5. ELŐADÁS

2016. X.10.

Boldog 41. hetet♡

Ismétlés:

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val. vált.

ξ eloszlása $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$: $Q_\xi(B) = P\left(\xi^{-1}\langle B \rangle\right)$

spec $B \doteq]-\infty, x[\longrightarrow Q_\xi = \dots = F_\xi(x)$

Q_ξ: val. mérték : $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0,1]$

DEF: Legyen $P_\delta : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$P_\delta(B) \doteq B$ elemszáma

P_δ mérték, hiszen $P_\delta(\emptyset) = 0$

$$P_\delta\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_\delta(B_n)$$

ha $B_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $(B_n \cap B_m) = 0$ $n \neq m$

LEBESGUE-MÉRTÉK:

L.-külső m: Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ tetsz.

$$\overline{\lambda}(A) \doteq \inf\left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) \;\middle|\; A \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n,\ (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ intervallum} \right\}$$

& $\lambda(I) = I$ hossza

$\overline{\lambda}$: Lebesgue-külső mérték

$\overline{\lambda}(A) \geq 0$ (lehet $+\infty$ is)

Pl. $A \doteq [1,2] \longrightarrow \overline{\lambda}(A) = 1$

$A \doteq [1,2] \cup]3,5[$ $\quad \overline{\lambda}(A) = 3$

$A \doteq \{\sqrt{2}\} \longrightarrow ?$

ø: $I = [1,2]$ fed.

$I_m \doteq \left[\sqrt{2} - \frac{1}{m}, \sqrt{2} + \frac{1}{m}\right] \to \overline{\lambda}(I_m) = \frac{2}{m}$

$\Downarrow$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\sqrt{2}\}$

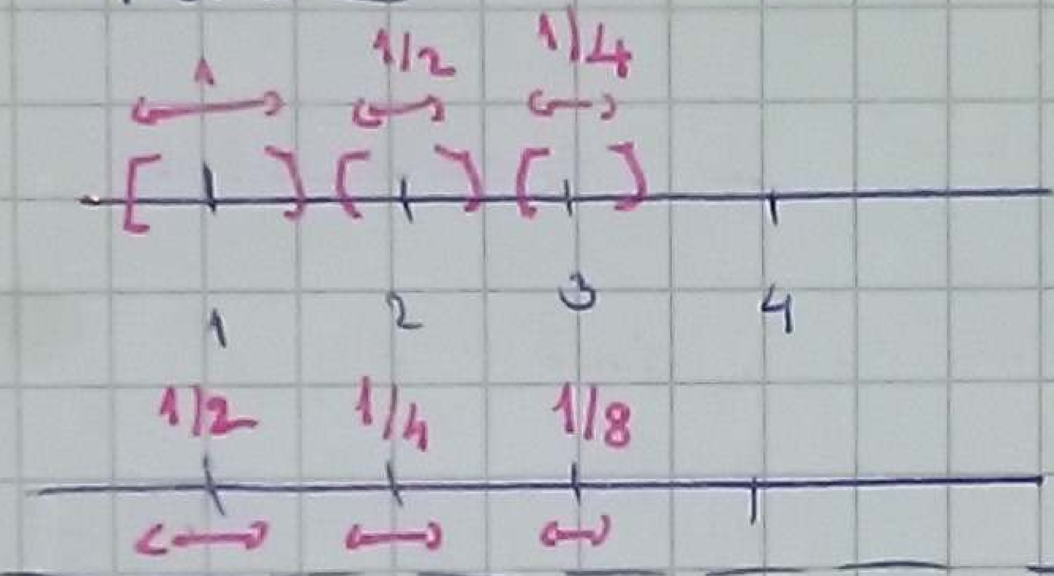
$\bar{\lambda}(\{\sqrt{2}\}) = 0 = \inf\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(I_n) \;\middle|\; \{\sqrt{2}\} \subseteq \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n\right\}$

tetszőleges int.-ok

$\bar{\lambda}(\{\sqrt{2}, 28\}) = 0$

$\bar{\lambda}(\mathbb{N}) = 0$

trükk



TANULSÁG

$\Rightarrow A \subseteq \mathbb{R}$ megszámlálható $\Rightarrow \bar{\lambda}(A) = 0$

$\bar{\lambda}([0,1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = 1$

ÁLLÍTÁS:

$\exists\, \mathcal{M}_\lambda \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ Halmaz Rendszer (HR)

- $\mathcal{M}_\lambda$ σ - algebra
- $\mathcal{M}_\lambda \neq 2^{\mathbb{R}}$
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_\lambda$
- $\bar{\lambda}|_{\mathcal{M}_\lambda} : \mathcal{M}_\lambda \to \bar{\mathbb{R}}_+$ mérték
- $\bar{\lambda}(\emptyset) = 0$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \bar{\lambda}(A_n) = \bar{\lambda}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$ ahol $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\mathcal{M}_\lambda$ haladó halmaz sorozat

$A_i \cap A_j = \emptyset$ ha $i \neq j$

$\bar{\lambda}\big|_{\mathcal{M}_\lambda} \doteq \lambda \doteq \lambda_{\mathbb{R}}$ LEBESGUE-MÉRTÉK

♡ CARATHEODORY TÉTEL ♡

DEF.:

$A \in \mathcal{M}_\lambda$ LEBESGUE 0-mértékű ha $\lambda(A) = 0$

pl.: $\mathbb{Q}$

DEF.: Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető fgv.

($\forall$ Borel ősképe $\mathcal{M}_n$ beli) pl.: f folytonos

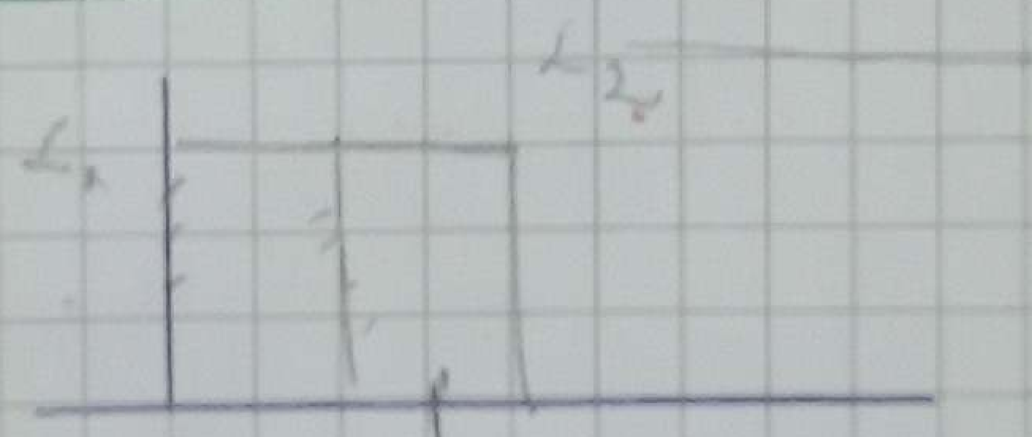
(szép vagy, mint a folytonos fgv?)

$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda}$: ugyanúgy építem fel $\mathbb{R}$-en λ-szerint

mint $\boxed{\int_{\Omega} f \, dP}$-t felépítettem Ω-n

P szerint

tudjuk $\int_{\Omega} f \, dP$



Ismétlés: Lépcsős fgv.

$$f(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{A_j}(\omega)$$

ÁLLÍTÁS: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrálható $\Longleftrightarrow$ f folytonos egy Lebesgue 0 (null)-mértékű halmazon kívül és ekkor

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,d\lambda}$$

ez mesés szép ♡

DEF: $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér.

Legyen $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ mérték

- μ_1 abszolút folytonos μ_2-re, ha $(\forall A \in \mathcal{F})$ $\left(\mu_2(A) = 0 \Longrightarrow \mu_1(A) = 0\right)$

  jelölés: $\mu_1 \ll \mu_2$

- μ_1 szinguláris μ_2-re ha

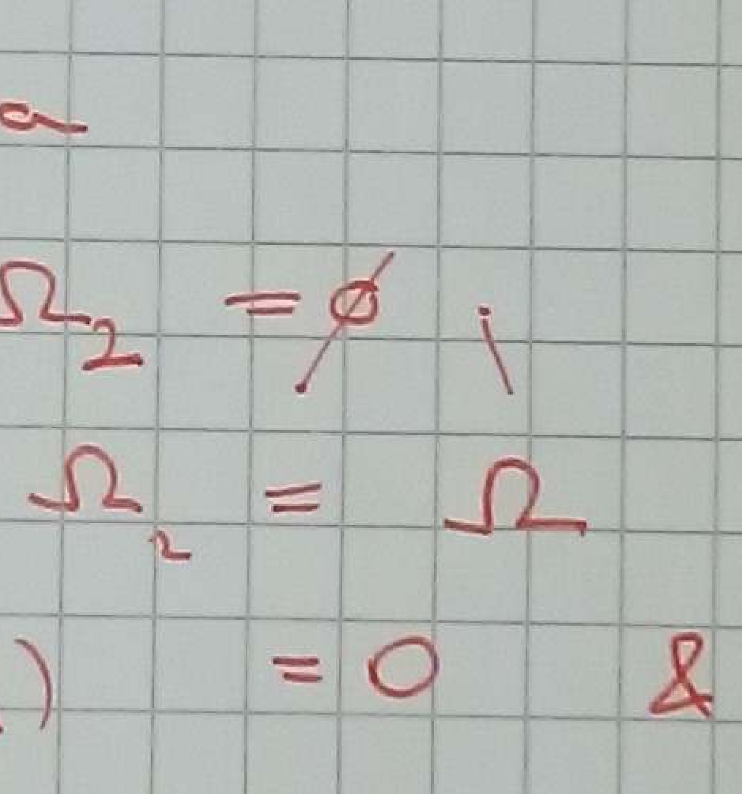
  $\exists\ \Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ hogy $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$,

  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$

  $\mu_1(\Omega_1) = 0$ &

  $\mu_2(\Omega_2) = 0$

  jelölés: $\mu_1 \perp \mu_2$



Pl.: Leggyen $\Omega \mathrel{\dot=} [0,1]$

$\mathcal{F} \mathrel{\dot=} \mathcal{B}_{[0,1]}$;

$\mu_1 \mathrel{\dot=} \lambda$

$\mu_3 \mathrel{\dot=} P_{\delta[0,1]}$ számlálómérték $[0,1]$-en

$B \in \mathcal{B}_{[0,1]} \Rightarrow P_{\delta[0,1]}(B) = B$ elemszáma

? Igaz-e, hogy $\mu_1 \overset{?}{\ll} \mu_3$ ✓

Igaz-e, hogy $\mu_3 \overset{?}{\ll} \mu_1 \rightarrow$ NEM

Nem leggyen $A = \{0\}$

$\Rightarrow$ a számláló mérték $\forall$ mérték a f.

Leggyen μ_2 az $\frac{1}{\sqrt{2}}$-re koncentrált Dirac-mérték:

$$\mu_2(B) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \frac{1}{\sqrt{2}} \in B \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{\sqrt{2}} \notin B \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu_1 \perp \mu_2$ mert $\Omega_1 \mathrel{\dot=} \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

$\Omega_2 \mathrel{\dot=} [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

VAGY $\Omega_1 \mathrel{\dot=} \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$

$\Omega_2 \mathrel{\dot=} [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$

⋮

lehet, hogy volt valami de nekem nem volt elég érdekes ... bocsi ezért elvolt ♡

Abszolút folytonosság tulajdonságai:

- tranzitív: $\mu_1 << \mu_2$ és $\mu_2 << \mu_3 \Rightarrow \mu_1 << \mu_3$
- reflexív: $\mu_1 << \mu_1$
- nem szimmetrikus: $\mu_1 << \mu_2 \not\Rightarrow \mu_2 << \mu_1$

DEFINÍCIÓ: $(\Omega, \mathcal{F})$ ~~mérték~~ mérhető tér

$\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$, μ σ-VÉGES,

ha $\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{F}$-beli haladó (halmaz) sorozat, hogy

$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$ és $\mu(A_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re

---

Pl.: Lefedem $\mathbb{R}$-et 1 hosszú intervallumokkal és a $\mu = \lambda$

TÉTEL: LEBESGUE - FELBONTÁS $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér,

$\mu, \nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ σ véges mértékek

$\Rightarrow \exists!$ μ_1 és $\mu_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ mértékek,

hogy $\mu = \mu_1 + \mu_2$

$\mu_1 << \nu \to$ absz. folyt. rész

$\mu_2 \perp \nu \to$ sing. rész.

TÉTEL: ~~Radon~~ RADON - NIKODYM TÉTEL:

$(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető tér,

$\mu_1, \nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ mértékek

$\mu_1 << \nu$

akkor: $\exists!$ $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mérhető fgv, hogy

$\forall A \in \mathcal{F}$-re: $\mu_1(A) = \int_A f \, d\nu = \int_\Omega \chi_A f \, d\nu$

DEF: $f \doteq \frac{d\mu_1}{d\nu}$: A μ_1 mérték RN-deriváltja ν szerint

Ismétlés: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ val. mező

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val. vált. $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

ξ eloszlása: $Q_{\xi}(A) = P(\xi^{-1}\langle A \rangle)$

DEF: A $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ val. vált. <u>FOLYTONOS ELOSZLÁSÚ</u> ha $Q_{\xi} \ll \lambda_{\mathbb{R}}$ $\quad Q_{\xi}, \lambda_{\mathbb{R}} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_+$

$\boxed{\text{RN}}$

$\Longrightarrow$ $\exists!\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mérhető

(itt most mérhető = Borel és Borel):

$\forall A \in \mathcal{B}: \; Q_{\xi}(A) = \int_A f \, d\lambda_{\mathbb{R}}$

DEF: f : A ξ val. változó <u>SŰRŰSÉG FGV-e</u>

VAGY : A Q_{ξ} eloszlás sűrűség fg-e.

Pl. $A =]-\infty; x[\Rightarrow Q_{\xi}(A) = P(\xi^{-1}\langle A \rangle) =$

$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

<u>f Tulajdonsága:</u>

- $f \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = Q_{\xi}(\mathbb{R}) =$

$= P(\xi^{-1}\langle \mathbb{R} \rangle) = 1$

Pl.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \in [4,5] \\ 0 & \text{ha } t \notin [4,5] \end{cases}$

ÁLLÍTÁS

Ha $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

- f int.ható $\mathbb{R}$-n λ szerint: $\int_{-\infty}^{\infty} f \, d\lambda = 1$
- $f \geq 0$

$\Longrightarrow \exists (\Omega, \mathcal{F}, P)$ val. mező és $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ val. változó, hogy $Q_\xi \ll \lambda$ és f: Q_ξ (vagy ξ) sűrűség fgv-e (a Q_ξ mérték RN-deriváltja a λ-ra nézve)

Megjegyzés: f_ξ nem feltétlenül folytonos:
Tekintsük $[c, d]$ int.-on egyenletes eloszlást
ahol $c < d$ ha η eloszlása ilyen akkor

$f_\eta(x) = \frac{1}{d-c}$ $x \in [c,d]$

$f_\eta(x) = 0$ ha $x \notin [c,d]$

Az eloszlás fgv:

- $F_\eta(x) = 0$ ha $x \leq c$
- $F_\eta(x) = \frac{x-c}{x-d}$ ha $c < x \leq d$
- $F_\eta(x) = 1$ ha $x \geq d$