

KOMBINATORIKA

Permutációk, kombinációk, variációk

2. Az 1, 2, 3, 4, 5 elemeknek hány permutációja van, amelynek harmadik jegye 1-es? Írjuk fel őket!

Annyi ahányféleképpen a 2, 3, 4, 5 elemek permutálhatóak, tehát $4! = 24$.

3. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyekből készíthető nyolcjegyű számok közül hány kezdődik 125- tel?

Annyi, ahányféleképpen a maradék öt jegy permutálható, tehát $5! = 120$.

4. Hány olyan permutációja van az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 elemeknek, amelyekben az első három helyet a 6, 7, 8 elemek foglalják el valamilyen sorrendben, s az utolsó helyen 5-ös áll?

Az első három helyen a 6, 7, 8 elemeket $3!$ -féle sorrendben helyezhetjük el. A következő 4 helyre az 1, 2, 3, 4 elemeket $4!$ - féleképpen írhatjuk, így a feltételnek eleget tevő összes lehetőségek száma: $3!4! = 144$.

7. Hányféleképpen lehet 8 gépre 8 munkást elosztani, ha az első gépre csak 2 munkás jöhet számításba?

Ha az első gépre az egyik szoba jövő munkást helyezzzük, akkor a többit a további gépekre $7!$ - féleképpen helyezhetjük el. Hasonló a helyzet, ha az első gépre a második munkást helyezzzük. Az összes lehetséges megoldás száma tehát $2 \cdot 7!$.

8. Hányféleképpen lehet egy kerek asztal körül 20 embert elhelyezni, ha közülük kettő okvetlenül egymás mellé akar kerülni?

$2 \cdot 18!$

9. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett 3 férfi és 4 nő úgy, hogy a férfiak és a nők felváltva következzenek egymás után?

Ilyen elhelyezkedések csak úgy jöhetnek létre, ha a páratlan sorszámú helyeken nők ülnek. Mivel a nők összes elhelyezkedéseinek száma $4!$, a férfiaké $3!$, így a keresett megoldás: $3!4! = 144$.

10. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett 4 férfi és 4 nő úgy, hogy a férfiak és a nők felváltva következzenek egymás után?

A páratlan sorszámú helyeken vagy férfiak ülnek, vagy nők. Az előző feladatban alkalmazott meg gondolás segítségével az összes lehetőségek száma $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$.

11. Egy dobozban 20 darab alkatrész van. Ezek között 5 selejtes. Hányféleképpen vehetjük ki egyenként mind a 20 darab alkatrészt úgy, hogy a selejteket utoljára vesszük ki?

A megoldás: $15! \cdot 5!$

13. Határozzuk meg az 1, 2, 2, 3, 3, 3 elemek permutációinak számát. Ezek között hány olyan van, amelyben az első helyen a 2 számjegy áll?

A keresett permutációk száma: $\frac{6!}{2! \cdot 3!} = 60$. Ezek között olyan permutáció, amelynek első jegye 2-es, $\frac{5!}{3!} = 20$ van.

15. A KOMBINATORIKA szó betűinek hány permutációja van?

Megoldás: $\frac{13!}{(2!)^4}$

17. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből úgy készítünk tízjegyű számokat, hogy minden számjegyet kétszer felhasználunk. Ezek közül hány kezdődik 135- tel?

Annyi ahányféleképpen a maradék 1 2 2 3 4 4 5 elemek permutálhatók a 135 leírása után. Ezek száma: $\frac{7!}{2! \cdot 2!}$

18. Hány hatjegyű, páros szám készíthető a 2, 2, 3, 5, 6, 6 számjegyekből?

Az utolsó jegy 2 vagy 6 lehet. A kérdéses számok száma tehát: $\frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!} = 120$

20. Hány ötjegyű szám készíthető a 0, 1, 1, 3, 3 számjegyekből?

Olyan permutáció, amely 0- val kezdődik nem tekinthető 5- jegyű számnak. A kérdéses ötjegyű számok száma tehát: $\frac{5!}{2! \cdot 2!} - \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 24$

28. Hány átlója van egy konvex n - szögnek?

Az n csúcspont $\binom{n}{2}$ egyenest határoz meg. Ezek között vannak az oldalak is. Az átlók száma: $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

30. Egy pályázatra 10 pályamunka érkezett, és 6 egyenlő díj van. Hányféleképpen lehet a díjakat kiadni, ha díjak felezése, vagy más megosztása tilos?

Megoldás:

$$\binom{10}{6}$$

31. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 elemeknek hány negyedosztályú kombinációja nem tartalmazza az 1, 2, 3 elemek mindegyikét?

Az összes negyedosztályú kombinációk száma $\binom{7}{4}$. Olyan negyedosztályú kombinációk, amelyek az 1, 2, 3 elemeket tartalmazzák, úgy készíthetők, hogy ezekhez még hozzáveszünk egy elemet a maradék elemek közül, ez $\binom{4}{1}$ -féleképpen lehetséges. Az olyan negyedosztályú kombinációk száma tehát, amelyek az 1, 2, 3 elemeket nem tartalmazzák: $\binom{7}{4} - \binom{4}{1} = 31$.

33. Egy gyár 4 férfi és 4 női munkást akar felvenni. A felvételre 5 férfi és 8 nő jelentkezett. Hányféleképpen választhatjuk ki a felveendő munkásokat?

A négy férfi $\binom{5}{4}$ -féleképpen választható ki, a négy nő $\binom{8}{4}$ -féleképpen. Az összes lehetőségek száma: $\binom{5}{4} \cdot \binom{8}{4} = 350$

34. Egy dobozban 1- től 20- ig számozott, 20 darab gépalkatrész van. Hányféleképp vehetünk ki 5 gépalkatrészt úgy, hogy közöttük legyen 3 meghatározott sorszámú alkatrész?

A három adott szám mellé még két számot kell vennünk a maradék 17 elem közül, ez $\binom{17}{2}$ -féleképpen lehetséges.

37. Tizenkét tanuló 3 csónakot bérel. Az egyik csónak 3 üléses, a másik 4 üléses és a harmadik 5 üléses.

a.) Hányféleképpen foglalhatnak helyet a csónakokban?

b.) Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha két tanuló feltétlenül egy csónakba akar kerülni?

$$a.) \binom{12}{3} \cdot \binom{9}{4} \cdot \binom{5}{5} = 27720$$

$$b.) \text{ Ha a két tanuló az első csónakba ül: } \binom{10}{1} \binom{9}{4} \binom{5}{5} = 1120$$

$$\text{ha a másodikba ülnek, akkor } \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{5} = 2520$$

$$\text{ha a harmadikba, akkor } \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3} = 4200 \text{ az összes helyfoglalási lehetőség.}$$

Ezek összege adja a kérdésre a választ.

39. Hány olyan hatjegyű szám van, melynek jegyei mind különbözőek, amelyben 4 páratlan számjegy szerepel?

A kérdéses hatjegyű számok száma:

$$\binom{5}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot 6! - \binom{5}{4} \cdot \binom{4}{1} 5! = 33600$$

40. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a KÖZGAZDÁSZ szó ha a táblázat bal felső betűjétől indulunk, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

K	Ö	Z	G	A	Z
Ö	Z	G	A	Z	D
Z	G	A	Z	D	Á
G	A	Z	D	Á	S
A	Z	D	Á	S	Z

Megoldás: $\binom{9}{4}$

41. Egy adott munkára a műhely dolgozói közül 4-et választanak ki. Az összes választási lehetőségek száma 4845. Hány dolgozó van a műhelyben?

Most a következő egyenletet oldjuk meg:

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 4845$$

Mivel n csak egész számot jelenthet, érdemes az egyenletet próbálgatással megoldani. Az $n=20$ a helyes megoldás, ami behelyettesítéssel azonnal látható.

44. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Összesen 66 kézfogás történt. Hányan voltak a társaságban?

Ha x -szel jelöljük a társaság létszámát, akkor az $\binom{x}{2} = 66$ egyenletet kell megoldanunk, amire $x=12$ adódik.

46. 5 doboz mindegyikében 12 darab, 1- től 12- ig számozott gépalkatrész van. Hányféleképpen vehetünk ki minden dobozból egy- egy alkatrészt, ha a kivett alkatrészek sorrendjére nem vagyunk tekintettel?

A lehetséges esetek száma: $\binom{12+5-1}{5} = \binom{16}{5}$

50. Hány háromjegyű számot készíthetünk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből, ha minden szám csak egymástól különböző számjegyeket tartalmazhat?

A lehetséges számok száma: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

53. 20 munkásból 15-öt kell futószalag mellé állítani. Hányféleképpen lehetséges ez, ha a futószalaghoz állítás sorrendjét is figyelembe vesszük a lehetőségek összeszámlálásakor?

A lehetőségek száma: $\frac{20!}{(20-15)!} = \frac{20!}{5!}$

54. 10 munkahely mindegyikére kell küldeni egy szakmunkást és vele egy segédmunkást. Hányféleképpen lehetséges ez, ha a vállalat 10 szakmunkással és 12 segédmunkással rendelkezik?

A 10 szakmunkást a 10 munkahelyre $10!$ -féleképpen oszthatjuk el. A segédmunkások közül 10-et $\frac{12!}{(12-10)!} = \frac{12!}{2!}$ -féleképpen küldünk a 10 munkahelyre. Így az összes

elosztási lehetőség száma: $10! \cdot \frac{12!}{2!}$

56. Egy dobozból, amelyben 8 piros és bizonyos számú fehér, számozott golyó van, egymás után, visszatétel nélkül 1280-féleképpen húzható ki 3 golyó úgy, hogy két piros, vagy két fehér golyó ne következzen egymás után. Hány fehér golyó van a dobozban?

Ha x jelöli a fehér golyók számát, akkor $V_8^2 \cdot V_x^1 + V_x^2 \cdot V_8^1 = 1280$. Ebből $56x + 8x(x-1) = 1280$, $x=10$.

58. Írjuk fel az 1, 2 elemek összes negyedosztályú ismétléses variációját!

Megoldás: 2^4 .

65. A 32 lapú kártyacsomagból egymás után kihúzunk 4 lapot. Hányféleképpen lehetséges ez? Hányféleképpen húzhatunk négy lapot úgy, hogy a már kihúzottat a húzás után visszatesszük?

Az első esetben ismétlés nélküli variációkról van szó, ezek száma $V_{32}^4 = 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29$.

A második kérdés ismétléses variációra vonatkozik, s a megoldás: $V_{32}^{4,i} = 32^4$

66. Magyarországon az autórendsám készítéséhez 25 betűt és 10 számjegyet használnak. Egy rendszám táblán 2 betű, majd 4 számjegy szerepel. Hány autót lehet így megkülönböztetni?

$$25^2 \cdot 10^4 = 6250000$$

69. Az 1,2,3,4,5, számjegyek felhasználásával hány olyan négyjegyű szám írható fel, amelyben két különböző páros és két különböző páratlan számjegy szerepel?

$$\binom{3}{2} \cdot 4! = 72$$

74. Az 1,2,3,4,5 számjegyekből hány négyjegyű számot állíthatunk elő

- a) egy számjegy felhasználásával;
- b) két különböző számjegy felhasználásával;
- c) három különböző számjegy felhasználásával;
- d) négy különböző számjegy felhasználásával?

a.) 5

$$b.) 2 \cdot \binom{5}{2} \cdot \frac{4!}{3!} + \binom{5}{2} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 140$$

$$c.) 3 \cdot \binom{5}{3} \frac{4!}{2!} = 360$$

$$d.) \binom{5}{4} \cdot 4! = 120$$

76. Hányféleképpen oszthatunk ki 32 kártyát négy játékos között úgy, hogy minden játékos 8 kártyát kapjon?

Gondoljuk el a 32 kártyát egymás mellé rakva, és írjuk mindegyike fölé a játékosokat jelölő A, B, C, D betűk valamelyikét, mindegyiket 8-szor. Egy így kapott sorrend egy

szétosztási lehetőséget jelent. Az összes lehetőségek száma: $\frac{32!}{8! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 8!} = \frac{32!}{(8!)^4}$.