2. GYAKORLAT

2016.
IX. 19.

KOMBINATORIKUS VAL: $\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$

1. Mi annak a val: kockával 3-szor dobva (1 dobókockával egymás után dobva) összeg 17 lesz.

- összes esemény: 6^3

kedvező esetek:

$$\left.\begin{matrix} 6 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 6 \end{matrix}\right\} \text{3 féle mód}$$

Kombináció: ahány féle módon ki tudom választani

- kedvező $\binom{3}{1} = 3$

2. Urna: $\left.\begin{matrix}\text{10 piros golyó} \\ \text{20 zöld golyó}\end{matrix}\right\} 30$

Hat meg az alábbi 2 esemény valségét?

a, visszatevéssel
b, visszat. nélkül

5 golyóból: 3 piros, 2 zöld

P P P Z Z hány féle módon ki tudom húzni

---

a, összes 30^5

kedvező $10^3 \cdot 20^2$

$\binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1}$

$$\boxed{P_{vt} = \frac{10^3 \cdot 20^2}{30^5}} \cdot \binom{5}{3}$$

b,

$$\boxed{P_{vt}} = \frac{10^3 \cdot 20^2}{30^5} \cdot \binom{5}{3}$$

ahogy a 3 pirosat el tudom helyezni

$\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$

b, visszatevés nélkül

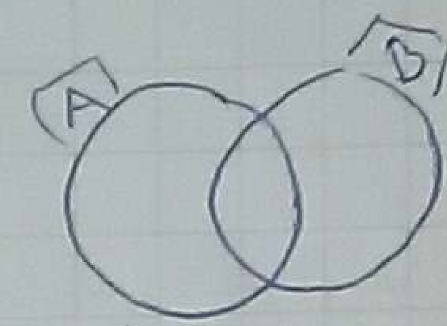
ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓ

ö $\frac{30!}{25!}$ $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $\binom{30}{5}$

k $\binom{5}{3}$ $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 20 \cdot 19$ | $\binom{10}{3}\binom{20}{2}$

SZITA FORMULA: (2 halmaz uniójának számossága)

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{\substack{i \in T \\ |T| = k}} A_i \right| =$$

(2) páros metszet −

3-as +

4-es −

k futóindex

∀ T-re

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}$$

$$\overline{A_i} = \Omega \setminus A_i$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \ldots \cap \overline{A_n}| = |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

4

4-en ZH-t írnak
beszedik és visszaosztják
cél: senki ne javítsa a sajátját

D	E	F	G
E	D	G	F
E	F	G	D
F	D	G	E
F	G	D	E
G	....		
⋮			

9

összes: $4! = 24$

9

D	E	F	G
E	F	G	D
	G	D	F
	D	G	F
F			
G			

9 féle-képpen

$|A_1| = 3!$

$|A_1 \cap A_2| = 2!$

$$\{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i \quad \forall i \in n\}$$

tekintsük ezt a komplementer eseménynek

$A_i = \{\pi \in S_n \mid \pi_i = i\}$ i sajátját javítja

i és j is a sajátját javítja

$A_i \cap A_j$

$$= |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \dots \cap \bar{A}_n| =$$

$$= |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n|$$

$|A_1| = 3!$

D biztos, hogy saját magát javítja

$$|A_1| = (n-1)!$$

D és E is saját magát

$|A_1 \cap A_2| = 2!$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)! \qquad i \neq j$$

$$\Big|\bigcap_{\substack{i \in T \\ |T| = k}} A_i\Big| = (n-k)!$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\sum_{i \leq n} \Big|\bigcap A_i\Big| \right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k (n-k)! =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k! \cdot \cancel{(n-k)!}} \cdot \cancel{(n-k)!} =$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = 4! \left[\underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{1}}_{0} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right] =$$

0! 1! 2! 3! 4!

$\cancel{24} \cdot (1 - 1 + \ldots - 1)$

$$= \cancel{24} \, \frac{12 - 4 + 1}{\cancel{24}} = \boxed{9}$$

♡

4.

5.

Lakodalom
ülésrend
100 ember
Hány féle módon tudnak a nem a saját helyükre ülni?

SZITA FORMULA

mi legyen a komplementer esemény

$$\{\pi \in S_n \mid \pi(i) \neq i \ ; \forall i \in n\text{-re}\} =$$

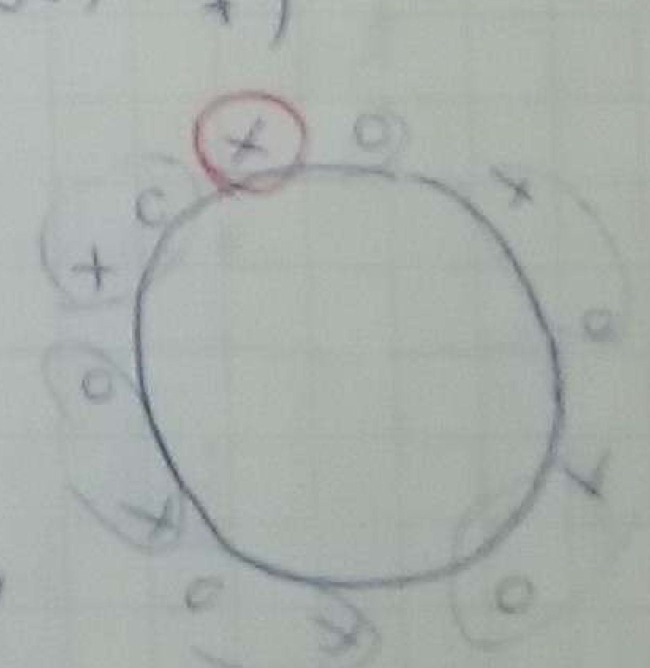
($\pi(i) = i$ mindenki a saját helyén ül)

$$= \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{I \in T} \left| \cap \overline{A}_i \right| =$$

$$= 100! \sum_{k=0}^{100} \frac{(-1)^k}{k!}$$

6.

Kör alakú asztal, esküvő
n db házaspár (n db ♂ és n db ♀)
felváltva ülnek (♂ ♀ ♂ ♀)
senki nem ülhet a párja mellett
számozottak a székek



férfiak leültetésének módja $\boxed{2 \cdot n!}$

$\pi(i) \neq i$ $\quad i \leq n$ balra $\quad i = 1 \dots n$

$\pi(i) \neq i+1$ $\quad i = 1 \dots (n-1)$ jobbra

$\pi(n) \neq 1$ (körbeérve se legyen a párja ugyanaz)

$|A_i| = (n-1)!$

$$|A_i \cap A_j| = \begin{cases} (n-2)! & i \neq j \quad i \neq j+1 \\ 0 & \end{cases}$$

különben a metszet 0
(egymást követő)
nem

összesen $2n$ hely van

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \overline{A_{2n}}\right| = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \,|\, (2n-k)!$$

ahány féle módon ~~nem~~
ülnek egymás mellett

$A_{2i-1} := \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\}$

$A_{2i} = \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i+1\}$

$A_{2n} = \{\pi \in S_n \mid \pi(n) = 1\}$

Amikor körbeértünk — megegyezik az 1.-vel

$|A_3| = |A_{2 \cdot 2-1}| = 2!$

$|A_4| = |A_{2 \cdot 2}| = 3!$

ez a kettő nem egyenlő egymással

ha ülnek egymás mellett a metszet számossága 0.

$|A_i| = (n-1)!$