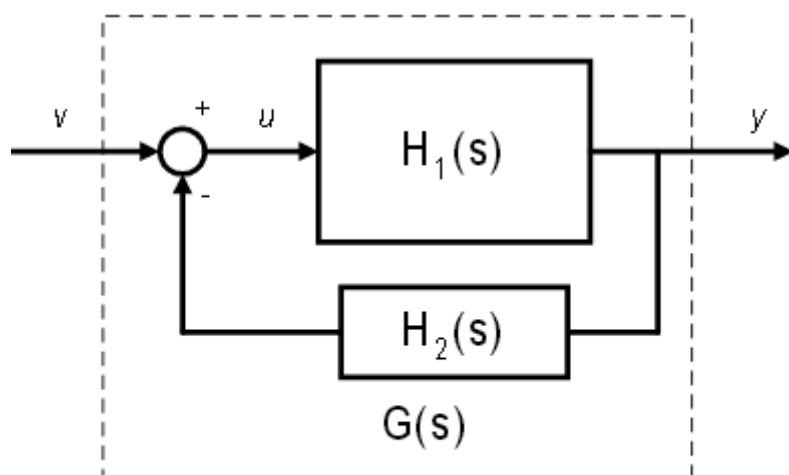
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

Arányos negatív visszacsatolás:



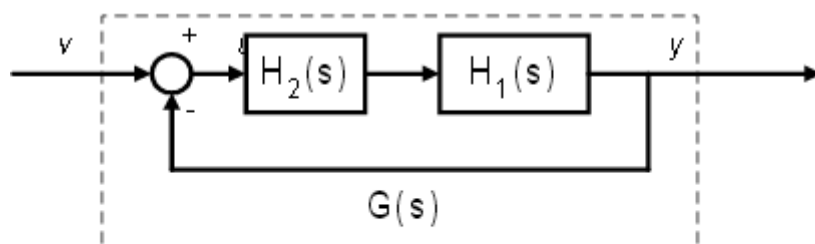
$$G(s) = \frac{H(s)}{1 + k \cdot H(s)}$$

Általános negatív visszacsatolás (párhuzamos):



$$G(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

Általános negatív visszacsatolás (soros):



$$G(s) = \frac{H_1(s)H_2(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

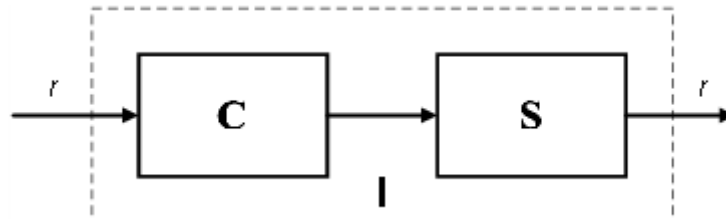
SISO-rendszerek irányításának alapjai: általános irányítási cél, rendszerinvertálás (és problémái), a visszacsatolás fogalma és típusai, az integrátor szerepe a szabályozási körben, PID-szabályozók

Az irányítási cél:

A rendszer kimenete azonos legyen azzal, amit mi előírunk.

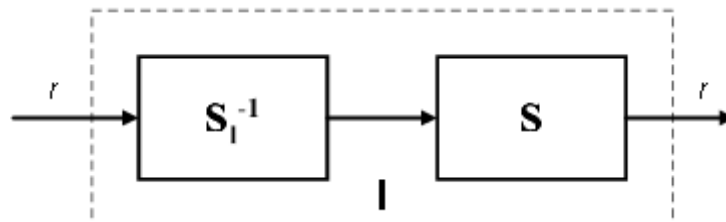
Kézenfekvőnek tűnő megoldás:

Alakítsuk valahogyan a rendszer-operátort identikus operátorrá

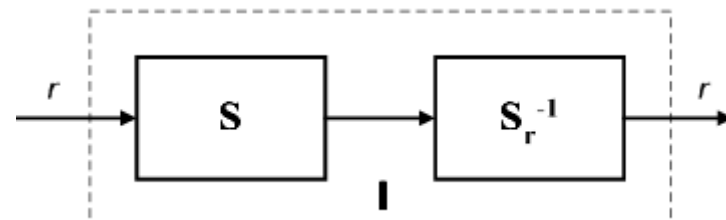


Bal- és jobb inverz:

Bal inverz:



Jobb inverz:



Invertálási problémák:

- A rendszer-operátor nem invertálható
- Az irányítandó rendszer instabil
- Az inverz instabil
- Az inverz nem kauzális
- A rendszer-operátor nem pontos (bizonytalan) -> az inverz még bizonytalanabb (lehet)
- A valóságban a rendszer nem elszigetelt

Visszacsatolás:

Jelentése:

Visszacsatolás = érzékelés + számítás + beavatkozás

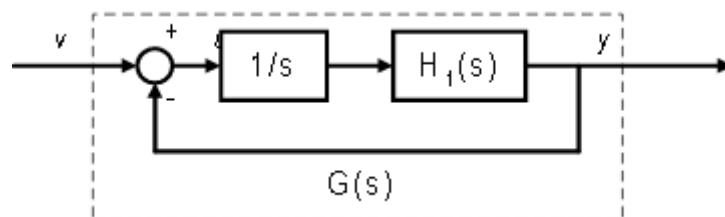
Miért alkalmazzuk?

- Gyakran az instabil rendszerek stabilizálásának egyetlen módja a visszacsatolás
- Egy jól megtervezett visszacsatolás bizonytalan rendszermodellel együtt is működőképes lehet
- Visszacsatolással csökkenthető a külső zavarok hatása is

Típusai:

- kimenet-visszacsatolás: a bemenet a rendszer kimeneteitől függ, azaz $u=F[y]$
- (teljes) állapot-visszacsatolás: a bemenet a rendszer állapotváltozóitól függ, azaz $u = F[x]$
- statikus visszacsatolás: az F operátor statikus ($u=F[y]$, $u=F[x]$)
- dinamikus visszacsatolás: az F operátor dinamikus (lineáris esetben pl. ÁTM-el vagy átviteli függvénnyel megadható)
- Lineáris visszacsatolás: az F operátor vagy az F függvény lineáris

Az integrátor szerepe:



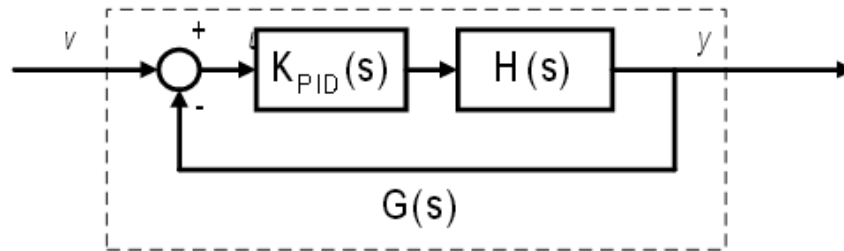
$$H_1(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \rightarrow G(s) = \frac{k_I b(s)}{s a(s) + k_I b(s)}$$

$$|G(j \cdot 0)| = 1$$

Az integrátort tartalmazó szabályozási kör állandósult állapotbeli erősítése 1. (A szabályozott rendszer követi a konstans referenciajelet, ha aszimptotikusan stabil)

PID szabályozó:

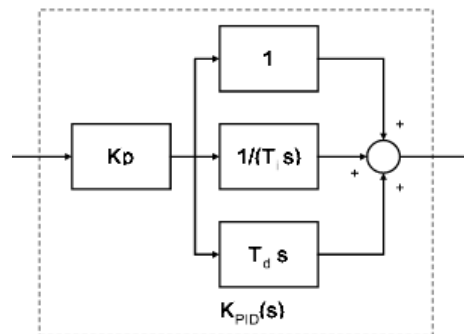
A PID szabályozó struktúrája:



P=Proportional, I=Integral, D=Derivative

Átviteli függvény:

$$K_{PID}(s) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right] = \frac{K_p(T_i \cdot T_d \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1)}{T_i \cdot s}$$



- K_p : arányos (proporcionális) erősítés
- T_i : integrálási időállandó
- T_d : deriválási időállandó

PID szabályozók hangolása:

Ziegler-Nichols módszer:

1. Alkalmazzunk csak arányos (proporcionális) visszacsatolást
2. Növeljük az arányos erősítést (K_p) addig, amíg az egységugrásra adott válasz csillapítatlan (szinuszos) rezgés lesz (K_p^*)
3. Mérjük meg a rezgés periódusidejét (T_c)

Pólusáthelyezéssel szabályozó

Általános problémafelvetés:

Adott:

- Egy SISO LTI rendszer (A,B,C) mátrixokkal (a pólusok A -tól $(a(s)$ -tól) függnék)
- előírt (kívánt) pólusok, melyeket az $\alpha(s)$ polinom határoz meg úgy, hogy $\deg(a(s)) = \deg(\alpha(s)) = n$

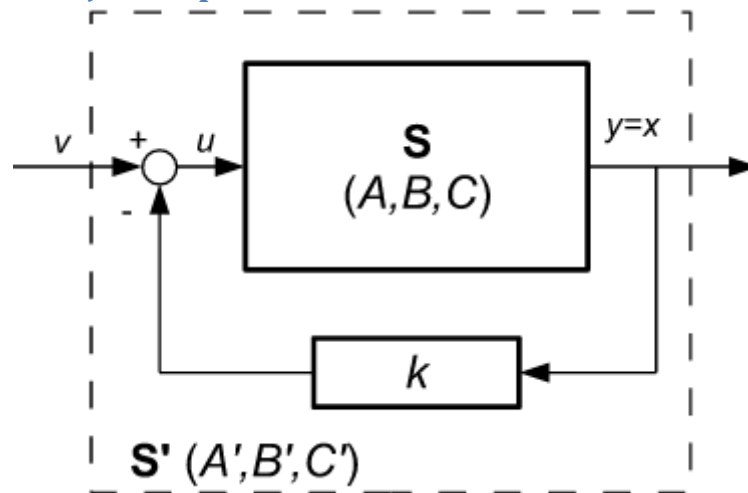
Kiszámítandó:

Egy teljes állapot-visszacsatolás úgy, hogy a zárt rendszer pólusai éppen $\alpha(s)$ gyökei.

Részprobléma:

Olyan visszacsatolás, amely stabilizálja a(z eredetileg instabil) rendszert

Statikus lineáris teljes állapot-visszacsatolás:



$$u = -kx + v,$$

ahol $k \in R^{r \times n}$, ha $x \in R^n$ és $u \in R^r$

A SISO LTI rendszer mátrixai: (A,B,C)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$y(t), u(t) \in R, x(t) \in R^n$$

$$A \in R^{n \times n} \quad B \in R^{n \times 1} \quad C \in R^{1 \times n}$$

Statikus lineáris teljes állapot-visszacsatolás:

$$v = u + kx \quad (u = v - kx)$$

$$k = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$$

$$k \in R^{1 \times n} \text{ (sorvektor)}$$

Zárt rendszer:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - Bk)x(t) + Bv(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

Azaz:

$$A' = A - Bk; \quad B' = B; \quad C' = C$$

Karakterisztikus polinomok:

Visszacsatolás nélküli (szabályozatlan) rendszer:

$$a(s) = \det(sI - A)$$

Visszacsatolt (szabályozott) rendszer:

$$a_c(s) = \det(sI - A + Bk)$$

Pólusát helyezés szabályozó tervezése:

Bass-Gura formula:

Számítsuk ki a következő determinánst

$$\det \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}$$

két ekvivalens módon

$$\det(M_1) \det(M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2) = \det(M_4) \det(M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3)$$

Alkalmazzuk:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

a következőt kapjuk:

$$\det(sI - A) \det(1 + k(sI - A)^{-1}B) = 1 \cdot \det((sI - A) + B \cdot 1^{-1} \cdot k)$$

Rezolvens formula:

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{a(s)} (s^{n-1}I + s^{n-2}(A + a_1 I) + s^{n-3}(A^2 + a_1 A + a_2 I) + \dots)$$

$$\underline{\alpha} - \underline{a} = k[A \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\underline{\alpha} - \underline{a} = kCT_l^T \quad // \text{ (ahol } C \text{ az irányíthatósági mátrix)}$$

Ha S irányítható, akkor

$$k = (\underline{\alpha} - \underline{a})T_l^{-T}C^{-1}$$

Controller-form realizáció:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t)\end{aligned}$$

ahol

$$A_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_n \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [b_1 \quad b_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad b_n], \quad D_c = D$$

az átviteli függvényben szereplő polinomok együtthatóival:

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} + D$$

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \text{ és } b(s) = b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n$$

Pólusáthelyezéssel szabályozó controller-form esetén:

$$A_c - B_c k_c = \begin{bmatrix} -(a_1 + k_{c1}) & -(a_2 + k_{c2}) & \cdot & \cdot & \cdot & -(a_n + k_{cn}) \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a zárt rendszer karakterisztikus polinomja, $\alpha(s)$:

$$\alpha(s) = \det(sI - (A_c - B_c k_c)) = s^n + (a_1 + k_{c1})s^{n-1} + \dots + (a_n + k_{cn})$$

az állapot-visszacsatolás k_c együtthatói:

$$k_c = \underline{\alpha} - \underline{a}$$

Állapotbecslő tervezése folytonos idejű LTI rendszerekhez, szeparációs elv**Problémák:**

- A bemenet és kimenet mérése általában nem pontos, és a számításhoz kellenek a kimenet 1., 2., ..., (n-1). deriváltjai
- A rendszermodell általában nem tökéletes

Cél:

Olyan eszköz (állapot-megfigyelő) tervezése, amelyhez nincs szükség a kimenet 0.-nál magasabb fokú deriváltjaira, és amelynek becslése aszimptotikusan tart a tényleges állapotvektor értékéhez.

Az állapot-megfigyelő algebrai alakja:

ÁTM:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + [B \ L] \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$$

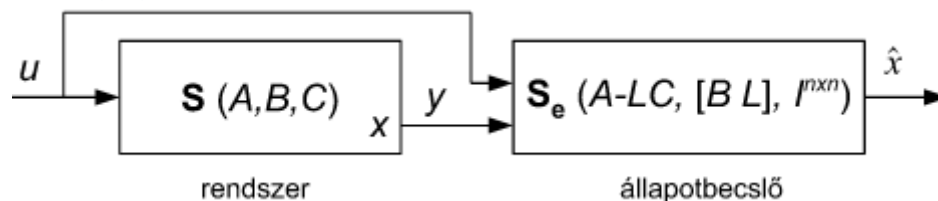
becslési hiba:

$$e = x - \hat{x}$$

és

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Az állapot-megfigyelő struktúrája:



Az állapot-megfigyelő kiszámítása:

Emlékeztető:

Pólusáthelyezésnél a zárt rendszer mátrixa $A_c = A - BK$ (adott A,B, kiszámítandó: k, feltétel: (A,B) irányítható)

Állapot-megfigyelő rendszermátrixa:

$A_0 = A - LC$ (adott: A,C, kiszámítandó: L, feltétel: ?)

Megoldás:

$$A_0^T = A^T - (LC)^T = A^T - C^T L^T$$

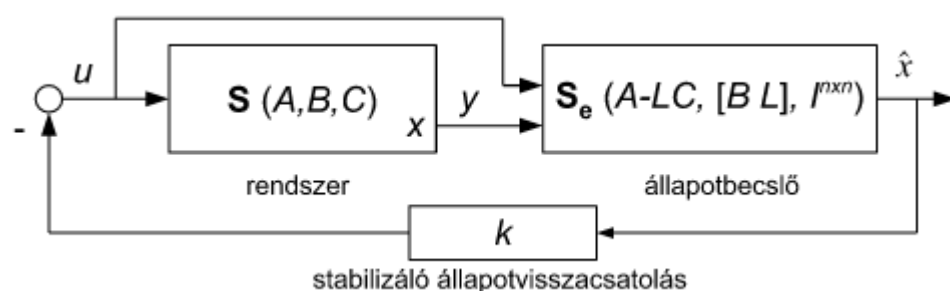
Tehát L a pólusáthelyezési szabályozás számítási algoritmusával kiszámítható úgy, hogy a becslő pólusai (A_0 sajátértékei) tetszőlegesen legyenek (azaz az állapotbecslő stabil legyen).

Feltétel: $[C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^{n-1})^T C^T] = O_n^T$ teljes rangú, azaz a rendszer megfigyelhető

Szeperációs elv:

Probléma:

Mi történik, ha az állapotbecslőt és a szabályozót összekapcsoljuk (dinamikus kimenet-visszacsatoláskor)?



Szeeparációs elv:

Stabilizáló állapot-visszacsatolásból és stabil állapotbecslőből álló zárt rendszer aszimptotikusan stabil, ugyanis a zárt rendszer dinamikája a következő:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Azaz a stabilizáló állapot-visszacsatolás (K) és a stabil állapotbecslő (L) egymástól függetlenül külön-külön megtervezhető.

Számítás:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = -K\hat{x}, \quad \text{és: } e = x - \hat{x}$$

Ebből: $u = -K(x - e) = -Kx + Ke$, és

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx + Ke) = (A - BK)x + BKe \quad (2)$$

$$\dot{e} = (A - LC)e \quad (3)$$

Sajátértékekre vonatkozó összefüggés:

$$\lambda_i \left(\begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \right) = \lambda_j(A - BK) \cup \lambda_k(A - LC),$$

és tudjuk, hogy $A - BK$ ill. $A - LC$ stabilitási mátrixok.

Lineáris kvadratikus szabályozás (LQR)

LQR: Problémafelvetés:

Adott:

- egy (MIMO) LTI ÁTM

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

- egy funkcionál (szabályozási cél)

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

ahol $Q^T = Q$, $Q > 0$ és $R^T = R$, $R > 0$

Kiszámítandó beavatkozás:

$\{u(t), \quad t \in [0, T]\}$, amellyel J minimális az ÁTM megoldásai mentén (megszorítás)

Variációszámítás:

Probléma:

Minimalizáljuk u-ra:

$$J(x, u) = \int_0^T F(x, u, t) dt$$

feltétel: $\dot{x} = f(x, u, t)$ Megoldás: vektor Lagrange-multiplikátorokkal $\lambda(\cdot)$

$$J(x, \dot{x}, u) = \int_0^T [F(x, u, t) + \lambda^T(t)(f(x, u, t) - \dot{x})] dt$$

Hamilton-függvény $H = F + \lambda^T f$

$$J = \int_0^T [H - \lambda^T \dot{x}] dt$$

 $\dot{x}$ parciális integrálással eliminálható

$$[\lambda^T x]_0^T = \int_0^T \dot{\lambda}^T x dt + \int_0^T \lambda^T \dot{x} dt$$

ekkor $J = \int_0^T [H - \lambda^T \dot{x}] dt$ -ből kapjuk:

$$J = -[\lambda^T x]_0^T + \int_0^T [H + \dot{\lambda}^T x] dt$$

 x és u variációja:

$$x(t) \rightarrow x(\alpha, t) = x(t) + \alpha \eta(t)$$

$$u(t) \rightarrow u(\beta, t) = u(t) + \beta \gamma(t)$$

Euler-Lagrange egyenletek:

Kritériumfüggvény:

$$I(\alpha, \beta) = -[\lambda^T(t)x(\alpha, t)]_0^T + \int_0^T [H(x(\alpha, t), u(\beta, t), t) + \dot{\lambda}^T(t)x(\alpha, t)] dt$$

 x -hez és u -hoz I szélsőértéke tartozik, ha

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_0^T \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T(t) \right] \eta(t) dt = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial \beta} = \int_0^T \frac{\partial H}{\partial u} \gamma(t) dt$$

Euler-Lagrange egyenletek:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

LQR Euler-Lagrange egyenletek

LTI rendszerekre:

$$f = Ax + Bu$$

$$F = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u)$$

$$H = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (Ax + Bu)$$

LQR Euler-Lagrange egyenletek: $\frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) = 2x^T Q$

$$\dot{\lambda}^T + x^T Q + \lambda^T A = 0, \quad \lambda^T(T) = 0$$

$$u^T R + \lambda^T B = 0$$

Átrendezett Euler-Lagrange egyenletek:

$$\dot{\lambda} + Qx + A^T \lambda = 0$$

$$u = -R^{-1} B^T \lambda$$

Állapotegyenlet:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad x(0) = x_0$$

Mátrix-vektor alak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{matrix} x(0) = x_0 \\ \lambda(T) = 0 \end{matrix}$$

LQR: irányítható & megfigyelhető eset:

Lemma * Ha (A,B) irányítható, akkor

$$\lambda(t) = K(t)x(t) \quad , \quad K(t) \in R^{n \times n}$$

A módosított állapot- és társ-állapot egyenletek:

$$\dot{\lambda} + Qx + A^T \lambda = 0 \Rightarrow \dot{K}x + K\dot{x} = -A^T Kx - Qx$$

$$u = -R^{-1} B^T \lambda \Rightarrow u = -R^{-1} B^T Kx$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow \dot{x} = Ax - BR^{-1} B^T Kx$$

$$\dot{K}x + K[A - BR^{-1} B^T K]x + A^T Kx + Qx = 0$$

$\forall x(t) \rightarrow$ Mátrix Ricatti differenciálegyenlet K(t)-re

$$\dot{K} + KA + A^T K - KBR^{-1} B^T K + Q = 0$$

Stacionárius eset:

Speciális eset: stacionárius megoldás $T \rightarrow \infty$

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = K \quad i.e. \quad \dot{K} = 0$$

Control Algebraic Ricatti Equation(CARE)

$$KA + A^T K - KBR^{-1} B^T K + Q = 0$$

Tétel: (R. Kalman) Ha (A,B) irányítható, akkor a CARE-nak egyértelmű pozitív definit szimmetrikus megoldása van (K).

LQR és tulajdonságai:

Megoldás: lineáris statikus teljes állapot-visszacsatolás

$$u^0(t) = -R^{-1}B^TKx(t) = -Gx(t)$$

ahol $G = R^{-1}B^TK$ Zárt kör dinamikája:

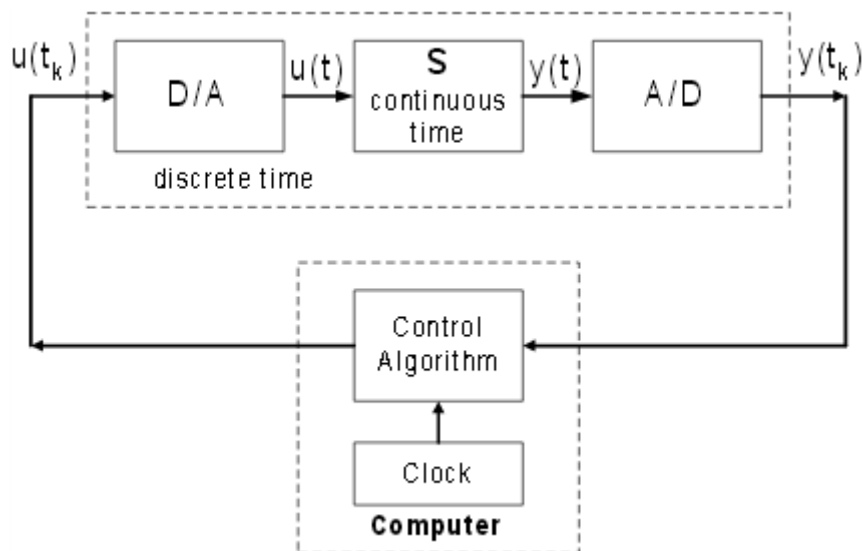
$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^TKx = (A - BG)x, \quad x(0) = x_0$$

A zárt kör tulajdonságai:

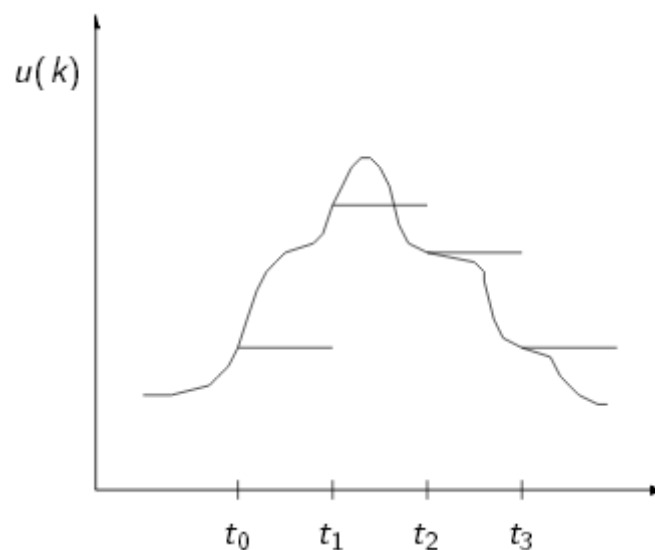
- a zárt kör aszimptotikusan stabil függetlenül A,B,C,R,Q értékétől, azaz $\text{Re } \lambda_i(A - BG) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$
- a zárt kör pólusai Q és R megválasztásától függenek

Folytonos idejű rendszerek mintavételezése és diszkretizálása, diszkrét idejű rendszerek leírása (állapottér-modell, impulzusátviteli operátor)

Mintavételezés:



A D/A átalakító működése:



CT-LTI rendszerek mintavételezése:

Adott:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

u mintavételezése nulladrendű tartóval

$$u(\tau) = u(t_k) = u(k) \quad , \quad t_k \leq \tau < t_{k+1}$$

Ekvidisztáns (periodikus) mintavételezés:

$$t_{k+1} - t_k = h = \text{const}$$

Kiszámítandó:

a mintavételezett (diszkrét idejű) rendszer ÁTM-je

Mintavételezett állapotegyenletek:

A folytonos idejű állapotegyenlet megoldása:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Helyettesítés: $t = t_{k+1}$ és $t_0 = t_k$

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

periodikus mintavételezés és $\theta = \tau - t_k$, $t_{k+1} - \tau = h - \theta$

$$x(k+1) = e^{Ah}x(k) + \int_0^h e^{A(h-\theta)}Bu(k)d\theta$$

$$x(k+1) = e^{Ah}x(k) + e^{Ah} \int_0^h e^{-A\theta}d\theta Bu(k)$$

$$x(k+1) = e^{Ah}x(k) + e^{Ah} \int_0^h e^{-A\theta}d\theta Bu(k)$$

és

$$\int_0^h e^{-A\theta}d\theta = \left[-A^{-1}e^{-A\theta}\right]_0^h = A^{-1}(I - e^{Ah})$$

Diszkrét idejű állapotegyenletek:

$$x(k+1) = e^{Ah}x(k) + A^{-1}(e^{Ah} - I)Bu(k)$$

DT³-LTI állapotegyenletek mintavételezett rendszerekhez:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$\Phi = e^{Ah} = I + Ah + \dots \quad , \quad \Gamma = A^{-1}(e^{Ah} - I)B = \left(Ih + \frac{Ah^2}{2!} + \dots\right)B$$

³ Diszkrét idejű

DT-LTI ÁTM:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

adott $x(0)$ kezdeti feltétellel és

$$x(k) \in R^n, y(k) \in R^p, u(k) \in R^r$$

véges dimenziós vektorok és

$$\Phi \in R^{n \times n} \quad \Gamma \in R^{n \times r} \quad C \in R^{p \times n} \quad D \in R^{p \times r}$$

mátrixok.

DT állapotegyenletek megoldása:

$$x(1) = \Phi x(0) + \Gamma u(0)$$

$$x(2) = \Phi x(1) + \Gamma u(1) = \Phi^2 x(0) + \Phi \Gamma u(0) + \Gamma u(1)$$

$$x(3) = \Phi x(2) + \Gamma u(2) = \Phi^3 x(0) + \Phi^2 \Gamma u(0) + \Phi \Gamma u(1) + \Gamma u(2)$$

..

..

$$x(k) = \Phi x(k-1) + \Gamma u(k-1) = \Phi^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j)$$

Impulzus átviteli operátor:

A DT-LTI ÁTM-ből számolva

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad , \quad y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$x(k+1) = q x(k) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$x(k) = (qI - \Phi)^{-1} \Gamma u(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) = [C(qI - \Phi)^{-1} \Gamma + D] u(k)$$

(Φ, Γ, C, D) ÁTM-hez tartozó impulzusátviteli operátor $H(q)$:

$$H(q) = C(qI - \Phi)^{-1} \Gamma + D$$

Az átviteli függvény diszkrét idejű megfigyelője.

Impulzus átviteli operátor SISO eset:

$$H(q) = C(qI - \Phi)^{-1} \Gamma + D = \frac{B(q)}{A(q)} \quad , \quad \deg B(q) < \deg A(q) = n$$

ahol $A(q)$ a Φ mátrix karakterisztikus polinomja.

Kapcsolat a diszkrét differenciaegyenlettel

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n)$$

DT-LTI rendszerek pólusai:

	folytonos idő	diszkrét idő
állapot egy.	$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$	$x(kh + h) = \Phi x(kh) + \Gamma u(kh)$ $\Phi = e^{Ah}$
kimeneti egy.	$y(t) = Cx(t)$	$y(kh) = Cx(kh)$
pólusok	$\lambda_i(A)$	$\lambda_i(\Phi)$ $\lambda_i(\Phi) = e^{\lambda_i(A)h}$

Diszkrét idejű irányíthatóság és megfigyelhetőség**Irányíthatóság:****Definíció:**

A diszkrét idejű rendszer irányítható, ha bármely kezdőállapothoz létezik olyan bemeneti jelsorozat, amellyel az $x^* = 0$ (!) állapot véges idő alatt elérhető.
(Másképp: Ha $\nexists \Phi^{-1}$ akkor az irányíthatósághoz az kell, hogy tetszőleges kezdeti értékből a rendszert az origóba tudjuk vezérelni.)

Definíció:

A diszkrét idejű rendszer elérhető (az irányíthatóságnál erősebb fogalom), ha egy tetszőleges x_0 kezdő- és tetszőleges x^* végállapothoz létezik olyan bemeneti jelsorozat, amely a rendszert véges idő alatt a kezdőállapotból a végállapotba viszi.

Az elérhetőségből mindig következik az irányíthatóság, de fordítva csak akkor igaz, ha $\exists \Phi^{-1}$.

Tétel:

Adott (Φ, Γ, C) és

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad , \quad x(0) = x_0 \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

Ha $W_c = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \dots \quad \Phi^{n-1}\Gamma]$ mátrix teljes rangú(n), akkor a rendszer elérhető

Megfigyelhetőség:

Definíció:

A diszkrét idejű rendszer megfigyelhető, ha van olyan véges k érték, hogy $\{u(0), \dots, u(k-1); y(0), \dots, y(k-1)\}$ jelekből $x(0)$ meghatározható

Tétel:

Adott (Φ, Γ, C) és

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad , \quad x(0) = x_0 \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

Ha $W_o = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix}$ mátrix teljes rangú, akkor a rendszer megfigyelhető

Diszkrét idejű rendszerek stabilitása: diszkrét idejű állapotegyenlet megoldásainak stabilitása, diszkrét idejű LTI rendszerek aszimptotikus stabilitása, Ljapunov tétel diszkrét idejű lineáris rendszerekhez

Tétel:

Egy DT-LTI rendszer aszimptotikusan stabil pontosan akkor, ha $\lambda_i(\Phi)$ értékek a komplex egységkörön belül vannak.

Tétel:

Az aszimptotikus stabilitásból következik a BIBO stabilitás

Bemenet nélküli állapotegyenlet:

$$x(k+1) = f(x(k), k)$$

első megoldás: $x^0(k), x^0(k_0) - ra$

második (perturbált) megoldás: $x(k), x(k_0) - ra$

Megoldás stabilitása $x^0(k)$ stabil, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta(\varepsilon, k_0)$ hogy

$\|x(k_0) - x^0(k_0)\| < \delta$ esetén $\|x(k) - x^0(k)\| < \varepsilon$ bármely $k \geq k_0$ -ra

Aszimptotikus stabilitás $x^0(k)$ aszimptotikusan stabil, ha stabil és $\|x(k) - x^0(k)\| \rightarrow 0$, ha $k \rightarrow \infty$ és $\|x(k_0) - x^0(k_0)\|$ elegendően kicsi

BIBO stabilitás

Egy diszkrét idejű rendszer BIBO stabil, ha

$$\|u\| \leq M_1 < \infty \rightarrow \|y\| \leq M_2 < \infty$$

ahol $\|\cdot\|$ megfelelő jelnorma

Diszkrét idejű Ljapunov-tétel:

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad f(0) = 0$$

$V(x)$ Ljapunov-függvény, ha

- $V(x)$ folytonos x -ben, $V(0) = 0$ és $V: R^n \rightarrow R$
- $V(x)$ pozitív definit
- $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$ negatív definit

Tétel:

Ha a rendszerhez létezik Ljapunov-függvény, akkor az $x(k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots$ megoldás aszimptotikusan stabil. Ha létezik továbbá egy Φ függvény, amelyre

$$0 < \Phi(\|x\|) < V(x) \text{ ahol } \Phi(\|x\|) \rightarrow \infty \text{ amikor } \|x\| \rightarrow \infty$$

akkor a megoldás bármely kezdeti értékre aszimptotikusan stabil.

Tétel:

Egy DT-LTI rendszer aszimptotikusan stabil pontosan akkor, ha bármely pozitív definit szimmetrikus Q mátrixhoz létezik P pozitív definit szimmetrikus megoldás az alábbi Ljapunov-egyenletre

$$\Phi^T P \Phi - P = -Q$$

Diszkrét idejű LQR szabályozás (bizonyítás nélkül), deadbeat-szabályozás**DT-LTI LQR szabályozás:**

Problémafelvetés:

Adott egy diszkrét idejű determinisztikus ÁTM

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

Keressük azt a beavatkozó diszkrét jelsorozatot u , amely minimalizálja a következő célfüggvényt:

$$J(x, u) = \sum_{k=1}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)),$$

$$\text{ahol } R = R^T > 0, \quad Q = Q^T \geq 0$$

Megoldás:

Az optimális visszacsatolás lineáris, teljes állapot-visszacsatolás(G):

$$u(k) = -Gx(k)$$

$$G = ((\Gamma^T S \Gamma + R)^{-1} (\Gamma^T S \Phi)),$$

ahol S a következő algebrai Ricatti-egyenlet megoldása:

$$\Phi^T S \Phi - S - (\Phi^T S \Gamma)(\Gamma^T S \Gamma + R)^{-1} (\Gamma^T S \Phi) + Q = 0$$

Deadbeat-szabályozás:

Alapfogalmak:

Tekintsük az $A \in R^{n \times n}$ mátrixot.

A-t nilpotens-nek nevezzük, ha valamely $k \geq 1$ -re $A^k = 0$

A következő állítások ekvivalensek:

- A nilpotens
- A valamennyi sajátértéke 0
- A karakterisztikus polinomja s^n

Problémafelvetés:

Adott egy diszkrét idejű ÁTM

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

és egy lineáris statikus teljes állapot-visszacsatolás

$$u(k) = -Gx(k)$$

Kérdés:

Megválasztható-e G úgy, hogy a zárt rendszer rendszermátrixa $\Phi - \Gamma \cdot G$ nilpotens legyen?

Ekkor ugyanis $x(k) = (\Phi - \Gamma \cdot G)^k x(0) = 0$, azaz a zárt rendszer véges (k) időlépésben az origóba jut.

Megoldás:

Ha a diszkrét idejű ÁTM elérhető, akkor G a pólusáthelyezéssel azonos módon megválasztható úgy, hogy $(\Phi - \Gamma \cdot G)$ valamennyi sajátértéke 0 legyen, azaz $(\Phi - \Gamma \cdot G)$ nilpotens legyen.

Diszkrét idejű sztochasztikus állapotter-modellek, Kálmán-szűrő

DT-LTI sztochasztikus I/O modell:

Definíció:

A diszkrét idejű LTI SISO sztochasztikus input-output modellek általános alakja a következő ARMAX folyamat:

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)e(k)$$

a következő polinomokkal:

$$A(q) = q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n, \quad B(q) = b_0 q^m + b_1 q^{m-1} + \dots + b_m,$$

$$C(q) = q^n + c_1 q^{n-1} + \dots + c_n$$

ahol $C(q)$ a feltételezés szerint stabil polinom.

DT-LTI sztochasztikus ÁTM:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) + v(k) \\y(k) &= Cx(k) + e(k) \\ \Phi &\in R^{n \times n} \quad \Gamma \in R^{n \times r} \quad C \in R^{p \times n}\end{aligned}$$

független, diszkrét idejű, nulla várható értékű, normális fehér zaj folyamatokkal:
 $\{v(k)\}_0^\infty$ és $\{e(k)\}_0^\infty$

$$\begin{aligned}E[v(k)v^T(k)] &= R_1, \quad E[v(k)v^T(j)] = 0, \quad \forall k \neq j \\E[v(k)e^T(j)] &= 0, \quad \forall k, j \\E[e(k)e^T(k)] &= R_2, \quad E[e(k)e^T(j)] = 0, \quad \forall k \neq j\end{aligned}$$

Kezdeti feltételek:

$$Ex(0) = m_0, \quad cov[x(0)] = R_0$$

Paraméterek:

$$(\Phi, \Gamma, C; R_1, R_2; m_0, R_0)$$

DT-LTI sztochasztikus differenciaegyenletek:

Definíció: (lineáris sztochasztikus DE)

$$x(k+1) = \Phi x(k) + v(k)$$

ahol $\{v(k)\}_0^\infty$ diszkrét idejű fehér zaj folyamat, és $v(k)$ független $x(k)$ -től.

A fenti egyenlet megoldása maga az $\{x(k)\}_0^\infty$ sztochasztikus folyamat.

Állapotegyenlet megoldása:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + v(k)$$

Várható érték függvény $m(k)$:

$$m(k+1) = \Phi m(k), \quad m(0) = m_0$$

Kovarianciafüggvény:

$$P(k) = cov[x(k), x(k)] = E\{\bar{x}(k)\bar{x}^T(k)\}, \quad \bar{x}(k) = x(k) - m(k)$$

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1)\bar{x}^T(k+1) &= [\Phi \bar{x}(k) + v(k)][\Phi \bar{x}(k) + v(k)]^T = \\&= \Phi \bar{x}(k)\bar{x}^T(k)\Phi^T + \Phi \bar{x}(k)v^T(k) + v(k)\bar{x}^T(k)\Phi^T + v(k)v^T(k)\end{aligned}$$

$$P(k+1) = \Phi P(k)\Phi^T + R_1, \quad P(0) = R_0$$

A kimeneti folyamat:

Hozzárendeljük az $\{y(k)\}_0^\infty$ kimeneti sztochasztikus folyamatot az állapotegyenlet megoldásához a következő egyenlettel:

$$y(k) = Cx(k)$$

ahol C konstans mátrix. Ekkor

$$m_y(k) = Cm(k) \text{ , } r_{yy} = CP(k)C^T$$

Kálmán-szűrő:

Becslés-szűrés-simítás problémafelvetés:

Adott:

- egy SISO rendszerből származó véges számú bemeneti és kimeneti értéket tartalmazó mérési rekord (diszkrét időpillanatokban)

$$D(0, k) = \{y(i), u(i) | i = 0, 1, \dots, k\}$$
- a diszkrét idejű sztochasztikus rendszer ÁTM-je

Megbecsülendő:

Az állapotvektor ($\hat{x}(k + m)$) értéke a mérési adatok alapján.

m értékétől függően a következő speciális esetek lehetségesek:

- $m < 0$: simítás (smoothing)
- $m = 0$: szűrés (filtering)
- $m > 0$: becslés (prediction)

Kálmán-szűrő problémafelvetés:

Adott:

- Állapotbecslő (Kálmán-becslő) a következő alakban:

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi \hat{x}(k|k-1) + \Gamma u(k) + K(k) [y(k) - C \hat{x}(k|k-1)] \text{ , } E \hat{x}(0) = m_0$$
- Egy ÁTM-el adott diszkrét idejű SISO sztochasztikus rendszer

A becslési hiba: $z(k) = x(k) - \hat{x}(k)$

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \Phi z(k) + v(k) - K(k)[y(k) - C \hat{x}(k|k-1)] \\ z(k+1) &= (\Phi - K(k)C)z(k) + v(k) - K(k)e(k) \end{aligned} \quad (*)$$

A becslési hiba folyamat $P(k)$ kovarianciafüggvénye:

$$P(k) = E\{[z(k) - Ez(k)][z(k) - Ez(k)]^T\}$$

Keressük:

Az $(\propto^T P(k+1) \propto)$ skalárt minimalizáló $K(k)$ mátrixot