

Nevezetes diszkrét eloszlások

1. Nevezetes diszkrét eloszlások

- (a) *Bernoulli*: Hatás dobás vagy nem. $\mathbb{P}(X = 1) = 1/6 = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$
- (b) *Egyenletes*: Egy kockadobás értéke. $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \dots \mathbb{P}(X = 6) = 1/6$
- (c) *Binomiális*: 20 dobásból hatás dobások száma. $\mathbb{P}(X = k) = \binom{20}{k} (1/6)^k (5/6)^{20-k}$.
Általánosabban: $\text{BIN}(n, p)$ eloszlású az a valószínűségi változó, ami n darab független, egyenként p valószínűséggel sikerrel járó kísérlet közül a sikereket számolja.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- (d) *Geometriai*: Hányat dobok az első hatás dobás előtt? $\mathbb{P}(X = k) = (5/6)^k (1/6)$. Általánosabban: $\text{GEO}(p)$ eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első sikerig bekövetkezett kudarokat számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsége p .

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p.$$

- (e) *Negatív binomiális*: Hányat dobok a harmadik hatás dobás előtt? $\mathbb{P}(X = k) = \binom{k}{2} (1/6)^2 (5/6)^{k-2} (1/6) = \binom{k}{2} (1/6)^3 (5/6)^{k-2}$. Általánosabban: $\text{NBIN}(l, p)$: siker valószínűsége p , a valószínűségi változó azt számolja, hány kísérlet előzi meg az l -edik sikert.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k}{l-1} p^l (1-p)^{k-l+1}.$$

- (f) *Hipergeometriai*: Találatok száma a lottón. $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{5}{2} \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$.
Általánosabban: n golyó közül n_1 piros, $n - n_1$ fekete, r -et kihúzunk, és az ezek közötti pirosak számát vizsgáljuk.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n-n_1}{r-k}}{\binom{n}{r}}.$$

- (g) *Poisson*: Mazsolák száma adott mennyiségű süteményben, ha egyforma méretű szeletek, sok mazsola van, jól el vannak keverve, és átlagosan λ darab van egy szeletben.

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

2. Átlagosan hány mazsolának kell egy szeletben lenni ahhoz, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 0.99 valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

Megoldás: Az egy szeletben található mazsolák számát ismeretlen λ paraméterű Poisson eloszlású X valószínűségi változónak tekintve a kérdés

úgy szól, mekkora legyen λ ahhoz, hogy $\mathbb{P}(X \geq 1) \geq 0.99$ igaz legyen. Az egyenlőtlenséget rendezve:

$$1 - \mathbb{P}(X = 0) \geq 0.99$$

$$1 - e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} \geq 0.99$$

$$1 - e^{-\lambda} \geq 0.99$$

$$\ln 0.01 \geq -\lambda$$

$$\lambda \geq -\ln 0.01 = 4.6$$

3. Egy városban a napi 4 tüzeset gyakorisága megegyezik a napi 5 tüzeset gyakoriságával. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy napon legfeljebb 2 tüzeset történik?

Megoldás: Legyen X az a valószínűségi változó, ami azt számolja, hogy az adott napon hány tüzeset van. X eloszlása ismeretlen paraméterű Poisson, a szövegből az derül ki, hogy

$$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 5),$$

azaz

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^4}{4!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^5}{5!},$$

amiből

$$\lambda = 5$$

adódik. Megtaláltuk a Poisson eloszlás paraméterét. A kérdés most $\mathbb{P}(X \leq 2)$, amit úgy számolhatunk, hogy

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = e^{-5} \left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} \right) = 0.1247$$

4. Bolyongás a számegyenesen: $1/2$ valószínűséggel jobbra, $1/2$ valószínűséggel balra lépünk. 0 -ból indulva hol leszünk $2n$ lépés múlva?

Megoldás: Binomiális eloszlás. Ahhoz, hogy a bolha, aki a 0 -ból indult, $2n$ lépés múlva $2k$ -ban legyen, $n+k$ -szor kellett jobbra, és $n-k$ -szor balra lépnie a $2n$ lépés során. Azaz

$$\mathbb{P}(X_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} (1/2)^{2n}.$$

5. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy

- hányszor állt le a szalag az n -edik termékig (őt is beleértve)?
- hány terméket gyártott a gép az n -edik leállásig?
- hány terméket szállított két leállás között?
- hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza)

Megoldás:

- (a) Az eloszlás binomiális, a leállás („siker”) valószínűsége 0.02, tehát $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} 0.02^k 0.98^{n-k}$.
 - (b) Az eloszlás negatív binomiális, tehát $\mathbb{P}(X = k) = \binom{k}{n-1} 0.02^n 0.98^{k-n+1}$.
 - (c) Az eloszlás geometriai, a leállás („siker”) valószínűsége 0.02, tehát $\mathbb{P}(X = k) = 0.98^k 0.02$.
 - (d) Az eloszlás most is geometriai, csak a „siker” ebben az esetben a jó termék gyártása, ennek valószínűsége 0.98, tehát $\mathbb{P}(X = k) = 0.02^k 0.98$.
6. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?

Megoldás: Hipergeometriai, $n = 22, n_1 = 8, r = 7$, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{8}{k} \binom{14}{7-k}}{\binom{22}{7}}.$$

Tehát annak a valószínűségét, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz, úgy kapjuk meg, hogy a fenti képletbe $k = 2$ -t helyettesítünk.

7. Egy piaci árus kosarában 100 fej gomba van, ezek közül 4 mérgező. Egy háziasszony az 5 tagú család minden tagjának egy-egy fej gombát vásárol ebédre. Adjuk meg a gombamérgezést kapott családtagok számának eloszlását!

Megoldás: Hipergeometriai, $n = 100, n_1 = 4, r = 5$, azaz

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{96}{5-k}}{\binom{100}{5}}.$$

8. Egy kollégiumban egy évben p valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy n éves periódusban legalább egy tüzeset van?

Megoldás:

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (1 - p)^n.$$

Beadható feladatok:

1. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember születik pontban éjfélkor, mint az, hogy öt.
 - (a) Mire tippelne, hány ember fog a jövő év folyamán éjfélkor születni?
 - (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy senki sem születik éjfélkor egy év alatt?
 - (c) Átlagosan hány ember születik éjfélkor egy év alatt?
2. Egy tankör 30 hallgatójának mindegyike egymástól teljesen függetlenül, $3/4$ valószínűséggel jár Valószínűségi számítás órára.
 - (a) Átlagosan hányan vannak jelen?
 - (b) Melyik létszám a legvalószínűbb?
 - (c) Mennyi a jelenlevők számának szórása?
3. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X várható értéke és szórása?
4. András és Béla a következőt játsszák. Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd András annyi forintot kap Bélától, amennyi a két kockán lévő pontok különbségének a négyzete. Béla pedig annyit kap Andrástól, amennyi a két kockán lévő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék? (Mielőtt megkérdeznék!!!: annak kedvez, aki többet nyer!)
5. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzzunk 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg X
 - (a) eloszlását,
 - (b) várható értékét,
 - (c) móduszát,
 - (d) szórását!
6. Két kockával dobva mennyi lesz a dobott számok
 - (a) nagyobbikának illetve
 - (b) kisebbikének várható értéke?
7. Anna és Cili két kockával játszanak. Anna akkor fizet Cilinek, ha mindkét feldobott kockán páratlan szám szerepel. Cili akkor fizet Annának, ha pontosan egy kockával dobunk páros számot. Ha más eset fordul elő, egyikük sem fizet. Milyen pénzügyi helyzetben állapodjanak meg, hogy a játék igazságos legyen? (egyforma esély a nyereményre)
8. 20 ember között sorsolnak ki 9 külföldi nyaralást. A 20 személy között 12 családos.
 - (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 9 nyertes között 7 családos?
 - (b) Mi a kisorsolt családok számának legvalószínűbb értéke?

9. Egy cukorkaboltban 10 perc alatt átlagosan 4 ember vásárol.
- (a) Várhatóan hányan vásárolnak egy óra alatt?
 - (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy fél óra alatt legalább ketten vásárolnak?
10. Két kockát n -szer dobunk fel. Tudjuk, hogy a dupla hatos dobások számának legvalószínűbb értéke 2 (ez az érték egyértelmű). Mit állíthatunk n értékéről?
11. Egy iskolai kirándulás során négy busz szállítja a diákokat. A négy buszban 40, 33, 25 illetve 50 diák utazik. Véletlenszerűen kiválasztunk egy diákot, és legyen X az ő buszában utazó összes tanuló száma. A négy buszsofőr közül egyet szintén véletlenszerűen kiválasztunk, és legyen Y az ő buszán utazó tanulók száma.
- (a) Mit gondolunk, $\mathbb{E}(X)$ vagy $\mathbb{E}(Y)$ lesz nagyobb? Miért?
 - (b) Számoljuk ki $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét!
 - (c) Számoljuk ki X és Y szórását!
12. Egy forgalmas útszakaszon, ahol egyébként is szoktak radarozni, fogyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tudjuk, valószínűbb az, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nem lesz. Adjon minél élesebb alsó becslést annak a valószínűségére, hogy pontosan 3 autó lépi át a megengedett sebességhatárt!
- (a) várható értéke?
 - (b) szórása?
13. Egy kisvállalkozó 3 autót tart fenn bérbeadásra. Minden egyes autóra a napi kiadása 600 tallér, függetlenül attól, hogy az autót bérbe veszik-e avagy sem. Egy-egy autó napi bérleti díja 7000 tallér. Nagy a kereslet az autóbérlésre, és ez a vállalkozás szinte még ismeretlen. Ha naponta átlagosan ketten kívánnak autót bérelni, akkor mennyi az üzlet átlagos napi nyeresége?
14. Mosóporvásárlásnál hatféle matricát kell összegyűjteni a minden dobozban megtalálható matricákból ahhoz, hogy ingyen kapjunk egy doboz mosóport. Átlagosan hány doboz mosóport kell ehhez vásárolni?
15. Egy tanteremben 10 darab kétülékes pad található. 10 fiút és 10 lányt ültetnek le véletlenszerűen. Hány olyan pad lesz átlagosan, amelyben fiú és lány is ül?