Valószínűségszámítás 2. ZH

Leichner Dávid

2014. XII. 12.

Első feladat

Legyen

$$f(x,y) = y + c\Big(e^{x-1} + \frac{1}{e}\Big),\ x, y \in [0,1],\ f(x,y) = 0 \text{ máskor.} \tag{1}$$

Válasszuk meg c konstansot úgy, hogy az $f(x,y)$ valamely (ξ,η) 2- dimenziós folytonos val. változó együttes sfgvénye legyen! Számoljuk ki az $f_\xi(x), f_\eta(y)$ peremsfgvényeket is! Független-e ξ és η?

Második feladat

Legyen az (X,Y) val. változó együttes sfgvénye

$$g(x,y) = 2x + 2y,\ x \in [0,1],\ 0 \le y \le x,\ g(x,y) = 0 \text{ máskor.} \tag{2}$$

Számítsuk ki az Y/X val. változó eloszlásfüggvényét és sfgvényét!

Harmadik feladat

Az iskolás korcsoportban minden 5. gyerek szemüveges. Mekkora az esélye, hogy egy 1500 fős iskolában a szemüveges tanulók száma nem éri el a 280-at? Mekkora az esélye, hogy a 250-et sem éri el?

Negyedik feladat

Egy borgazdaságban átlagosan 10000 liter bort készítenek évente, a szórás 1000 liter. Feltételezzük, hogy a bor mennyisége közel normális eloszlású. Adjunk meg egy olyan $[10000 - K, 10000 + K]$ intervallumot, melyre igaz, hogy az idei bor mennyisége 99% eséllyel ebbe az intervallumba esik!

Mindegyik feladat 10 pontot ér. Jó munkát!

① $f(x,y) = y + c\left(e^{x-1} + \frac{1}{e}\right)$, ha $x, y \in [0,1]$

$f(x,y) = 0$ egyébként

$$1 = \int_0^1\int_0^1 y + c\cdot e^{x-1} + \frac{c}{e}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[yx + c\,e^{x-1} + \frac{c}{e}x\right]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^1 y + c + \frac{c}{e} - \frac{c}{e}\,dy = \left[\frac{y^2}{2} + cy\right]_0^1 = \frac{1}{2} + c = 1$$

$f(x,y) \geq 0$ is teljesül $\quad \boxed{c = \frac{1}{2}}$

$$f_\xi(x) = \int_0^1 y + \frac{e^{x-1}}{2} + \frac{1}{2e}\,dy = \left[\frac{y^2}{2} + \frac{e^{x-1}}{2}y + \frac{y}{2e}\right]_0^1 = \frac{e^{x-1}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}$$

$$f_\eta(y) = \int_0^1 y + \frac{e^{x-1}}{2} + \frac{1}{2e}\,dx = \left[yx + \frac{e^{x-1}}{2} + \frac{x}{2e}\right]_0^1 = y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2e} - \frac{1}{2e} = y + \frac{1}{2}$$

Ftlenség:

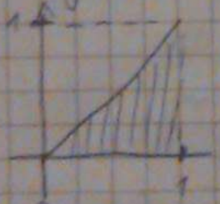
$$f_\xi(x)\cdot f_\eta(y) = \left(y + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^{x-1}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}\right) =$$

$$= y\frac{e^{x-1}}{2} + \frac{1}{2}y + \frac{y}{2e} + \frac{e^{x-1}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4e} \neq f(x,y) \rightarrow \boxed{\text{Nem ftlenek}}$$

---

② $g(x,y) = 2x + 2y \quad x \in [0,1] \quad y \in [0,x]$

T:

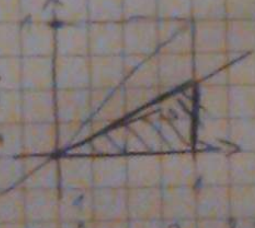


~~$f\left(\frac{y}{x}\right)$~~ ? legyen $\frac{y}{x} = Z$

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P\left(\frac{y}{x} < z\right) = x$$

$D = \{(x,y) : \frac{y}{x} < z \Leftrightarrow y < zx\}$ $(x>0)$

D:



ez egyben D∩T is

$$\int_0^1\int_0^{zx} 2x + 2y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[2xy + y^2\right]_0^{zx} dx =$$

$$= \int_0^1 2zx^2 + z^2x^2\,dx = \boxed{2z + z^2}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 2z + z^2 & 0 < z \leq 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

$$f_\zeta(z) = \begin{cases} 2 + 2z & z \in [0,1] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

③

$X := \{$ szemüveges gyerekek száma $\}$

$p = \frac{1}{5}$

$n = 1500$

CHT!

$P(X < 280) = ?$

$$P\left(\frac{X - n\cdot p}{\sqrt{n(1-p)p}} < \frac{X - n\cdot p}{\sqrt{n}\sqrt{(1-p)p}}\right) = P\left(\frac{X - \frac{1500}{5}}{\sqrt{1500}\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}} < \underbrace{\frac{280 - \frac{1500}{5}}{\sqrt{1500}\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}}}_{-1{,}29}\right) =$$

$$= \Phi(-1{,}29) = 1 - \Phi(1{,}29) = 1 - 0{,}9015 = \boxed{0{,}0985}$$

$$P(X < 250) = \Phi\left(\frac{250 - 300}{\sqrt{1500 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}}\right) = \Phi(-3{,}22) = 1 - \Phi(3{,}22) =$$

$$= 1 - 0{,}9994 = \boxed{6 \cdot 10^{-4}}$$

④

$X \{$ [illegible] egy évben $\}$ $\mu = 10000$ $\sigma = 1000$

$$P(10000 - k < X < 10000 + k) = 0{,}99$$

$$0{,}99 = F(10000 + k) - F(10000 - k) = \Phi\left(\frac{10000 + k - 10000}{1000}\right) - \Phi\left(\frac{10000 - k - 10000}{1000}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{k}{1000}\right) - \Phi\left(\frac{-k}{1000}\right) = -1 + 2\,\Phi\left(\frac{k}{1000}\right) = 0{,}99$$

$$2\,\Phi\left(\frac{k}{1000}\right) = 1{,}99$$

$$\Phi\left(\frac{k}{1000}\right) = 0{,}995$$

$$\frac{k}{1000} = 2{,}57$$

$$\boxed{k = 2570}$$

Intervallum: $[7430, 12570]$