

Többdimenziós valószínűségi vektorok:

Motiváció: pl. egy rászorított veltlen mozgást három (váltlen) koordináta írja le.

pl. töredék más (>100) irányú árat kell figyelni

Megj: Általában az áram $d=2$

Def: Legyen $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, melyre $X_i: i=1,2,\dots,d$ függvények a koordinátai val. vektorok.

Ekkor $X=(X_1, X_2, \dots, X_d)$ -t d -dimenziós val. vektoroknak nevezzük

Példa: X egy adott diák iradalánysága, Y pedig ugyanannak a diáknak a matek-jegye

$$R(X)=R(Y)=\{1,2,3,4,5\}$$

$$\text{Pl: } P(X=4 \text{ v. } 5, Y=1 \text{ v. } 2) = P(\text{"jó iradalamból, de rossz matekból"})$$

$$R(X,Y)=\{(x,y) \mid x,y \in \{1,2,3,4,5\}\}$$

$$p_{ij} = P(X=i, Y=j)$$

Def: Legyen (X,Y) 2-dim. dimenziós val. vektor. Ekkor az (x_i, y_j, q_{ij}) számhármast halmaza (ahol $q_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j)$) az (X,Y) együttes eloszlása.

Megj: X -nek és Y -nek ettől függetlenül van külön-külön is eloszlása: $(x_i, p_i): p_i = P(X=x_i)$
 $(y_j, r_j): r_j = P(Y=y_j)$

$\hookrightarrow$ Lényeg: Az együttes eloszlás leírja (X,Y) együttes viselkedését,
és belőle X, Y saját eloszlásai is megkaphatók.

Elnevezés: (x_i, p_i) : X marginális peremeloszlás / marginális eloszlás

(y_j, r_j) : Y marginális eloszlás

$$\begin{aligned} \text{1. Állítás: } & \left. \begin{aligned} \text{(i) } p_i &= P(X=x_i) = \sum_j q_{ij} \\ \text{(ii) } r_j &= P(Y=y_j) = \sum_i q_{ij} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (x_i, y_j, q_{ij}) \text{ meghatározza} \\ & (x_i, p_i) \text{ + és } (y_j, r_j) \end{aligned} \end{aligned}$$

Biz: (i) $B_j = \{Y=y_j\}, j=1,2,\dots,n \Rightarrow$ teljes események $\Rightarrow (B_j) \Omega$ partíciója $\Rightarrow \Omega = \bigcup B_j$

$$p_i = P(X=x_i) = P(\underbrace{\{X=x_i\}}_{\text{diszjunkt}} \cap \Omega) = P(\{X=x_i\} \cap (\bigcup_j B_j))$$

(ii) analóg a levezetés az előzőhöz

$$\text{2. Állítás: } \sum_{i,j} q_{ij} = 1$$

X.20

Biz: $B_j = \{\omega \mid \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\} \Rightarrow \Omega$ partícióit adja

$$\sum_{i,j} q_{ij} = \sum_{i,j} P(B_{ij}) = P(\underbrace{\bigcup_{i,j} B_{ij}}_{\Omega}) = 1$$

Def: (x_i, y_j, q_{ij}) sorozat egy (ξ, η) 2-dimenziós dimenziós val. vektor eloszlása

$$\Leftrightarrow q_{ij} \geq 0 \text{ és } \sum_{i,j} q_{ij} = 1$$

● Folytonos 2D valószínűségi eloszlás:

Def: Legyen (X, Y) egy 2D val. vektor. Azt mondjuk, hogy ez folytonos, ha létezik $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény, hogy $\forall I, J \in \mathbb{R}$ intervallumok esetén

$$P(X \in I, Y \in J) = \int_{I \times J} f(x, y) d(x, y) \Rightarrow \text{ahol } f\text{-et sűrűségfüggvénynek nevezzük}$$

Lehetőség: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény pontosan akkor együttes sűrűségfüggvénye valamilyen (ξ, η) val. vektorának, ha $\int_{I \times \mathbb{R}} f(x, y) d(x, y) = 1$

THM: Legyen (ξ, η) 2D folytonos val. vektor és f sűrűségfüggvénye. Ekkor ξ is és η is (1D) folytonos val. vektorok és $f_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$ illetve $f_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$

Példa: $(\xi, \eta) \rightarrow \eta$: eltolható hibajelének megadása, ξ : élettartama

$$f(x, y) = c y e^{-yx}, \quad y \in (0, 1), \quad x \in (0, \infty)$$

a) Mennyi legyen c értéke, hogy ez együttes sűrűség lehessen?

b) Milyen f_ξ és f_η margális sűrűsége?

$$a) \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^\infty c \cdot y \cdot e^{-yx} dx dy = \int_0^1 c \left(\int_0^\infty y e^{-yx} dx \right) dy = c \int_0^1 1 dy = \boxed{c=1}$$

exp(y) átszorzás

$$b) (i) f_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = \int_0^\infty y e^{-yx} dx = 1 \cdot y \in (0, 1) \quad \left. \begin{array}{l} \eta \text{ egyenletes eloszlás } [0, 1]\text{-en} \\ f_\eta(y) = 0, \text{ ha } y \notin (0, 1) \end{array} \right\}$$

$$(ii) f_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \int_0^1 y e^{-yx} dy = \left[y \frac{e^{-yx}}{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^{-yx} \cdot \frac{1}{-x} dy = \frac{e^{-x}}{-x} + \int_0^1 \frac{e^{-yx}}{x} dy =$$

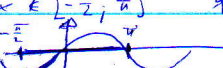
$$= \frac{e^{-x}}{x} + \left[\frac{e^{-yx}}{-x^2} \right]_0^1 = \frac{1 - e^{-x}}{x^2} \cdot x \in (0, \infty) \rightarrow \text{ha } x \notin (0, \infty): f_\xi(x) = 0$$

Függetlenség:

Def: $\{X, Y\}$ val. vektorok függetlenek, ha bármely $I, J \in \mathbb{R}$ intervallumokra

$$P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I) P(Y \in J)$$

Lehetőség: Ha (X, Y) 2D diszkrét val. vektor és függetlenek $\Leftrightarrow p_{ij} = p_i \cdot q_j \cdot \forall i, j$

① $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ 0 & : x \in [-\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$ *stíggugt = gætt = e?*
 NEH, mest  $\rightarrow$ væggin $\exists x \in [-\frac{\pi}{2}, \pi] : f(x) < x$

② $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & : x < 1 \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}$ *stíggugt = e?* $g(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \checkmark$
 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-\infty}^{-1} 0 dx + \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-1}^{\omega} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{\omega} = +1 \checkmark$

③ $h(x) = \begin{cases} \cos(x) & : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & : x \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$ $h(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \checkmark$
 $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1 \checkmark$

$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cos(x) dx = x \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = \frac{\pi}{2} + \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

~~$D(x) = E(x^2) - E^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cos(x) dx - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 = x^2 \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + x \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2} - 1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 = \frac{\pi}{2} - 1$~~

~~$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin(x) dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left[2x \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2) \cos(x) dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2 \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2 = -2$~~

$D^2(x) = E(x^2) - E^2(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi - 1 = \pi - 3$

④ $F(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & : 0 < x \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} +\lambda e^{-\lambda x} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases} \rightarrow \left(\lambda = \frac{1}{3} \rightarrow P(\xi > 5) = ? \right)$

$P(\xi > 5) = 1 - P(\xi \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 5}) = e^{-\frac{5}{3}} = 0,19$

$P(\xi > 7 | \xi > 2) = \frac{P(\xi > 7)}{P(\xi > 2)} = \frac{1 - P(\xi \leq 7)}{1 - P(\xi \leq 2)} = \frac{1 - F(7)}{1 - F(2)} = \frac{1 - (1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 7})}{1 - (1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 2})} = e^{-\frac{5}{3}} = e^{-\frac{5}{3}}$

$\Rightarrow$ λ exponentialis donlís órstíðjín tölubólungrinn

⑤ $P(\xi > 4) = 0,25 = 1 - P(\xi \leq 4) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 4}) = e^{-\lambda \cdot 4} = \frac{\ln 4}{4} = \lambda = 0,35$

$P(\xi > 8) = 1 - P(\xi \leq 8) = e^{-\lambda \cdot 8} = e^{-0,35 \cdot 8} = 0,06$

⑥ 2% 1000 úrvala hlutfélagið er alskammt $P(\xi \leq 1000) = 0,02$

Þi er ekkert, hvernig er alskammt og Hlognormal tölubólungrinn, he er donlís exponentialis?

$P(\xi \leq 1000) = F(1000) = 1 - e^{-\lambda \cdot 1000} = 0,02 \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,98}{1000} = 2 \cdot 10^{-5}$

$E(\xi) = \frac{1}{\lambda} \rightarrow P(\xi > E\xi) = 1 - P(\xi \leq E\xi) = 1 - F(E\xi) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}}) = \frac{1}{e}$

(7.) Standard normal density

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = N(0, 1)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x) dx \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$$