

Valószínűségszámítás feladatok

Klasszikus valószínűség

- 1./ Egy csomag magyar kártyát jól összekeverünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 4 ász egymás után helyezkedik el?
- 2./ 100 alma közül 10 férges. Mennyi a valószínűsége, hogy válogatás nélkül 5 almát kivéve, közöttük lesz férges alma?
- 3./ Két testvér ugyanabba a 27-es létszámú osztályba jár. Egy gyors sorakozónál mindenki beáll valahova.
 - a./ Mennyi a valószínűsége, hogy a két testvér között pontosan 10-en állnak?
 - b./ Hogyan változik az eredmény, ha kör alakban helyezkednek el?
- 4./ A 32 lapos magyar kártyából 4 lapot véletlenszerűen kiválasztunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között pontosan egy piros és egy ász lesz?
- 5./ Egy urnában 6 piros, több fehér és fekete golyó van.

Annak a valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva, az fehér vagy fekete lesz: $\frac{3}{5}$; hogy piros

vagy fekete színű lesz: $\frac{2}{3}$. Hány fehér és fekete golyó van az urnában?

- 6./ Annak a valószínűsége, hogy egy most felvett főiskolai hallgató diplomát szerez, 0,4. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy 5 hallgató közül
 - a./ senki sem szerez diplomát,
 - b./ pontosan 1 hallgató szerez diplomát,
 - c./ legalább 1 hallgató diplomás lesz,
 - d./ mindenki diplomát szerez!
- 7./ Egy pénzérmét 10-szer egymás után feldobunk. Ha fejet kapunk, azt F -fel, ha írást, azt I -vel jelöljük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az F és I betűknek ez a 10 elemű sorozata tartalmaz két azonos betűt egymás után?
- 8./ Egy vendéglő egyik asztalánál 12 vendég ül. Összesen rendelnek 3 üveg sört, 4tésztát, 3 kávé és 2 fagyaltot. (Minden vendég csak egy tételt rendel és a sörök, tészták, stb. teljesen egyformák.) A pincér emlékszik arra, hogy miből mennyit kell hoznia, de teljesen elfelejtette, hogy mit, kinek kell adnia. Találomra szétosztja amit hozott. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja amit kért?
- 9./ Mennyi a valószínűsége, hogy ha valakinek az 52 lapos francia kártyából 13 lapot kiosztanak, akkor legfeljebb 3 ásza lesz?
- 10./ A 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúzunk 6 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy e hat lap között mindegyik szín előfordul?
- 11./ Egy rossz, de néha működő villanykapcsoló átlagosan a 12-ik próbálkozásra gyújtja fel a villanyt. Mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik kísérletre gyullad fel a villany?

Feltételes valószínűség

- 12./ Három kockát feldobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik 6-os van?
- 13./ Ha nagyon sok kétgyerekes család közül kiválasztunk véletlenszerűen egyet, és megtudjuk, hogy legalább az egyik gyermek lány, mennyi a valószínűsége, hogy van fiú is a családban?
- 14./ Három kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12

15./ Bizonyítsa be, hogy ha $P(A) = 0,7$ és $P(B) = 0,8$, akkor $P(A|B) \geq 0,625$!

Teljes valószínűség tétel, Bayes-tétel

- 16./ Péter pénzét 3 egyforma borítékban tartja; az elsőben két ezerforintos, a másodikban egy ezer- és egy ötezer forintos, a harmadikban egy ezer- és három ötezer forintos van. Péter találmra kivesz egy borítékot, és abból találmra kihúz egy bankjegyet. Mennyi a valószínűsége, hogy ezerforintost húzott ki?
- 17./ Egy gyárban három gép gyártja a csavarokat. A termékek 25%-át az A gép, 35%-át a B gép, 40%-át a C gép gyártja. Az A gép 5%-ban, a B gép 4%-ban, a C gép pedig 2%-ban termel selejtet. Ha egy találmra kiválasztott csavar selejtes, mennyi a valószínűsége, hogy azt az A gép gyártotta.
- 18./ Egy műhelyben három műszakban gyártanak azonos terméket. Egy napon az összes gyártott termékbl az első műszakban 40%, a második és harmadik műszakban 30-30% készült. Az első műszakban 2%, a másodikban 3%, a harmadikban 5% hibás áru készült. A három műszakban elkészült teljes mennyiségből véletlenszerűen kiválasztunk egy darabot. Mennyi a valószínűsége, hogy ez hibátlan termék.
- 19./ Egy urnában 3 cédula van az 1, 2 és 3 számokkal megszámozva. Visszatevés nélkül egymás után két cédulát kihúzzunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy mind a két kihúzott cédulán páratlan szám áll. Számítsa ki a $P(A|B_i)$ feltételes valószínűségeket ($i = 1, 2$), ha a B_i feltételek a következőképpen vannak definiálva:
- a./ A B_1 feltétel azt jelenti, hogy az 1 a két kihúzott szám között van.
 - b./ A B_2 feltétel azt jelenti, hogy elsőre az 1-et húztuk, vagy elsőre a 2-et és másodszorra az 1-et.
- 20./ Egy műhelyben három műszakban gyártanak azonos terméket. Egy napon az összes gyártott termékbl az első műszakban 40%, a második és harmadik műszakban 30-30% készült. Az első műszakban 2%, a másodikban 3%, a harmadikban 5% hibás áru készült. A három műszakban elkészült teljes mennyiségből véletlenszerűen kiválasztunk egy darabot és megvizsgáljuk. A termék hibás. Mennyi a valószínűsége, hogy a II. műszakban gyártották ezt a terméket?
- 21./ Egy egyetemi vizsgán az A szakos hallgatók 60%-a, a B szakos hallgatók 75%-a, a C szakos hallgatók 85%-a vizsgázik sikeresen. Az A szakos hallgatók az évfolyam 40%-át, a B szakos hallgatók az évfolyam 35%-át teszik ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgátónak nem sikerült a vizsgája
- 22./ Három gyárban TV-képcsöveket gyártanak. Az első gyár adja a teljes mennyiség negyedét, a második az egész 45%-át, a maradékot a harmadik gyárban készítették. Egy vizsgálat során kiderült, hogy az előírt működési óraszámot az első gyárban gyártott képcsövek 15%-a, a másodikban gyártottak 30%-a, a harmadikban gyártottak 25%-a éri csak el. Mennyi a valószínűsége, hogy a teljes mennyiségből egy találmra kiválasztott képcső az előírt ideig működik?
- 23./ Egy városban ugyanannyi nő van, mint férfi. Minden 10000 nő közül 25 és minden 100 férfi közül 5 színvak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a színvakokról vezetett nyilvántartásból egy találmra választott karton egy férfi adatait tartalmazza?
- 24./ Feldobunk egy érmét. Ha fej, akkor a 2 piros és 4 fehér lapú A kockával, ha írás akkor a 2 fehér és 4 piros lapú B kockával dobunk 2-szer egymás után. Mennyi a valószínűsége, hogy a második dobás eredménye piros

Megoldások

1./ $P = \frac{4! \cdot 29!}{32!} = 0,0008.$

2./ A : lesz férges a választottak között, $\bar{A}$: nem lesz férges a választottak között.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} = 0,4162.$$

3./ a./ $P = \frac{16! \cdot 2 \cdot 10!}{27!} = 0,0000000139.$

b./ $P = \frac{16! \cdot 2 \cdot 10!}{26!} = 0,0000000139.$ (nem változik)

4./ Két eset lehetséges: A piros ász vagy a 4 választott között van, vagy nincs közöttük.

$$\text{Így } P = \frac{\binom{1}{1} \binom{21}{3} + \binom{3}{1} \binom{7}{1} \binom{21}{2}}{\binom{32}{4}} = 0,1596.$$

5./ Legyen az urnában a 6 piros golyó mellett x fehér és y fekete golyó.

$$\text{Így } \left. \begin{array}{l} \frac{3}{5} = \frac{x+y}{6+x+y} \\ \frac{2}{3} = \frac{6+y}{6+x+y} \end{array} \right\} . \text{ Az egyenletrendszer megoldása: } x = 5 \text{ és } y = 4.$$

6./ a./ $0,6^5,$ b./ $\binom{5}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^4,$ c./ $1 - 0,6^5,$ d./ $0,4^5$

7./ $P(\text{van két azonos betű}) = 1 - P(\text{nincs két azonos betű}) = 1 - \frac{2}{2^{10}} = 0,998.$

8./ $P = \frac{3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!}{10!} = 0,000476.$

9./ $P(\text{legfeljebb 3 ász lesz}) = 1 - P(4 \text{ ász lesz}) = 1 - \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} = 0,9974.$

10./ Két eset lehetséges: Egy színből 3 db, és a maradék három színből 1 – 1 db, vagy két színből 2 – 2 db, és a maradék két színből 1 – 1 db.

$$\text{Így a lehetőségek száma: } \binom{4}{1} \binom{8}{3} \binom{8}{1} \binom{8}{1} \binom{8}{1} + \binom{4}{2} \binom{8}{2} \binom{8}{2} \binom{8}{1} \binom{8}{1} = 415744.$$

$$P = \frac{\binom{4}{1} \binom{8}{3} \binom{8}{1} \binom{8}{1} \binom{8}{1} + \binom{4}{2} \binom{8}{2} \binom{8}{2} \binom{8}{1} \binom{8}{1}}{\binom{32}{6}} = \frac{415744}{906192} = \underline{\underline{0,4588.}}$$

11./ $P = \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{1}{12} = 0,07002.$

12./ A : Van hatos dobás. B : Nincs két egyforma dobás.

$$P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}, \quad P(AB) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}.$$

Így $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = 0,5.$

13./ A lehetséges esetek: ll, lf, fl, ff .

A : Van lány a családban. B : Fiú is van a családban.

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

14./ A : az egyik kockán 6-os van. B : a dobott számok összege 12.

Az összes esetek száma: 6^3 .

$A \cap B$ esemény a következő esetekben következik be:

A dobások eredménye:	1, 5, 6	darabszám	$3! = 6$
	2, 4, 6		$3! = 6$
	2, 5, 5		$\frac{3!}{2!} = 3$
	3, 3, 6		$\frac{3!}{2!} = 3$
	3, 4, 5		$3! = 6$
	4, 4, 4		1

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{6^3}}{\frac{25}{6^3}} = \frac{15}{25} = 0,6.$$

15./ $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$. Mivel $P(A+B) \leq 1$, ezért
 $P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \leq 1$, vagyis $P(A \cdot B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 0,7 + 0,8 - 1 = 0,5$

Így $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \geq \frac{0,5}{0,8} = 0,625.$

16./ A : Ezer forintost húzott ki. B_i : Az i -k borítékból húzta ki ($i = 1, 2, 3$).

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(A|B_i) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

17./ A : A választott termék selejt. B_i : Az i -k gép gyártotta ($i = A, B, C$).

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(A|B_i) = 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,0345.$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,0345} = 0,3523.$$

18./ A : A választott termék hibátlan. B_i : Az i -k műszakban gyártották ($i = 1, 2, 3$).

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(A|B_i) = 0,4 \cdot 0,98 + 0,3 \cdot 0,97 + 0,3 \cdot 0,95 = 0,968.$$

$$19./ \quad a./ \quad P(A|B_1) = \frac{P(AB_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}. \quad b./ \quad P(A|B_2) = \frac{P(AB_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.$$

$$20./ \quad P(\text{hibás}) = 0,4 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,05 = 0,032.$$

$$P(\text{II. - ban gyártották, ha hibás}) = \frac{0,3 \cdot 0,03}{0,032} = 0,28125.$$

$$21./ \quad P(\text{bukott}) = 0,4 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,15 = 0,285.$$

$$22./ \quad P(\text{jó}) = 0,25 \cdot 0,15 + 0,45 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,25 = 0,2475.$$

$$23./ \quad P(\text{színvak}) = 0,5 \cdot \frac{20}{10000} + 0,5 \cdot \frac{5}{100} = 0,0275.$$

$$P(\text{férfi, ha színvak}) = \frac{0,5 \cdot 0,05}{0,0275} = 0,9091.$$

$$24./ \quad \text{Az első dobás eredménye érdektelen.}$$

$$P(\text{a második piros}) = 0,5 \cdot \frac{2}{6} + 0,5 \cdot \frac{4}{6} = 0,5$$