7. GYAKORLAT | 2016. X. 26.

ELOSZLÁS FGV:

- monoton nő
- $-\infty$-ben 0
- $+\infty$-ben 1
- mindenhol folytonos

FELADAT: eloszlás fgv-e?

[1.] $F(x) = 1 + e^{-x+1}$ NEM

- igen mindenhol folytonos (exponenciális fgv) ✓
- e^{-x+1} szig. mon. CSÖKKEN ☹
- sehol nem veszi fel a nullát ☹ $\forall x$-re nagyobb mint 0.

[2.] $G(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2}{x+1} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

- ahogy az x növekszik → tört értéke egyre kisebb egyre kisebb számokat vonok ki ✓ $\Longrightarrow$ MON. NÖVEKVŐ
- $\lim_{x \to \infty} G(x) = 2$ ☹ NEM

[3.] $H(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

- szig. MON. NŐ ? ✓ e^{-x} csökken
- $\lim_{x \to \infty} H(x) = 1$ ✓ $e^{-x} \to 0$
- $\lim_{x \to -\infty} H(x) = 0$ ✓

EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS ELOSZLÁS FGV-E

- folytonos ✓ 0-ban

SŰRŰSÉG FGV (eloszlás fgv-ből)

DERIVÁLNI KELL♡!

Eloszlás fgv. DERIVÁLTJA a sűrűség fgv.

SŰRŰSÉG FGV:

- balról folytonos
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$
- (ha nagy F mon nő)

nagyobb egyenlő mint 0

$f(x) \geq 0$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

sűrűség fgv.

FELADAT: Eloszlás fgv-e? Ha igen → sűrűség fgv?

$$l(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{4}(4-x) & 0 < x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \end{cases}$$

- $x - \frac{x^2}{4} = -\frac{1}{4} \cdot (x^2 - 4x) = -\frac{1}{4} \cdot (x-2)^2 + 1$

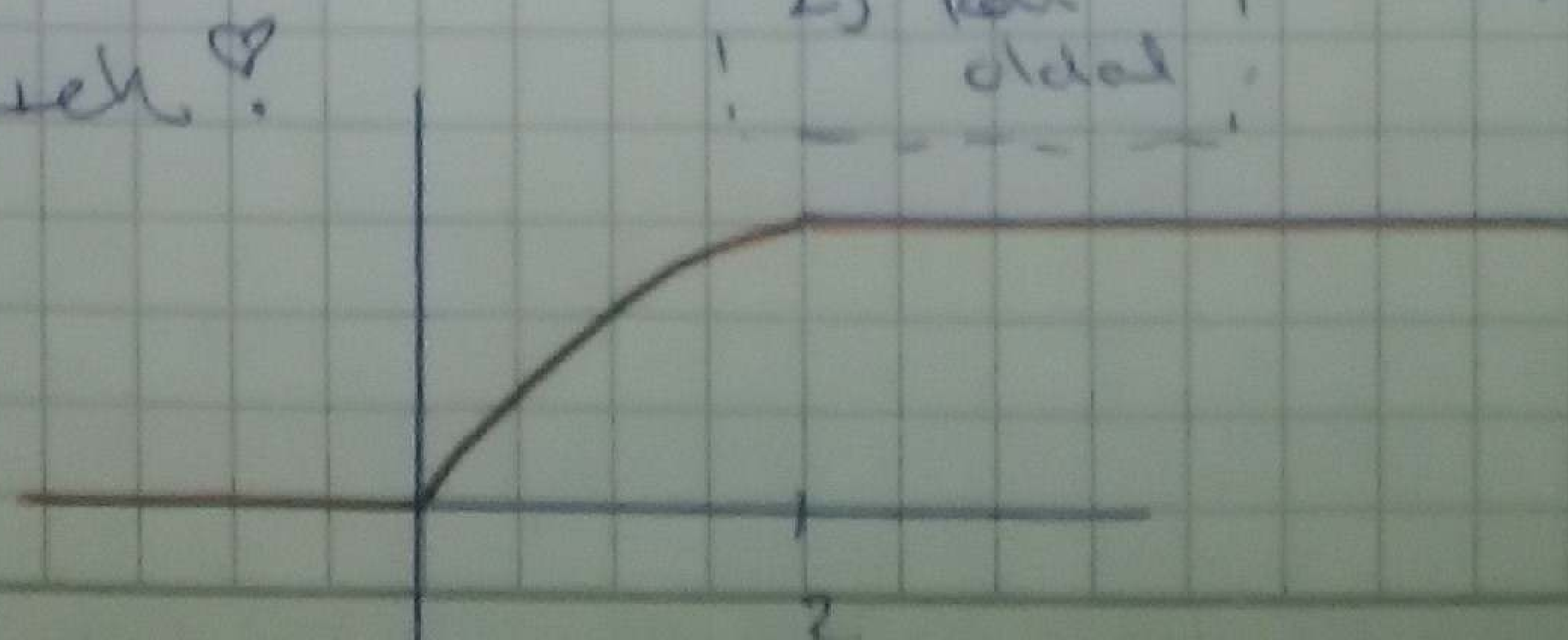
(teljes négyzet)

deriválva → két oldal

$-\frac{1}{4}(2x-4)$

deriváltak jó emberek♡!

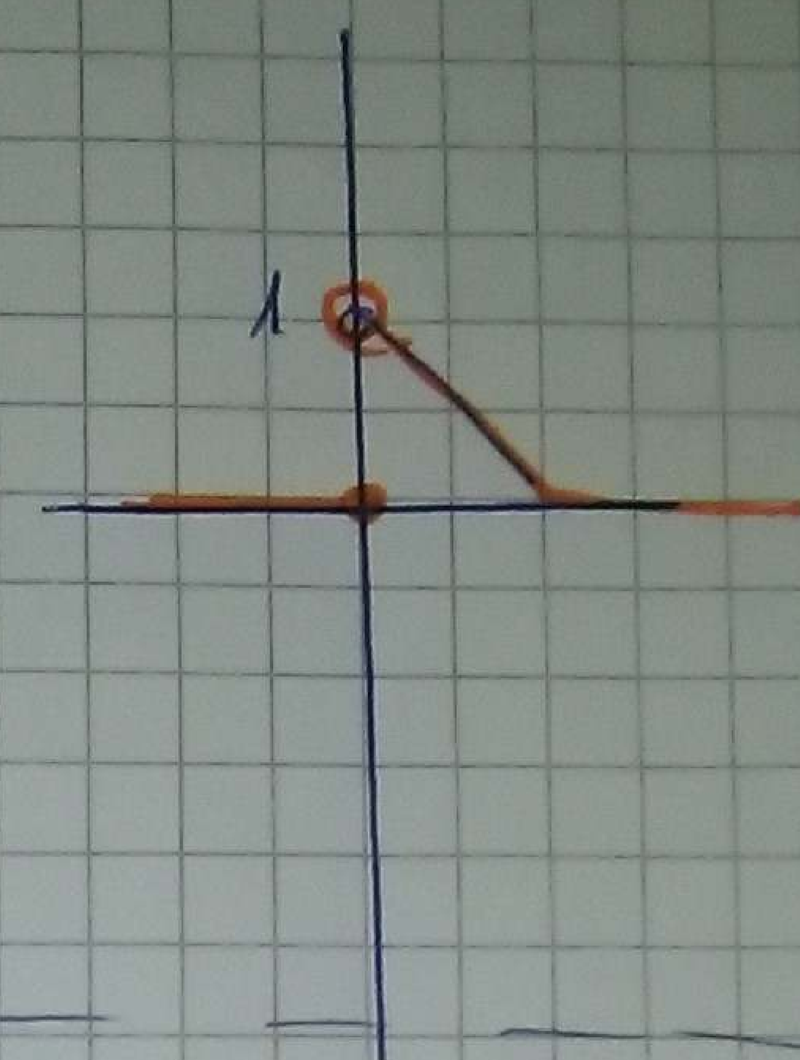
- folytonos ✓
- mon nő ✓



2.

Sűrűség fgv.

$$i(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ -\frac{1}{2}x + 1 & 0 < x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$



FELADAT: Sűrűség fgv-e? Mi az eloszl. fgv?

$$f(x) = \frac{2}{x} \qquad x > 1$$

- folytonos balról ✓ (egyébként 0)
- $f(x) \geq 0$ ✓
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{2}{x}\,dx = 2\ln(x)\Big|_{1}^{\infty} =$

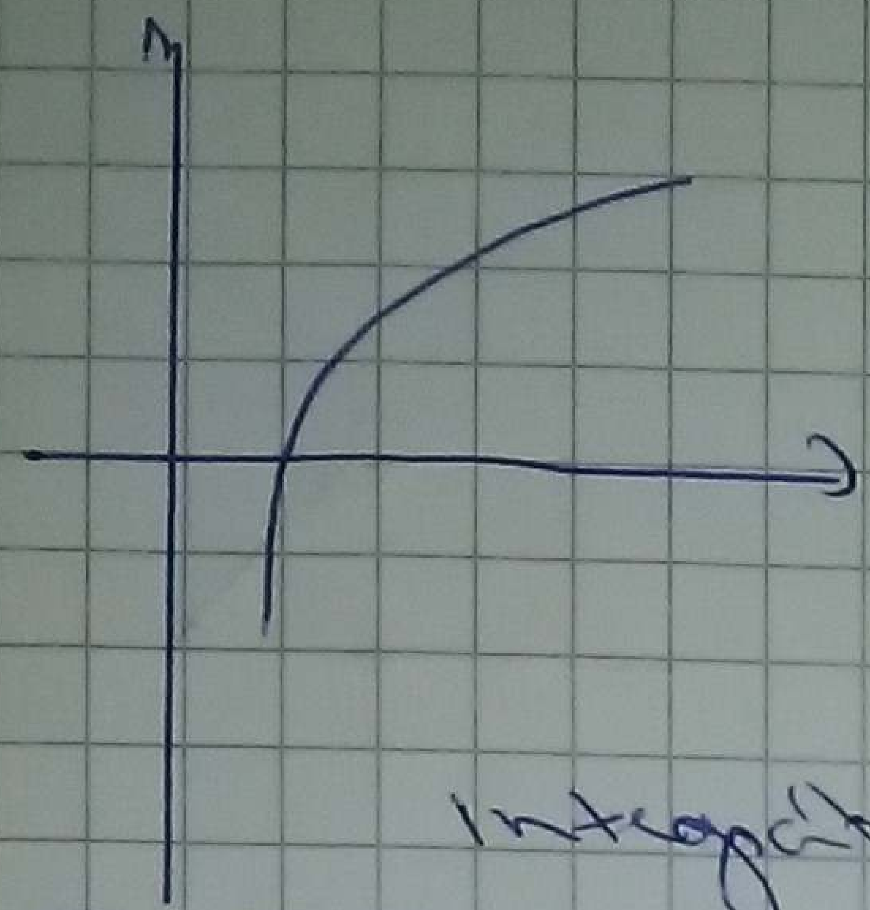
$$= 2(\infty - 0) = \infty \neq 1$$

$\Longrightarrow$ NEM SŰRŰSÉG FGV!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt}_{\to 0} + \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_{1+\varepsilon}^{\infty} f(t)\,dt$$

improprius

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{2}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} 2\ln x \Big|_{1+\varepsilon}^{\infty} = \infty \neq 1$$



∞-ben ∞-be tart

integrálja nem 1 $\Rightarrow$ nem sűrűség fv.

$$g(x) = \frac{\sin x}{2} \qquad 0 < x \leq 2$$

0-tól 2-ig tiszta pozitív

π-ig ($\sim 3{,}14$)

- $g(x) \geq 0$
- $$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{2} \frac{\sin x}{2}\,dx =$$

cos 2 0 és 1 között van

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} -\frac{\cos x}{2}\Big|_{0}^{2} = -\frac{1}{2}\underbrace{\left(\quad - 1\right)}_{\text{negatív és } -1 \text{ és } 0 \text{ között van}} < 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \sin \frac{x}{2} & 0 < x < \pi \\ 3^{x-1} \ln 3 & x \leq 0 \end{cases}$$

- pozitív-e

  3 minden hatványa pozitív — yeah ♡

  $\frac{1}{3} \ln \frac{x}{2}$ is pozitív $0 < x < \pi$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 3^{x-1} \ln 3\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{3} \sin \frac{x}{2}\,dx =$$

$$3^{x-1} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\cos \frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1) = \boxed{1} = 1$$ yeah ♡

- balról folytonos ✓ :)

$$F(x) = \begin{cases} 3^{x-1} & x \leq 0 \\ -\frac{2}{3} \cos \frac{x}{2} & 0 < x \leq \pi \\ 1 & \pi < x \end{cases}$$

EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS:

Mennyi a várakozási idő?
Mennyi a gép "szavatossági" ideje?

ÖRÖKIFJÚ TULAJDONSÁG:

villanykörte bányában
↓

- 1 v. 2 nap múlva működni fog ha tudom, hogy
- nejlon harisnya → katonáknak örökifjú tulajdonságú
- prés gép

$$P(X > a+b \mid X > b) = P(X > a)$$

exponenciális azonosságából következik

Feladat

Dolesch sebészet
Exp. eloszlású
Betegek érkezése

$E(X) = 40'$ (perc)

Várható érték: $\frac{1}{\lambda} = E(X)$

Szórása: $D(X) = \frac{1}{\lambda}$

Mi a valószínűsége h. 1 beteg érkezése után negyed órán belül érkezik a követ. beteg.

$E(X) = 40 = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{1}{40}$

$D_X = \frac{1}{40}$

X: váltakozó betegek érkezésének ideje

$P(X < 15) =$

exp eloszlás eloszlás fgv-e:

$P(x<15) = F(15) = 1 - e^{-\frac{15}{40}}$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Legalább fél óráig nem jön újabb beteg?

$P(x>30) = 1 - \underbrace{P(x<30)}_{F(30)} = 1 - \left(1 - e^{-\frac{30}{40}}\right) =$

$= \boxed{e^{-\frac{3}{4}}}$

Koral goligai

élettartama exponenciális elo.

átlagos élett. 3 év (várható érték)

Az egyedek hány %-a él legfeljebb 3 évig?

$\lambda = \frac{1}{3}$ $\quad E(x) = 3$

$P(x<3) = F(3) = 1 - e^{-1} = 0{,}63$

63%-a él legfeljebb 3 évig.

• Az egyedek hány %-a éli meg a 3 évet?

~~$P(x \geq 3)$~~ $P(x \geq 3)$

• Éli meg 4 évet $P(x \geq 4)$

---

0 éves egyedekből kiindulva

várhatóan hány egyedből marad meg

az egyedek $\frac{1}{3}$-a

$$P(x < y) = \frac{1}{3}$$

$$1 - e^{-\frac{y}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = e^{-\frac{y}{3}}$$ mindkét oldal term. alapú logar.

$$-3 \cdot \ln\frac{2}{3} = y$$

λ a kérdés

Adott x-gyári gépek

2% 1000 üzemórán belül elromlik

E+P elo.

[Mekkora a valség h átlagosnál tovább működik]

megmondjuk a várhatóságot h elromlik

100-ból 2 romlik el

1000 20

$$P(x < 1000) = 0{,}02$$

$$F(1000)$$

$$1 - e^{-\lambda 1000} = 0{,}02$$

$1 - e^{-\lambda \cdot 1000} = 0{,}02$

$\frac{\ln(1-0{,}02)}{1000} = \lambda$

$\lambda = 2{,}02 \cdot 10^{-5}$

<u>Kérdés:</u> mi a valószínűség, hogy az átlagosnál tovább működik?

$P(x > m) = P\left(x > \frac{1}{\lambda}\right) =$

$= 1 - P(x < 49450)$

$1 - \left(1 - e^{-\lambda \frac{1}{\lambda}}\right) = e^{-1} = 0{,}37$

↓

elégé valószínű

Feltéve, hogy 5 éve működik, mi a valószínűsége, hogy még 3 évet működni fog?

$P_{(x>3)}$

$\cancel{P(x>5)}$ $P(x>3) =$ $P(x > 5+3 \mid x > 5) = \frac{P(x>5+3)}{P(x>5)} =$

$= \frac{1-(1-e^{-\lambda 8})}{1-(1-e^{-\lambda 5})} = \frac{e^{-\lambda 8}}{e^{-5\lambda}} = \boxed{e^{-3\lambda}}$

FELADAT: Örökifjú villanykörte → EXP. EL.

villanykörte:

$P(x > 2000) = \frac{2}{3}$

200 db

$\frac{2}{3}$ a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel.

$P(x \geq 2000) = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$P(x < 2000) = F(2000) = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\lambda = \frac{-\ln 2/3}{2000}$

Mi a valószínűsége, hogy 200 óra elteltével 150 világítson

BINOMIÁLIS

$p = P(x > 200) = 1 - F(200)$ még világít

$\binom{200}{150} \cdot p^{150} \cdot (1-p)^{50}$