

3.óra

Diszkrét valószínűségi változó:

$\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény diszkrét valószínűségi változó, ha
 $R(\xi) = \{x_1, x_2, \dots\}$
 $|R(\xi)| < \infty$ vagy $|R(\xi)| = \aleph_0$
melyben $\forall i$ esetén $A_i = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\}$.

? Megjegyzés

Ha $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét valószínűségi változó $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, akkor
 $\omega \rightarrow f(X(\omega))$ is diszkrét valószínűségi változó.

Eloszlás:

(x_i, p_i) véges vagy végtelen sorozat X valószínűségi változó eloszlása, ha
 X diszkrét valószínűségi változó
 $R(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$ vagy $\{x_1, x_2, \dots\}$
 $p_i = P(X = x_i)$.

? Állítás

Ha (x_i, p_i) egy valószínűségi változó eloszlása, akkor
 $p_i \geq 0 \quad \sum_i p_i = 1$.

Eloszlások:

Diszkrét egyenletes eloszlás:

Y egyenletes eloszlású az $\{x_1, \dots, x_N\}$ halmazon, ha
 $R(Y) = \{x_1, \dots, x_N\}$
 $p_i = P(Y = x_i) = \frac{1}{N} \quad \forall i$

Bernoulli eloszlás vagy indikátor változó:

Z valószínűségi változó eloszlása p paraméterű Bernoulli-eloszlás, ha
 $B \in \mathcal{F}$
 $Z(\omega) = 1 \quad \omega \in B$
 $Z(\omega) = 0 \quad \omega \notin B$
azaz: $Z(\omega) = I_B(\omega)$
 $p = P(B) \quad R(Z) = \{0, 1\} = \{x_1, x_2\}$
 $p_1 = P(Z = 0) = 1 - p \quad p_2 = P(Z = 1) = p$.

Binomiális eloszlás:

η eloszlása (n, p) paraméterű binomiális eloszlás, ha

$$R(\eta) = \{0, \dots, n\}$$

$$P(\eta = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Pascal vagy geometriai eloszlás:

ξ eloszlása p paraméterű Pascal eloszlás, ha

$$R(\xi) = \{1, 2, \dots\}$$

$$P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Hipergeometriai eloszlás

X eloszlása (N, M, n) paraméterű hipergeometriai eloszlás, ha

$$R(X) = \{k \in \mathbb{N} : n - (N - M) \leq k \leq \min\{n, M\}\}$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Poisson eloszlás

ϑ eloszlása λ paraméterű Poisson eloszlás, ha

$$R(\vartheta) = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \quad \lambda > 0 \text{ adott}$$

$$P(\vartheta = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

Tétel a Binomiális eloszlás közelítéséről:

$$\text{Legyen } np_n = \lambda > 0 \quad \forall n$$

$$\text{Legyen } X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$$

$$\text{Akkor } P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

Várható érték

Legyen ξ egy diszkrét valószínűségi változó

Legyen (x_i, p_i) ξ eloszlása

Ekkor $a\xi$ várható értéke:

$$E\xi := \sum_i x_i p_i$$

feltéve, hogy $\sum_i |x_i| p_i < \infty$ (absz. konv.)

Várható érték tulajdonságai:

$$1. \xi, \eta \text{ valószínűségi változók } E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

$$2. a \in \mathbb{R} \quad E(a\xi) = aE(\xi), \text{ ha } \exists E\xi$$

homogén lineáris

$$3. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvény, } Ef(\xi) = \sum_{f_i} f(x_i) p_i \quad \text{absz. konv.}$$

Eloszlások várható értéke:

$$\text{egyenletes: } EY = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$\text{Bernoulli: } EZ = p$$

$$\text{geometriai: } E\xi = \frac{1}{p}$$

$$\text{Poisson: } EX = \lambda$$

$$\text{hipergeometriai: } EY = n \frac{M}{N}$$

$$\text{binomiális: } E\eta = np$$

-

Módusz:

Legyen $R(\xi) = \{x_1, x_2, \dots\}$
 ξ móduszának nevezzük azon x_j értékeket, melyekre
 $p_j = P(\xi = x_j) = \max_i p_i$

Szórásnégyzet:

Legyen ξ diszkrét valószínűségiváltozó
 $E\xi^2 < \infty$ akkor
 $D^2\xi := E[\xi - E\xi]^2$
 mennyiséget a ξ szórásnégyzetének nevezzük.

Szórás: A szórásnégyzet gyöke.

k. momentum:

Legyen $k \in \mathbb{N}$ $E\xi^k$ ξ valószínűségi változó k. momentuma és $E|\xi^k|$ absz. momentum

Tétel a szórásnégyzetről:

$$E\xi^2 < \infty \text{ akkor } D^2\xi = E[\xi^2] - [E\xi]^2 = \sum_i x_i^2 p_i - \left(\sum_i x_i p_i\right)^2$$

Nevezetes eloszlások szórásnégyzete:

Bernoulli: $D^2 Z = p(1-p)$

Geometriai: $D^2 Z = \frac{1-p}{p^2}$

Poisson: $D^2 Z = \lambda$

Binomiális: $D^2 \eta = np(1-p)$